

境界要素法と離散渦法に基づいた波・渦共存場の解析法の開発と応用

灘岡和夫*・増田幹雄**・鈴木 徹***

自由表面近傍に大きな渦度を伴った波・渦共存場の基本的な力学過程の解析を目的として、境界要素法と離散渦法に基づいた解析法を新たに開発した。次に、自由表面近傍に単一渦や渦対が存在する基本的なケースの解析例を示し、それらの特性を明らかにした。最後に、砕波帯内の波動場を念頭において、正弦波の前面から一定の割合で渦素子を供給した場合の計算結果を示し、砕波帯内では波の非線形性や分散性の効果に加えて渦度流速成分の存在が波形変形に有意な大きさの影響を及ぼし得ることを明らかにした。

Keywords : wave-eddies interaction, boundary element method, discrete vortex method, breaking waves

1. はじめに

海岸工学で対象とする水理現象には、砕波後の砕けながら進む波や吹送流（風波）など、自由表面を伴う渦ありの流れが数多く存在する。これらの流れ場は、一般に「波」と「渦」の共存場としてとらえることができ（たとえば灘岡ら¹⁾）、自由表面近傍に大きな渦度をもった流速成分が存在することによって特徴づけられている。

したがって、この種の流れの基本的なメカニズムを理解するには、「渦の運動にとっての自由表面の役割は何か?」、また逆に「自由表面は渦によってどのような変形を受けるか?」といったことを明らかにすること、すなわち「波」と「渦」の相互干渉過程を具体的に明らかにすることが必要になる。

現在の波動理論では、Longuet-Higgins and Cokelet²⁾による境界積分法による解析法の研究以来の数多くの研究により、かなり大きな波浪変形まで解析し得るようになってきている。その結果、最近では浅海域での砕波直前までの波浪変形もいく人かの研究者により解析されている（たとえば、Kioka³⁾、Dold and Peregrine⁴⁾）。しかし、これらはいずれも純粋な波動場に対する解析法であって、上記のような砕波後の波動場や吹送流のように自由表面近傍に有意な大きさの渦度を含む波動場の場合には適用できない。

一方、渦度場に関する研究は主として乱流研究者の手によって行われてきている。それは、乱流を（不規則な）渦塊の集合体とみなすことができることによっている。そのことから最近では、乱流のシミュレーション法の一つとして、乱流場を離散的な渦素子の集合体として取り

扱う離散渦法と呼ばれる手法（たとえば Leonard⁵⁾）がその簡便さもあって、他の LES や直接数値積分法などとともによく用いられるようになってきている。しかしながらそれは、領域境界の一部または全部が固定壁で構成されている場合に適用されているだけで、ここで対象としている自由表面境界を含む領域に適用された例は見当たらない。

このようなことから、波と渦の共存場を対象とした解析はこれまでほとんど行われてきていない。もちろん、LES や直接数値積分法などの高度な乱流モデルを時々刻々変化する自由表面波形をもつ領域に対して適用してやれば原理的には解析は実行可能であるが、それには膨大な計算量が必要となる。すなわち、波と渦の相互作用を考慮した形で両者の時間発展を記述し得る簡便かつ一般性のあるモデルは今のところ存在しないといつてよい。

そこで本研究では、①このような相互干渉過程を扱い得る簡便かつ汎用性のある解析手法を新たに開発し、②それを自由表面近傍に渦あるいは渦群が存在する場合の解析に適用することによって、「波」と「渦」の基本的な相互干渉過程を明らかにすることを目的とした。

なお、本研究で述べる内容のうち、渦対と自由表面の干渉過程の解析結果についてはすでに一昨年海岸工学論文集に発表されているが（灘岡ら⁶⁾）、同じ問題の解析結果がやはり一昨年 Telste⁷⁾によって報告されている。しかし彼らの解析は渦対の自由表面への衝突までの解析にとどまっており、その解析方法も複素速度ポテンシャルを用いている関係上二次元場に限られたものとなっている。

2. 解析手法

(1) 解法の基本的な考え方

波と渦が共存する場合の流速場 u は、一般的にポテ

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科
(〒152 目黒区大岡山 2-12-1)

** 工修 福井県敦賀土木事務所

*** 工修 運輸省港湾局

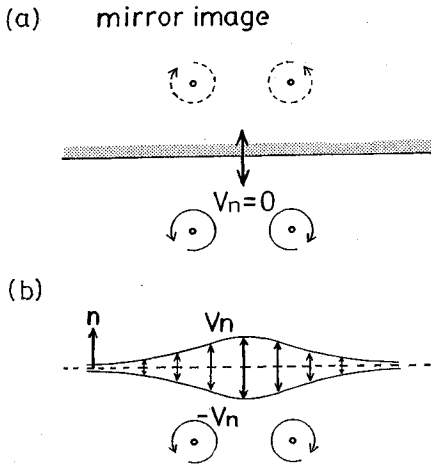


Fig.1

ンシャル流速場 u_p と渦に伴う流速場 u_e の重ね合わせとして $u = u_p + u_e$ と表現できる。したがって、 u_p の算定に従来の何らかの波動場の計算法を、また u_e の算定に何らかの渦度場の解析法を応用すれば、このような波・渦共存場の解析が可能になるはずである。そこでここでは、 u_p の算定法として最近一般的になりつつある境界要素法をベースとした混合オイラー・ラグランジュ法を、また u_e の算定には上述の離散渦法を用いることとした。ここで特に後者に関して離散渦法を採用した理由としては、それがもともとの連続的な渦度場を離散化し集中渦（渦素子）の集合体に置き換えることによる誤差を伴うものの、きわめて簡便な手法であるうえ、渦度場の力学の基本的な理解に適したものであるということによる。

ただし、これらの方法を単純に組み合わせることでここで目的としている波・渦共存場の解析法ができあがるわけではない。というのは、さきに述べたように、前者はこれまですべて純粋な波動場（ポテンシャル場）を対象として解法が構成されており、後者も固定境界で規定された渦度場に対して適用されてきているからである。

具体的に問題となるのは、渦素子が存在する場合の自由表面での境界条件の取り扱いである。従来の離散渦法での固定境界に関する境界条件の取り扱い方としては、通常 Fig.1(a) に示すような形で、境界面に関する各渦の鏡像を配置することにより固定壁での境界条件を満足するように取り扱われている。しかし、自由表面の場合においてはこのような鏡像の考え方をを用いることは原理的に不可能である。そこで、本研究では鏡像の考え方をを用いない新たな境界条件の設定法を考えた。

