

ポテンシャル接続法(選点解法)によるストークス波と 構造物の非線形波動境界値問題解析法[†]

吉田明德*・小島治幸**・鶴本良博***

有限振幅波(ストークス波)と構造物の波動境界値問題に、ポテンシャル接続法(選点解法)を用いる解析法を提示し、二次のオーダーまでの基本的な理論式の展開と、数値計算上の留意点、および実験による解の検証結果を述べた。解析法の特徴は、物理量の微分値が理論的に得られ、非線形量の算定に境界要素法等では避けられない差分誤差が生じない点と、選点解法により理論式の展開がきわめて簡潔となる点である。

Keywords: Stokes-second-order waves, nonlinear wave-structure interactions, eigenfunction expansions

1. まえがき

有限振幅波と構造物の相互干渉を境界値問題として解析する方法は2つに大別され、初期状態から時間ステップごとに流体運動を追跡する非定常問題としての解析法と(たとえば, Faltinsen¹⁾; 滝川・田淵²⁾; Iijima and Nagata³⁾; Isaacson⁴⁾; Kim *et al.*⁵⁾; 大山⁶⁾; 安田ら⁷⁾), 物理量を摂動展開して低次の解から高次の非線形解を得る定常問題としての解析法である(たとえば, Potash, R. L.⁸⁾; 経塚⁹⁾; 喜岡¹⁰⁾; 吉田ら¹¹⁾). 前者は、非線形の水面境界条件を厳密に(数値計算上)考慮でき、理論式の展開も比較的簡明であるが、定常状態の解を得るまでには多くの計算時間を要し(構造物と波との相互干渉の多くは定常問題である), さらに計算領域の境界面において、波の通過条件^{12), 13)}をどのように与えるかがわからないことから、計算領域を著しく大きく取らねばならない。後者は、計算量と計算時間が比較的少なくて済み、二次のオーダー程度の解析では前者に比べて誤差の累積も少ないが、摂動の次数が大きくなると理論式展開の煩雑さが急激に増大する。

いずれにせよ、これらの解析法は、海底地形変化による波の変形の解析を目的とするいくつかの解析法(たとえば日野・灘岡¹⁴⁾; 浜中ら¹⁵⁾)を別とすると、そのほとんどが積分方程式を離散化して数値的に解く手法(境界要素法・有限要素法)を用いるもので、境界条件における物理量の微分値の算定は数値差分によらざるを得ず、非定常問題としての解析法では時間ステップごとの、定

常問題としての解析法では高次解への、差分誤差の累積が生じるのは避けられない。

一方、前記の離散化手法に比べるとより解析的で精度の良い線形定常問題の解析法としてポテンシャル接続法(領域分割法, the method of matched eigenfunction expansions)(たとえば, 井島¹⁶⁾)がある。この方法は、流体域が鉛直境界面によって矩形状に分割できる場合に適用が限られるが、物理量の微分が差分によらず理論的に得られる。しかも、計算時間と計算機の容量が小さくて済む利点もあり、これと摂動展開法と併用すれば、有限振幅波に関する有用な解析法を得ることが期待できる。しかし、ポテンシャル接続法(従来の解法)では、直交関数に関する積分演算を行うため、非線形問題への適用は理論式の展開がいつそう煩雑となって実質上困難であった。したがって、適用例としては著者らが知る限り、単純なステップ地形による変形の解析を試みた Massel¹⁷⁾の例があるに過ぎず、一般的な構造物に適用を試みた例は見当たらない。

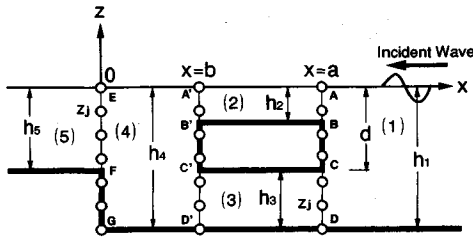
最近、著者らはポテンシャル接続法の非線形問題への適用を考えた際に、直交関数に関する積分演算を行うことなく未定係数が決定できる方法(選点解法)を思いつき、線形問題に適用して、きわめて簡単に精度のよい解が得られることを確認した¹⁸⁾。本論文は、この選点解法を用いることによって、ポテンシャル接続法を有限振幅波(ストークス波)に関する境界値問題の解析に用いる方法を示すもので、2次のオーダーまでの基本的な理論式の展開と、固有関数展開した速度ポテンシャルを有限項で打ち切ることによって生じる数値計算上の問題点(線形問題の場合に比べると留意すべき点が多い)の検討、および水槽実験による理論解の検証結果を述べている。