まず固定壁の場合に立ち戻って鏡像法の意味について考えてみる。もともと鏡像は、固定壁での法線方向流速がゼロという運動学的条件を満足させるように置かれて

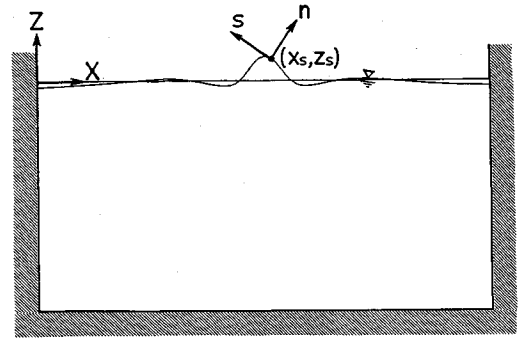


Fig.2 Definition sketch of coordinate systems.

いる。鏡像を用いないでこれと同等の取り扱いをするには、鏡像による境界での法線方向流速を explicit な形で与えてやればよい。すなわち、Fig.1(b) に示すように、仮に境界がないとした無限流体中での渦素子による境界面位置での法線方向流速 v_n に対して、それを打ち消すように境界面上で $-v_n$ の逆向きの流速を与えてそれによる領域内の流速場を求めれば、それと先の渦素子による流速場との合成流速は本来の固定壁での境界条件を満たすはずである。この $-v_n$ に伴う流速場の算定に関しては、それに対応する速度ポテンシャルを Φ_p としたとき、 Φ_p に関する Laplace の式を境界要素法で解けばよい。その場合の Φ_p に対する壁面での境界条件は次のようになる。

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_e}{\partial n} \dots \dots \dots (1)$$

ここで Φ_e は渦素子に対応する速度ポテンシャルである。このように考えれば、自由表面問題に対する運動学的境界条件は、このごく自然な拡張として以下のように書くことができる。

a) 運動学的境界条件

$$\frac{DX_s}{Dt} = \frac{\partial \Phi_p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial x} \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{DZ_s}{Dt} = \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial z} \dots \dots \dots (3)$$

b) 力学的境界条件

上述のように自由表面境界の場合には、これにさらに力学的境界条件が加わってくるが、それを Φ_p と Φ_e によって表現すると次のようになる。

$$\frac{D\Phi_p}{Dt} = -gZ_s + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{D\Phi_e}{Dt} \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 X_s と Z_s は自由表面上の座標、 g は重力加速度、 D/Dt はラグランジュ微分を示し、 n, s による微分は境界面における外向法線方向および接線方向微分を表している。なお、このときの座標系のとり方は Fig.2 に示す

とおりで、

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial x} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial \Phi_p}{\partial s} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial \Phi_p}{\partial n} \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = \frac{dz}{ds} \frac{\partial \Phi_p}{\partial s} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial \Phi_p}{\partial n} \dots\dots\dots (6)$$

である。

(2) 本解析法による数値計算の手順

a) ポテンシャル流速成分 Φ_p の算定

Φ_p は、上述の境界条件のもとで基礎方程式 $\nabla^2 \Phi_p = 0$ を解いて求められることになるが、そのための具体的な数値解法としては、ここでは基本的に Kioka³⁾の方法をそのベースとして用いている。

まず、各時間ステップでの流体境界上の Φ_p と $\partial \Phi_p / \partial n$ は、グリーンの公式に基づく次の境界積分方程式により求めることができる。

$$\alpha \Phi_p + \int \left(\frac{\partial G}{\partial n} \Phi_p - G \frac{\partial \Phi_p}{\partial n} \right) d\Omega = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ただし上式中の G は Green 関数であり、流体境界 Ω 上の計算点を $P = (x, z)$ 、source 点を $Q = (\xi, \eta)$ として、

$$G(P, Q) = \ln r \dots\dots\dots (8)$$

$$r = \{(x - \xi)^2 + (z - \eta)^2\}^{1/2} \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる。また α は P 点での内角である。

式 (7) を解くにあたっては、境界積分を離散化することにより連立一次方程式に置き換えて解くことになるが、その際に必要となる離散化された各要素内の近似関数としてはここでは一次関数を用いている。すなわち、要素 j でのポテンシャル Φ_p を ϕ_j 、要素内での局所座標として要素に沿う方向を s 軸、要素の長さを l_j 、要素数を N とすれば、

$$\Phi_j = \left(1 - \frac{s}{l_j}\right) \Phi_{pj} + \frac{s}{l_j} \Phi_{p,j+1} = S^T \cdot \Phi_j \dots\dots\dots (10)$$

$$q_j = \left(1 - \frac{s}{l_j}\right) q_j + \frac{s}{l_j} q_{j+1} = S^T \cdot q_j \dots\dots\dots (11)$$

$(j=1, \dots, N)$

ここに、 $q = \partial \Phi_p / \partial n$ で、

$$S^T = \left[\left(1 - \frac{s}{l_j}\right), \frac{s}{l_j} \right] \dots\dots\dots (12)$$

$$\Phi_j^T = [\Phi_{pj}, \Phi_{p,j+1}] \dots\dots\dots (13)$$

$$q_j^T = [q_j, q_{j+1}] \dots\dots\dots (14)$$

$(j=1, \dots, N)$

である。これより式 (7) は次のように離散化される。

$$\alpha_i \Phi_{pi} + \sum_{j=1}^N \int_{l_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) S^T \cdot \Phi_j - \ln \frac{1}{r} \cdot S^T \cdot q_j \right\} ds = 0 \dots\dots\dots (15)$$

これは、

$$\alpha_i \Phi_{pi} + \sum_{j=1}^N (A_{ij}^T \cdot \Phi_j - B_{ij}^T \cdot q_j) = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$(i=1, \dots, N)$

のようにまとめられる。ただし、 A_{ij}^T, B_{ij}^T は次のように定義される。

$$A_{ij}^T = [A_{1ij}, A_{2ij}] \dots\dots\dots (17)$$

$$= \int_{l_j} S^T \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) S^T ds$$

$$B_{ij}^T = [B_{1ij}, B_{2ij}] = \int_{l_j} S^T \cdot \ln \frac{1}{r} ds \dots\dots\dots (18)$$

さらに、

$$A_{i1} = A_{1i1} + A_{2i1}$$

$$A_{ij} = A_{1ij} + A_{2i(j-1)} \quad (j=2, \dots, N)$$

$$B_{i1} = B_{1i1} + B_{2i1}$$

$$B_{ij} = B_{1ij} + B_{2i(j-1)} \quad (j=2, \dots, N)$$

とすれば、式 (16) は以下のように表される。

$$\alpha_i \Phi_{pi} + \sum_{j=1}^N (A_{ij} \Phi_{pj} - B_{ij} q_j) = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$(i=1, \dots, N)$

b) 渦素子に伴う流速成分 Φ_e の算定

Φ_e については、各渦素子に伴う速度ポテンシャルの線形和として次式により簡単に求めることができる。

$$\Phi_e = \sum_i \frac{\Gamma_i}{r} \theta_i \dots\dots\dots (20)$$

ここで θ_i は各渦素子の中心を原点とする極座標表示での計算点 P の偏角を表し、 Σ はすべての渦素子についての合計を意味している。

c) 自由表面形状と渦素子位置の時間発展

自由表面形状 (X_s, Z_s) は、境界上のポテンシャル値 Φ_p とともに、境界条件式によりその時間発展が計算されることになる。その際必要となる各境界条件式の評価には、式 (19) と式 (20) によって求まる $\Phi_p, \partial \Phi_p / \partial n$ および Φ_e の値が用いられる。

自由表面形状と Φ_p の時間発展に連動して各渦素子の位置も変化していくことになるが、そのときの x 地点にある渦素子の移動速度 u, v は、

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \sum_i \frac{\Gamma_i (z - z_i)}{2\pi (r^2 + \sigma^2)} + \frac{\partial \Phi_p}{\partial x} \\ v(x) &= - \sum_i \frac{\Gamma_i (x - x_i)}{2\pi (r^2 + \sigma^2)} + \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

で算定される。ただし、 $r_i = |x - x_i|$ であり、 Γ_i は x_i 地点にある渦素子の循環、 Σ は x 地点以外にある渦素子についての合計を意味している。また、 σ は粘性の効果を考えて渦近傍でも有限の旋回速度となるように導入されたいわゆる粘性核である。

境界条件式 (2), (3), (4) の時間差分のスキームには、はじめの 3 ステップを Runge-Kutta-Gill 法を、それ以降の計算についてはそれを出発値として予測子修正子法の一つである Adams-Moulton 法を用いている。なお数値的な不安定を抑えるための numerical filtering は、ここでは特に施していない。

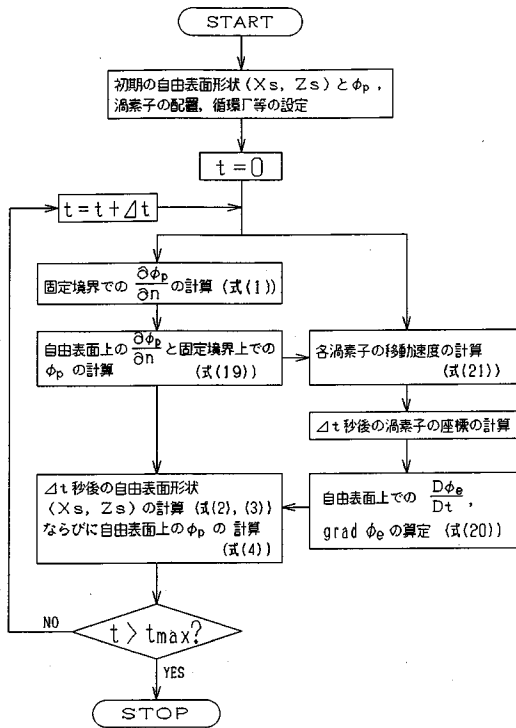


Fig.3 Flow-chart of the calculation.

Fig.3 に本解析法による数値計算のフローチャートを示す。

(3) 定常問題に対する解析法

対象とする系が定常状態に達している場合には、問題を必ずしも前節で述べた方法によって初期値問題として解析する必要はない。というのは、定常問題に対しては、以下に示すようなより簡便な方法によって解くことができるからである。ここでは、単一渦の場合を対象としてその具体的な定式化を行う。

単一渦が境界近傍にある場合にはその境界に平行にある速度で自走する。いまその自走速度を U_0 とし、渦とともにこの U_0 の速度で進む座標系からみると現象を自由表面波形 η が変化しない定常問題としてとらえることができる。この場合の自由表面での運動学的ならびに力学的境界条件は、それぞれ次のように書ける。

$$(u - U_0) \frac{\partial \eta}{\partial x} = w \dots\dots\dots (22)$$

$$\eta + \frac{1}{2g} [(u - U_0)^2 + w^2] = Q (= \text{const}) \dots\dots\dots (23)$$

流速場の表現方法として流れ関数 Ψ を用いるものとし、それを次のように表す (速度ポテンシャルを用いることも可能である)。

$$\Psi = \Psi_e + \Psi_e^* + \Psi_p - U_0 \cdot z \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 Ψ_e は、静止水面の位置を $z=0$ としたとき、 z

$= -z_e$ の位置にある渦糸 (実像) による流れ関数で、 Ψ_e^* は Ψ_e の鏡像、すなわち $z=z_e$ の位置にあって実像と回転方向が逆の渦糸による流れ関数である。すなわち、 Ψ_e と Ψ_e^* をデカルト座標系で表せば、

$$\left. \begin{aligned} \Psi_e &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(x^2 + (z+z_e)^2)^{1/2} \\ \Psi_e^* &= \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(x^2 + (z-z_e)^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

である。したがって、 $\Psi_e + \Psi_e^*$ で表される流れ関数は、境界面が固定壁の場合の (絶対座標系からみたときの) 流れ関数を構成していることになる。そのことから、 Ψ_p は境界面が自由表面となったことによる付加的な流れ関数とみなすことができる。このように考えれば、問題はこの Ψ_p を自由表面の形とともに求めることに帰着する。もちろん、自由速度 U_0 も固定壁の場合と異なる可能性があるのでこの U_0 も求めてやる必要があるが、これは固定壁の場合の自走速度を U_{00} とすれば、 Ψ_p を用いて、

$$U_0 = U_{00} + \left. \frac{\partial \Psi_p}{\partial z} \right|_{z=-z_e} \dots\dots\dots (26)$$