[†]本論文は、海岸工学論文集¹⁹⁾に一部既発表の成果に、その後の研究データと考察を加えて新たに取りまとめたものである。

* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部水工土木学科 (〒812 福岡市東区箱崎)

** 正会員 Engr. 九州大学助手 工学部水工土木学科

*** 正会員 工修 高松工業高等専門学校助教授 土木工学科



図一 領域分割と計算点

2. 理論解析

(1) 基本仮定

図一に示すような完全没水の構造物と海底形状の場合について理論式の展開を示すことにする。xの正方向から水面波形 $\zeta(x, t)$ の有限振幅波（2次のストークス波）が入射する場合を考える。1次のオーダーの波（微小振幅波）の振幅を ζ_0 、波数を k 、角周波数を $\sigma (= 2\pi/T$: T は周期) で表し、流体域を鉛直の境界面によって一定水深の領域 (1), (2), (3), (4), (5) に分割する。流体運動は非圧縮性かつ非粘性完全流体の非回転運動で、速度ポテンシャル $\Phi(x, z, t)$ は、微小パラメーター $\epsilon (= k\zeta_0)$ で次式のように展開できるものとする。

$$\Phi(x, z, t) = \frac{g}{k\sigma} \{ \epsilon \varphi^{(1)}(x, z, t) + \epsilon^2 \varphi^{(2)}(x, z, t) \} \quad \dots \dots \dots (1)$$

ただし、 $\varphi^{(1)}(x, z, t)$ 、 $\varphi^{(2)}(x, z, t)$ はそれぞれ $O(\epsilon)$ 、 $O(\epsilon^2)$ の速度ポテンシャルを表す無次元の関数で、 g は重力加速度である。

自由表面 $z = \zeta(x, t)$ における次のベルヌイの式 (p は流体圧力、 ρ は流体密度、 $Q^{(2)}$ は2次のオーダーの定数)、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\zeta - \frac{p}{\rho} = Q^{(2)} \quad \dots \dots \dots (2)$$

に、自由水面の力学的条件 $D(p/\rho)/Dt = 0$ と、運動学的境界条件 $D\zeta/Dt = -\partial\Phi/\partial z$ を用いると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right\} = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

これに自由表面における式 (1) の速度ポテンシャル $\Phi(x, z, t)$ を静水面 $z=0$ に関してテーラー展開して代入し、 ϵ の同次の項を整理すると $z = \zeta(x, t)$ における水面境界条件は $z=0$ における $\varphi^{(1)}(x, z, t)$ と $\varphi^{(2)}(x, z, t)$ に関する境界条件として次式で与えられる。

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial t^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial t^2} = -\frac{1}{k\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{1}{kg} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} \right\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

本文では単一周波数成分の波が入射する場合を考えているから、式 (4)、(5) より $\varphi^{(1)}(x, z, t)$ と $\varphi^{(2)}(x, z, t)$ は次式のように表せる¹¹⁾。

$$\varphi^{(1)}(x, z, t) = \text{Re}[\phi_1^{(1)}(x, z) \exp(i\sigma t)] \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\varphi^{(2)}(x, z, t) = \text{Re}[\phi_0^{(2)}(x, z) + \phi_2^{(2)}(x, z) \exp(i2\sigma t)] \quad \dots \dots \dots (7)$$

上式中の $\phi_1^{(1)}(x, z)$ 、 $\phi_2^{(2)}(x, z)$ 、 $\phi_0^{(2)}(x, z)$ は、無次元の複素関数で、これらを便宜上ポテンシャル関数と呼ぶことにする。

自由水面を有する領域 (1), (2), (4), (5) の $O(\epsilon)$ のポテンシャル関数 $\phi_1^{(1)}(x, z)$ は、よく知られているように式 (4) の水面境界条件と水底の不透過境界条件を満足するラプラス方程式の解として一般に次式で表せる¹⁶⁾。

$$\phi_1^{(1)}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_{in} \exp(k_n x) + D_{in} \exp(-k_n x) \} Z(k_n z) \quad \dots \dots \dots (8)$$

上式で、 C_{in} 、 D_{in} は未定係数で、 $Z(k_n z)$ は次式を意味する。

$$Z(k_n z) = \cos k_n(z+h_1) / \cos k_n h_1 \quad \dots \dots \dots (9)$$

k_{in} は、 $n=0$ のときは純虚数 ($k_{i0} = ik_i$)、 $n \neq 0$ のときは実数として、次式の根で与えられる固有値である。

$$\sigma^2 h_i / g = -k_{in} h_i \tan k_{in} h_i \quad (i=1, 2, 4, 5) \quad \dots \dots (10)$$