と表すことができるから独立な未知変量ではない。

この Ψ_p を求めるには、 Ψ_p が Laplace の式

$$\nabla^2 \Psi_p = 0 \dots\dots\dots (27)$$

を満たすことから、それを境界条件のもとで解けばよい。

まず、 Ψ_p が次の境界条件式

$$|\text{grad } \Psi_p| = 0 \text{ at } z \rightarrow -\infty \dots\dots\dots (28)$$

を満足することを考慮して、 Ψ_p を次のような Fourier 展開形式で表す。

$$\Psi_p = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n2\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi}{L}x\right) \right\} \cdot \exp\left(\frac{n2\pi}{L}z\right) \dots\dots\dots (29)$$

上式が Laplace の式 (27) を満たすことは簡単に確かめられる。ただし、 L は領域の幅で渦の影響範囲より十分広くとるものとする。

そこで、上式で表される Ψ_p と、先の式 (25) で表される Ψ_e と Ψ_e^* を用いて境界条件式 (22), (23) を表すと、自由表面 $z=\eta$ で $\Psi=0$ とできること、ならびに Bernoulli sum Q を $U_0^2/(2g)$ と置けることを考慮すれば、以下のように書ける。

$$U_0 \cdot \eta(x) = \Psi_e(x, \eta) + \Psi_e^*(x, \eta) + \Psi_p \dots\dots\dots (30)$$

$$\eta + \frac{1}{2g} \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_e + \Psi_e^* + \Psi_p - U_0 \cdot z) \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_e + \Psi_e^* + \Psi_p) \right\}^2 \right] = \frac{U_0^2}{2g} \dots\dots\dots (31)$$

したがって、問題はこれらの境界条件を満足する a_n と b_n ならびに自由表面波形 η を求めることに帰着する。

ここではこれらの未知量を具体的に算定する方法として、非線形最適化手法の一つである Marquardt 法を応

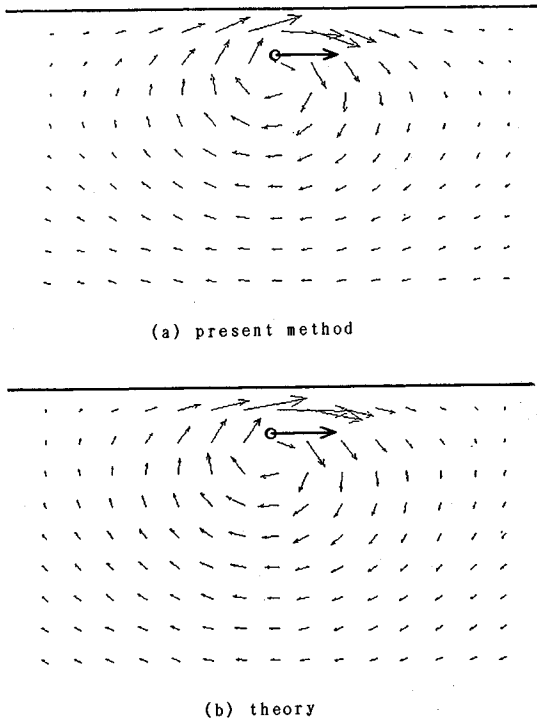


Fig.4 Velocity vector field due to a point vortex close to a fixed boundary.

用した解法を用いた。すなわち、 a_n と b_n ならびに η を最適化パラメーターと考えて、 x 軸上の Δx 刻みのポイントをデータポイントとしたときの式(30)と(31)の残差の二乗和を最小にする問題としてこれらの未知量を算定した。

3. 解析結果ならびに考察

(1) 単一渦の場合

a) 固定境界の場合の計算—本解析法の妥当性の検証
 固定境界の近傍に単一渦がある場合の流速場に関しては、先の式(25)で示したような理論解が存在する。そこで、ここではまずこのような固定境界の場合を対象として計算を行い、ここで開発した解析法の妥当性を検証する。

Fig.4(a)は本解析法による計算結果で、計算領域の上下の境界を固定境界、左右の境界を周期境界とした場合の上側固定境界近傍に単一渦を置いた場合の流速場の計算値を流速ベクトルの形で表したものである。一方Fig.4(b)は、これに対応する理論値を示したもので、これと計算値を比較するとかなりよい一致を示していることがわかる。さらに、渦の自走速度 U_{00} の値も、壁からの距離を z_e 、渦の循環を Γ としたときに

$$U_{00} = -\frac{\Gamma}{4\pi z_e} \dots \dots \dots (32)$$

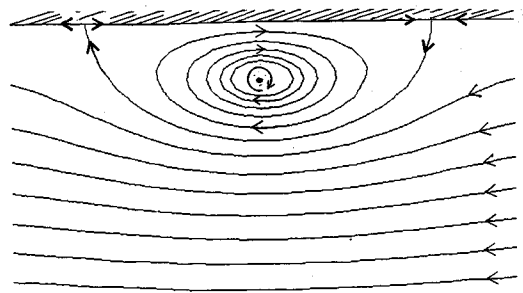


Fig.5 Streamlines due to a point vortex beneath a fixed boundary.

と表される理論値に対して、計算値がこのケースでは $1.017 \cdot U_{00}$ となっており、この点でもかなりよい一致をみせている。

これらのことから、鏡像法を用いない本解析法の妥当性が確認できた。

b) 自由表面の場合の計算

次に、上側境界を自由表面に置き換えた場合の解析結果について述べる。このような単一渦のケースでは、渦の粘性減衰を無視するとすれば定常状態が存在し得る。そこで、ここでは最も基本的なケースの理解からはじめるという意味でこのような単一渦による定常状態での自由表面の変形を取り扱う。この場合には2.(3)で述べた定常問題に対する解析法が適用できるが、その具体的な計算結果を示す前に現象を支配する無次元パラメーターに関する議論を行っておく。

ここで考えているような自由表面近傍に単一渦が存在する場合の水理現象にかかわっているパラメーターは、渦の循環 Γ と静止水面からの距離 z_e 、それと重力加速度 g である。これらを用いて、現象を支配する自由表面での境界条件式(22)、(23)を無次元化することを考える。

自由表面の境界条件を無次元化するには自由表面での流速や水位変動量それと x, z 等の空間座標を無次元化しておく必要がある。そこでまず、渦に伴う自由表面波形の空間スケールについて検討してみる。

Fig.5は、固定壁の場合の流線パターンを渦とともに動く座標系からみたときのパターンとして表したものである。この図からわかるように、 $z=0$ の流線上には左右2か所によどみ点が存在する。その位置 x_e は、理論的に $x_e = \pm \sqrt{3z_e}$ となるのが簡単に示される。このようなよどみ点ではBernoulliの定理からわかるように圧力が最大になる。逆に渦の直上の $x=0$ の地点では、図からわかるように流速が最大になることから圧力は最小になる。したがってもし境界が固定境界でなく自由境界に置き変わったとすると、水面上では常に大気圧とならねばならないという力学的境界条件が付加されるので、

先の上り点では水位が無遠に比べて上昇し、逆に $x=0$ の地点では下降することになる。そこでこの上昇・下降量のおよその値を見積ってみる。

まず、無限遠での水平流速は $-U_0$ であり、そこでは $\eta=0$ であるから、よどみ点での水位上昇量 η_e は、

$$\eta_e = \frac{U_0^2}{2g} \dots\dots\dots (33)$$

いま U_0 として、式 (32) で表される固定壁の場合の自走速度 U_{00} で近似できるものとする、次式で見積れる。

$$\eta_e \doteq \frac{1}{32\pi^2} \frac{\Gamma^2}{gz_e^2} \dots\dots\dots (34)$$

同様にして $x=0$ での水面沈下量 η_b も固定壁の場合の $x=0$ での流速で近似すると、次式のように表せる。

$$\eta_b \doteq -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\Gamma^2}{gz_e^2} \dots\dots\dots (35)$$

以上の考察の結果を用いて上述の無次元化について考える。

まず渦による水面変化の水平スケールであるが、もし、自由表面の場合の流線パターンが固定壁の場合とあまり違わないと考えることができるならば、自由表面の場合のよどみ点もやはり $x_e = \pm\sqrt{3z_e}$ の場所付近に現れるものと考えられる。とすれば、渦による上昇部分が現れる場所もこの位置の近辺であることが予想される。したがって渦に伴う自由表面波形の水平スケールは z_e によって規定されるものと考えられる。一方、渦の存在位置は当然ながら z_e で無次元化すればよいから、結局対象とする空間座標の無次元化はすべて z_e で行えば良いことになる。すなわち、

$$x' = \frac{x}{z_e}, \quad z' = \frac{z}{z_e} \dots\dots\dots (36)$$

同様にして表面変位 η を無次元化すると、式 (34) や (35) の形から推察されるように

$$\eta' = \frac{\eta}{z_e} \sim \frac{\Gamma^2}{gz_e^3} \dots\dots\dots (37)$$

となることから、無次元水位変化量 η' は、

$$\Omega_e = \frac{\Gamma^2}{gz_e^3} \dots\dots\dots (38)$$

という無次元パラメーターによって支配されることがわかる。

一方、自由表面での流速のオーダーは $|\Gamma|/z_e$ に支配されることから、流速の無次元化は、

$$\left. \begin{aligned} u' &= u \left(\frac{|\Gamma|}{z_e} \right)^{-1} \\ w' &= w \left(\frac{|\Gamma|}{z_e} \right)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

とできる。

以上に基づいて、自由表面境界条件式 (22), (23) の無次元化表示は以下の形になる。

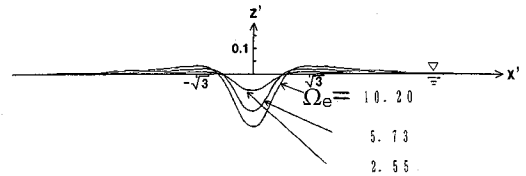


Fig.6 Water surface deformation due to a point vortex for several values of Ω_e .

$$(u' - U_0) \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = w' \dots\dots\dots (40)$$

$$\eta' \cdot \Omega_e^{-1} + \frac{1}{2} [(u' - U_0)^2 + w'^2] = \frac{U_0^2}{2} \dots\dots\dots (41)$$

したがって、上式の形から、ここで対象としている現象は唯一の無次元パラメーター Ω_e によって規定されることがわかる。

次に、実際に解析を行った結果について述べる。Fig.6は、いくつかの Ω_e の値に対して行った計算結果を無次元波形 η' の形で比較して表したものである。これにより、水面変動パターンの現れ方は先に予想した形になっていることや、 η' の変位レベルが Ω_e の値に対応してほぼ単調に増加していることがわかる。さらに、 Ω_e の値が変化しても η' の正の最大値が現れる位置があまり変化していないことから、渦に伴う表面波形の水平スケールが z_e によってほぼ規定されるとした上記の仮定も実際に成立し得ることがわかる。

(2) 渦対の場合

次に、静止水面に対して下方から強きの等しい互いに逆向きの渦対を当てたときの自由表面の挙動を解析した結果について述べる。この場合には当然ながら初期値問題としての取り扱いが必要になる。

Fig.7は、渦対の動きと連動させて自由表面の変化を図示したものである。この場合の計算条件は、計算領域の広さ：150×100 cm、循環の強さ：±2513 cm²/s、初期渦対間隔：10 cm、初期渦対位置： $x=0$ cm、 $z=-30$ cm、である。これを見ると、最初渦対はお互いの誘起速度で上昇し、自由表面に近づくと自由表面が上昇しており、水表面が渦の衝突を柔らかく受け止める、いわば“ソフトな boundary”として作用していることがわかる。その結果として渦の軌跡は固定壁の場合とは違ってとがった形となっている。その後、水表面の降下とともに、渦はそれに連動した水表面の変形を伴い左右に分かれて進んでいるが、そのときの水表面波形は、前節で述べた単一渦に対する定常状態での波形に近づいていっていることがわかる。

Fig.8は、先ほどの計算結果における $t=1.0$ s での流速ベクトルを示したものである。上から、 $\text{grad } \Phi_p$ 、 $\text{grad } \Phi_e$ 、そして合成流速場 $\text{grad } (\Phi_p + \Phi_e)$ を示したものである。これを見ると、流速は渦の近傍に局在化して