なお、式 (8)、(9)、(10) 中の C_{in} 、 k_{in} 、 h_{in} 、 \dots 、等の諸量の添え字 i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) は各領域を意味する。ただし簡単のため、明記する必要がある場合を除いて省略する。

(2) $O(\epsilon^2)$ のポテンシャル

$O(\epsilon^2)$ の水面境界条件式 (5) に式 (6)、(7) を代入し、さらに右辺に $O(\epsilon)$ の解、式 (8) を代入して、時間 t に関し、右辺と左辺の定常項と 2σ の項をそれぞれ等置すると、 $\phi_2^{(2)}(x, z)$ と $\phi_0^{(2)}(x, z)$ に関する水面境界条件がそれぞれ次式のように得られる。

$$\frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial z} - \frac{(2\sigma)^2}{g} \phi_2^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \{ \lambda(k_n, k_p) Q_{np}(x) + \bar{\lambda}(k_n, k_p) \bar{Q}_{np}(x) \} \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$\frac{\partial \phi_0^{(2)}}{\partial z} = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \gamma(k_p) \{ Q_{np}^*(x) + \bar{Q}_{np}^*(x) \} \quad \dots \dots \dots (12)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} Q_{np}(x) &= C_n C_p \exp(k_{np} x) + D_n D_p \exp(-k_{np} x) \\ \bar{Q}_{np}(x) &= C_n D_p \exp(\bar{k}_{np} x) + C_p D_n \exp(-\bar{k}_{np} x) \\ Q_{np}^*(x) &= C_n C_p^* \exp(k_{np}^* x) + D_n D_p^* \exp(-k_{np}^* x) \\ \bar{Q}_{np}^*(x) &= C_n D_p^* \exp(\bar{k}_{np}^* x) + C_p^* D_n \exp(-\bar{k}_{np}^* x) \end{aligned} \right\}$$

$$\dots\dots\dots(13)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda(k_n, k_p) &= i(3\Gamma^2 + 2k_n k_p + k_p^2) / 2k \\ \bar{\lambda}(k_n, k_p) &= i(3\Gamma^2 - 2k_n k_p + k_p^2) / 2k \\ \gamma(k_p) &= i(\Gamma^2 + k_p^2) / 2k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{np} &= k_n + k_p, \quad \bar{k}_{np} = k_n - k_p \\ k_{np}^* &= k_n + k_p^*, \quad \bar{k}_{np}^* = k_n - k_p^* \\ \Gamma &= \sigma^2 / g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

式 (13), (15) 中の $C_n^*, D_n^*, k_n^*, \dots$ は, それぞれ $C_n, D_n, k_n \dots$ の共役複素数を意味する. よって k_n^* は, $n=0$ のとき $k_n^* = -k_n$, $n \neq 0$ のとき $k_n^* = k_n$ である.

$O(\epsilon^2)$ のポテンシャル関数 $\phi_0^{(2)}(x, z)$ と $\phi_0^{(2)}(x, z)$ は, 水面境界条件と水底境界条件を満足するラプラス方程式の解としてそれぞれ次式のように得られる.

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_n^{(2)} \exp(k_n^{(2)} x) \\ &\quad + D_n^{(2)} \exp(-k_n^{(2)} x) \} Z(k_n^{(2)} z) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_{mp}(x, z) \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_0^{(2)}(x, z) &= \bar{C}_0^{(2)} \left(\frac{x}{l} \right) + \bar{D}_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \bar{C}_n^{(2)} \exp\left(\frac{n\pi}{h} x \right) \right. \\ &\quad + \bar{D}_n^{(2)} \exp\left(-\frac{n\pi}{h} x \right) \left. \right\} \cos \frac{n\pi}{h} z \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \bar{\Pi}_{mp}^*(x, z) \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

ここに, $l = (a-b)/2$, $C_n^{(2)}, D_n^{(2)}, \bar{C}_n^{(2)}, \bar{D}_n^{(2)}$ は $O(\epsilon^2)$ の未定係数で, $k_n^{(2)}$ は $O(\epsilon)$ の k_n と同様, $n=0$ のときは純虚数 $k_0^{(2)} = ik_0$, $n \neq 0$ のときは実数として, 次式の根で与えられる.

$$(2\sigma)^2 h_i / g = -k_{in}^{(2)} h_i \tan k_{in}^{(2)} h_i \quad (i=1, 2, 4, 5) \dots\dots(18)$$