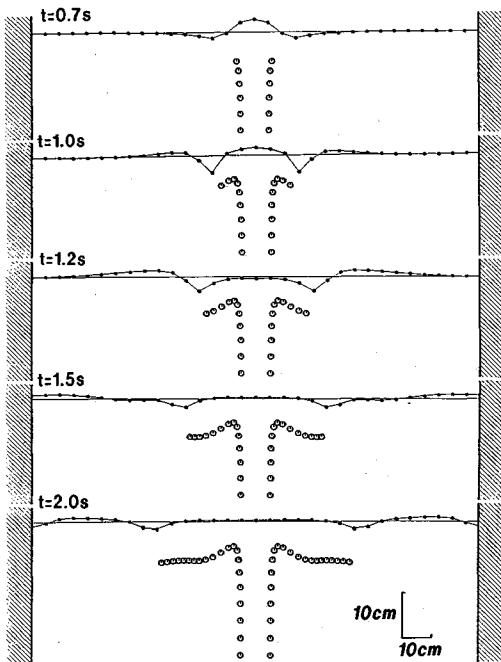


Fig. 7 Evolution of vortex trajectories and water surface elevation.

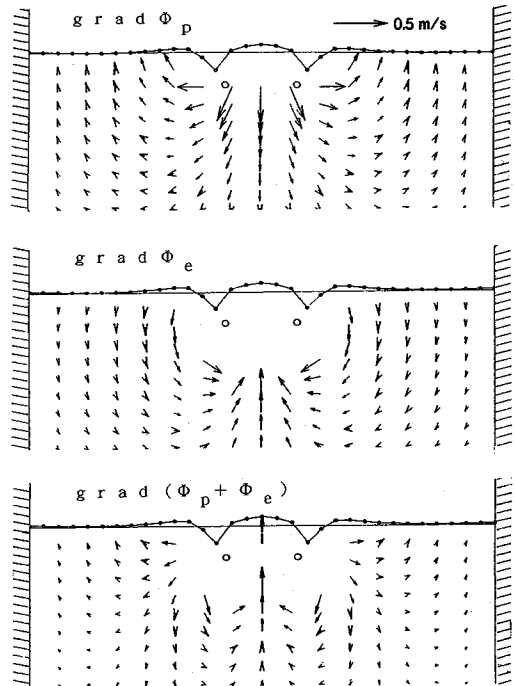


Fig. 8 Velocity fields corresponding to Φ_p , Φ_e and $\Phi_p + \Phi_e$ at $t=1.0$ s.

いるのではなく、離れたところにもある程度の大きさの流速が存在しているのがわかる。そこでその原因について考えるために自由表面の動きに着目してみた。

Fig. 9 は、渦から離れた領域での様子をより明瞭にするため水槽幅を 200 cm と広げ、同時に渦対の循環を $\pm 1885 \text{ cm}^2/\text{s}$ とした場合の自由表面の挙動を時間を追って示したものである。これをみると、最初自由表面の中央部に盛り上がりが生じたのち 2 種類の変形パターンが現れていることがわかる。一つは、局所的にへこんだ形の変形パターンでこれは 3. (1) で示した渦に連動したほぼ左右対称な変形パターンであり、いうなれば渦運動に伴った一種の forced wave の部分である。もう一つは、速いスピードで伝播している部分の変形である。これは最初の中央部の盛り上がり解放されて発生した一種の free wave で、これが先ほど示した渦から離れた場所で流速が現れる原因であったことがわかる。

上記の現象をエネルギー的な観点からみると、渦が水表面に近づくに従い、水表面が盛り上がることによって渦の運動エネルギーの一部がポテンシャルエネルギーに変換され、さらにそれが波動エネルギーになることによって渦から波へのエネルギーの移行が生じていると解釈することができる。したがって、波動へのエネルギー移行量は初期の水面の盛り上がり量 η_{\max} によって支配されることになるが、それは渦対中央部での代表速度 U と $\eta_{\max} \sim U^2/2g$ で関連づけられる。一方この U は、渦対の循環 Γ と間隔 b により $U \sim \Gamma/b$ として表すこと

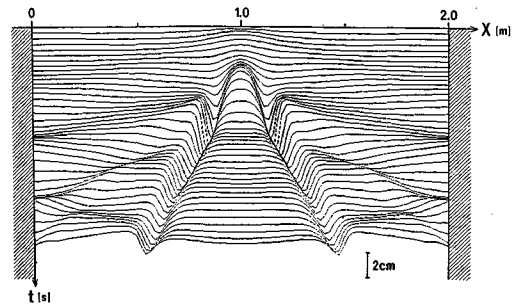


Fig. 9 Sequence plot of water surface profiles with the time interval of 0.08 s.

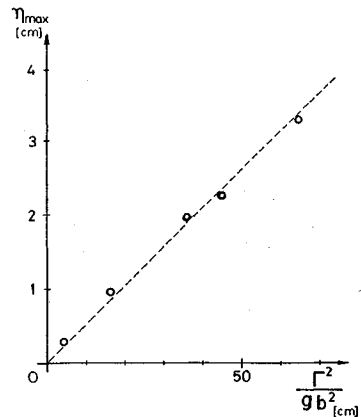


Fig. 10 Relationship between η_{\max} and Γ^2/gb^2 .

ができるので、結局、 η_{\max} は比例係数を α として次式で見積れるものと考えられる。

$$\eta_{\max} = \alpha \frac{\Gamma^2}{gb^2} \dots \dots \dots (42)$$

Fig.10 は、この関係を確かめるために実際に循環 Γ の値および間隔 b を 5 ケースほど変えて η_{\max} を計算し、プロットしてみたものである。これより、式 (42) で示した η_{\max} の循環 Γ への依存性が確かめられ、このときの α の値としては $\alpha \approx 0.05$ となることがわかる。

(3) 「波」と「渦」の共存場への適用

この節では、自由表面の運動すなわち「波」がすでに存在しており、そこに「渦」（より正確には渦度を有する流速成分）が加わった場合の力学過程の解析に本解析法を適用することを考える。具体的には、砕波後の波・乱れ共存場や風波と吹送流の共存場などがその典型的な例として挙げられるが、ここではこのうち、砕波後の波・乱れ共存場を対象とした解析を行った。

a) 問題の設定

砕波後の流速場に関しては、LDV に代表されるような測定器の最近の飛躍的な進歩を背景として、近年急速にその構造が明らかにされつつある。たとえば灘岡ら^{11,9)} は、砕波後の流速場において「水平渦」と「斜降渦」と呼ばれる特徴的な大規模渦構造が存在することを見出し、そのような大規模渦に伴って生成される多量の渦度が砕波後の流速場を基本的に特徴づけていることを明らかにしている。

このように、砕波後の流速場はまさに本研究で対象としている波と渦の共存場の典型的な例となっているが、これまでのところ、そのような特徴を反映した形での波動場のモデル化を行ったものは見当たらない。というのは、従来の研究の枠組みでは、砕波を伴う波動場をここでやっているような波と渦の共存場としてとらえるのではなく、すべて波と乱れの共存場としてとらえているからである。つまり、従来の枠組みでは渦構造の存在を単に乱れの存在としてとらえていることからその乱れの役割として波のもつエネルギーの absorber としての側面だけがモデルに取り入れられているにすぎない。したがってこのようなモデルでは、本質的にエネルギー減衰の結果としての波高減衰が算定されるだけで、波形の変化は表現し得ないことになる。

これに対して本研究では砕波の効果を単なる乱れの発生ではなく渦度の生成という観点からとらえることが必要であるという立場に立っている。というのは、砕波によって生成される渦度は平均的にある特定の回転方向（具体的には水平渦の回転方向）をもっていることから、そのような渦度場のクセが自由表面の変形に何らかの有意な変形を引き起こすと考えられるからである。そこでここでは実際に波の波頂部前面からある大きさの渦度を

供給して波形と渦度場の時間発展の様子を解析し、その可能性を探ってみた。

ここで具体的に問題となるのが、どのようにして現実的な渦度の供給量を設定するかということである。ここでは、一様勾配斜面上で渦度供給量がエネルギー散逸量とバランスすることを利用してエネルギー散逸量から渦度供給量を評価している灘岡・広瀬らの方法⁹⁾ を用いて、inner region を対象とした以下に示す算定式により見積った。

$$A = 2gh^{1/3} \left(1.25\gamma L \frac{dh}{dx} \right)^{2/3} \dots \dots \dots (43)$$

ここに、 A ：一波長分の単位時間当たりの渦度供給量、 h ：水深、 L ：波長、 γ ：波高水深比（ $=H/h$ ）である。具体的な数値としては、 $L=1.5$ m、 $H=0.1$ m、 $\gamma=0.7$ 、 $dh/dx=1/30$ という状況を設定し、それに対応する渦度供給量を上式より算定して $A=1.27$ m²s⁻² とした。

また、乱れによる渦度の拡散現象を考慮するために、ここではモンテカルロ法によるランダムウォークモデル（たとえば灘岡・八木¹⁰⁾）を用いて渦素子の拡散を表現している。そのとき必要となる拡散係数 K_s の値としてはやはり灘岡・広瀬⁹⁾ の方法により求めることとし、先の諸元から $K_s=6.06$ m²/s とし与えた。

b) 計算結果ならびに考察

ここでは、渦の存在による波の波形の時間的发展に対する影響をみることを主眼としているので、あらかじめ与える波形としてはできるだけシンプルな波形ということを考えて正弦波形を採用し、かつ渦が存在しない場合には波形変形が生じないようにするという意味で、 $H=0.1$ m、 $h=1.0$ m、 $L=1.5$ m の条件を与えてシミュレーションを行った。予備的な計算によって、渦度供給を伴わない場合、この波の諸元のもとでは波の伝播に際して実際に正弦波形がほぼ保たれることが確認されている。

Fig.11 は、波形の zero-up cross 点付近から、100 個/s の割合で実際に渦素子を注入した場合の計算結果を微小振幅波の波速で移動する座標系でみた形で表したものである。各渦素子の循環は先の値から 0.00127 m²/s とし、図中の丸印が渦素子を示している。もちろん、実際の渦度の source 地点が bore の前面である程度の広がりをもって分布していることを考えると、このように source 点を一地点に集約させることには多少問題がある。しかし、供給された渦度（渦素子）のその後の移流拡散過程の計算結果をみると、波の crest 前面近傍に渦素子が高密度で存在し、さらに crest 後方に行くにつれて下方に拡散して、波の trough 位相でほぼ底面近くまで達する形になっている。このパターンは実際の室内実験での可視化によって bore 前面に注入された染料等のトレーサーが移流拡散されていく様子とほぼ一致しており、ここでのシミュレーション結果は実際の渦度

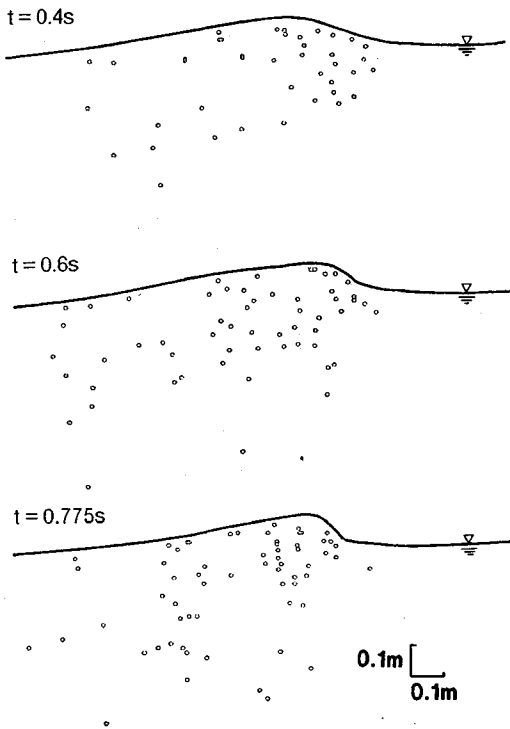


Fig.11 Evolution of wave profile under the influence of vortices (moving frame).

の移流拡散パターンの本質的な特徴をほぼ表現しているものと考えられる。

この Fig.11 をみると、渦度供給がある場合には wave crest の位置が前方にシフトすると同時に crest 背後の水面が持ち上がる形に変化し、結果的に砕波帯内の bore の波形に類似した前傾化した波形に移行していくことがわかる。このことは、このような形での渦度の存在が、さきで予想したとおり、波形の時間発展プロセスに有意な大きさに影響し得ることを示しており、砕波後の波動場のモデル化(波動方程式の構築)を今後行っていくうえで次のような2つのきわめて重要なポイントを示唆している。

1) 砕波を伴わない波動場の力学過程は波のもつ非線形性と分散性という2つの要素によって基本的に支配される。このうち波の非線形性は一般に波形を急激にし前傾化させる作用があり、波の分散性は逆に波形をなだらかにする作用をもっている。したがって実際の波形の時間発展はこの2つの要素の大きさならびにバランスによって決まってくることになる。この2つの要素は砕波後の波動場でも重要な働きをするが、今回行ったシミュレーション結果により、たとえこれらの要素がともに存在しなくても渦度が自由表面付近に存在すれば波形の変化に十分有意な大きさの影響を及ぼし得ることが明らか

になった。

すなわち、砕波後の波動場に関しては、波の非線形性と分散性という二大要素に加えて、砕波に伴って生成される渦度の効果とその時間発展を記述するうえで重要となってくる。

2) 砕波そのもののプロセスは波形の前傾化とその後の crest 前面での流体塊の突っ込みならびに大規模渦の生成という一連の現象よりなるが、ここでのシミュレーション結果により、大規模渦の生成はそれに伴う渦度場の形成を通して波形の前傾化を引き起こしていることが明らかとなった。このことは渦度場はそれ自身の存在により自らの source の大きさある程度支配していることを示しており、一つの閉じたシステムが存在することを示唆している。

これに対して従来のエネルギー減衰型モデルでは、エネルギー散逸関数を波の力学過程とクローズする形で与えるものではなく、何らかの水理量の関数として外側から与える形となっている。

したがって、渦度供給に着目した「波・渦共存場」の枠組みでの波動モデルの構築にあたってはこの点を特に考慮する必要がある。

4. 結 論

本研究で得られた主要な結論をまとめると以下のようになる。

(1) 本研究では、波と渦の相互干渉過程を考慮し得る簡便でかつ一般性のある解析法を開発した。この解析法は、波と渦の共存場をポテンシャル場(非回転流速場)と渦度場(回転流速場)の共存場とみなし、前者を境界要素法をベースとした混合オイラー・ラグランジュ法により表現し、後者を離散渦法により表すものであるが、ここでは、波・渦共存場に対する新たな自由表面境界条件を導入することにより両者を有機的に統合することによって解析法を具体的に構成することに成功した。また、対象とする現象が定常状態に達した場合の問題に関しては、Fourier 展開法と非線形最適化手法の一つである Marquardt 法を応用した解法を開発した。

(2) 本研究で開発した波・渦共存場の解析手法を用いて、単一渦や渦対と自由表面との相互干渉過程を解析した結果、そのいくつかの基本的な特性を明らかにすることができた。さらに砕波後の波と渦の共存場を対象とした解析を行った結果、渦度の効果のみによって自由表面波形が時間とともに有意な大きさに前傾化していくことが示された。このことから、通常の波動場で重要となる波の非線形性と分散性の効果に加えて、砕波によって渦度が多量に供給される場合にはその渦度の効果によっても波形の時間発展が大きく規定されることが明らかにされた。

なお、本研究は文部省科学研究費総合研究（A）「砕波帯内の流体運動に関する総合的研究」（研究代表者：服部昌太郎），および河上記念財団工学研究助成の補助を受けて行われたものである。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 灘岡和夫・小谷野喜二・日野幹雄：二成分光ファイバー流速計を用いた砕波帯内流速場の特性の解明，第32回海岸工学講演会論文集，pp.50～54，1985.
- 2) Longuet-Higgins, M.S. and Cokelet, E.D. : The deformation of steep surface waves on water I, Proc. Roy. Soc. London A., 350, pp.1～26, 1976.
- 3) Kioka, W. : Numerical analysis of breaking waves in a shallow water, Coastal Eng. Japan, Vol.26, pp.11～18, 1983.
- 4) Dold, J.W. and Peregrine, D.H. : Steep unsteady water waves : An efficient computational scheme, Proc. 19th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.955～967, 1984.
- 5) Leonard, A. : Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol.17, pp.523～559, 1985.
- 6) 灘岡和夫・増田幹雄・鈴木 徹：境界要素法と離散渦法を応用した「波」と「渦」の相互干渉過程の解析，第36回海岸工学講演会論文集，pp.41～45，1989.
- 7) Telste, J.G. : Potential flow about two counter-rotating vortices approaching a free surface, J. Fluid Mech., Vol.201, pp.258～278, 1989.
- 8) Nadaoka, K., Hino, M. and Koyano, Y. : Structure of the turbulent flow field under breaking waves in the surf zone, J. Fluid Mech., Vol.204, pp.359～387, 1989.
- 8) 灘岡和夫・広瀬文人：砕波の物理過程に基づいた砕波帯内の拡散係数のモデル化，第33回海岸工学講演会論文集，pp.26～30，1986.
- 10) 灘岡和夫・八木 宏：渦素子法による波動境界層の数値シミュレーション，第35回海岸工学講演会論文集，pp.16～20，1988.

(1990.10.23 受付)

DEVELOPMENT AND APPLICATIONS OF A NUMERICAL METHOD FOR THE ANALYSIS OF WAVE-EDDIES COEXISTING FIELD BASED ON BEM AND DISCRETE-VORTEX METHOD

Kazuo NADAOKA, Mikio MASUDA and Toru SUZUKI

A new computational method has been developed in the present study to analyse the interaction process between 'waves' and 'eddies'. With the water surface boundary condition derived for the wave-eddy coexisting field, Boundary Element Method (BEM) and Discrete Vortex Method are well organized to construct the present method. As examples the method has been applied to the some fundamental cases of the wave-eddy coexisting system; i.e., a steady problem in which a point vortex translates beneath the water surface with its deformation, and the behaviour of a vortex pair approaching the water surface and their subsequent interactive evolution. Finally the present method has been applied to simulate turbulent bore in the surf zone, and the results reveal that in addition to nonlinearity and dispersivity effects inherent to pure wave motion the existence of vortical fluid motion may appreciably affect the evolution dynamics of the water surface profile.