また $\Pi_{mp}(x, z)$, $\bar{\Pi}_{mp}^*(x, z)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \Pi_{mp}(x, z) &= \frac{\lambda(k_m, k_p)}{\mu_1(k_{mp})} Q_{mp}(x) Z(k_{mp} z) \\ &\quad + \frac{\bar{\lambda}(k_m, k_p)}{\mu_1(\bar{k}_{mp})} \bar{Q}_{mp}(x) Z(\bar{k}_{mp} z) \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{mp}^*(x, z) &= \frac{\gamma(k_p)}{\mu_2(k_{mp}^*)} Q_{mp}^*(x) Z(k_{mp}^* z) \\ &\quad + \frac{\bar{\gamma}(k_p)}{\mu_2(\bar{k}_{mp}^*)} \bar{Q}_{mp}^*(x) Z(\bar{k}_{mp}^* z) \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1(k_{mp}) &= 4\Gamma + k_{mp} \tan k_{mp} h \\ \mu_1(\bar{k}_{mp}) &= 4\Gamma + \bar{k}_{mp} \tan \bar{k}_{mp} h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_2(k_{mp}^*) &= k_{mp}^* \tan(k_{mp}^* h) \\ \mu_2(\bar{k}_{mp}^*) &= \bar{k}_{mp}^* \tan(\bar{k}_{mp}^* h) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

ただし, $O(\epsilon^2)$ のポテンシャル関数の定常成分 $\phi_0^{(2)}(x, z)$ は 2 次のオーダーまでの水面波形や圧力には寄与しないから, これ以後は $\phi_2^{(2)}(x, z)$ についてのみ考える. さらに, $O(\epsilon)$ のポテンシャル関数 $\phi_1^{(1)}(x, z)$ と $O(\epsilon^2)$

のポテンシャル関数 $\phi_2^{(2)}(x, z)$ の周波数成分の次数を表す添え字はなくても自明であるから省略して $\phi^{(1)}(x, z)$ と $\phi^{(2)}(x, z)$ で表すこととする. したがって, これ以後, 領域を明記する場合にのみポテンシャル関数に添え字がつく.

式 (16) の $\phi^{(2)}(x, z)$ において, 右辺の最初の級数項は式 (11) で右辺を 0 とおいた同次の水面境界条件を満足するラプラス方程式の一般解で, 第 2 項の 2 重級数項は式 (11) の非同次境界条件を満足するラプラス方程式の特解である. 物理的には, 式 (16) の第 1 項は, 構造物と入射波との非線形干渉によって励起される波 (自由波) を表していて, その波数 $k^{(2)}$ は 2σ の周波数成分に関する分散方程式 ($n=0$ の場合の式 (18)) より決まる. また $n>0$ の級数項は自由波の停止散乱波成分を表す.

第 2 項 $\Pi_{mp}(x, z)$ は $O(\epsilon^2)$ の水面境界条件と周波数 σ の基本周波数成分波により決まるストークス波の 2 倍周波数成分を表している. いま, 式 (19) の第 1 項の $Q_{mp}(x)$ のうち, x の負の方向へ進行する (停止散乱波は指数関数的に減衰する) 波の項を取り, $m=p$ の場合について書き改めると次式を得る.

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda(k_m, k_m)}{\mu_1(k_{mm})} C_m C_m \exp\{2k_m x\} Z(k_{mm} z) \\ &= -i \frac{3\sigma^2}{8gk} C_m^2 \frac{\cos 2k_m(z+h)}{\sin^4 2k_m h} \exp(2k_m x) \end{aligned}$$

上式で $m=0$ とおくと, これは一定水深域を進行するストークス波のポテンシャルの 2 次成分と一致する. 式 (13) と (19) よりわかるように, $\Pi_{mp}(x, z)$ には $C_m C_p$ および $D_m D_p$ で表される x の正および負の方向へ進行する同じ波どうしの自己干渉の項と, $C_m D_p$ および $D_m C_p$ で表される互いに逆の方向へ進行する異なる波の干渉項があり, それぞれ, 添え字が $m=p=0$ のときは進行波どうしの干渉項, $m=0, p>0$ および $m>0, p=0$ のときは進行波と停止散乱波との干渉項, $m>0, p>0$ のときは停止散乱波どうしの干渉項を意味する.

(3) 各領域のポテンシャル関数と連続条件

$O(\epsilon)$ のポテンシャル関数についてはよく知られているから省略して, $O(\epsilon^2)$ の場合について各領域のポテンシャル関数を示すと, 自由表面を有する領域 (1), (2), (4), (5) では式 (16) より次のようである.

$$\begin{aligned} \phi_1^{(2)}(x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n}^{(2)} \exp(-k_{1n}^{(2)}(x-a)) Z(k_{1n}^{(2)} z) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_{1mp}(x, z) \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{(2)}(x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_{2n}^{(2)} \exp(k_{2n}^{(2)}(x-a)) \\ &\quad + D_{2n}^{(2)} \exp(-k_{2n}^{(2)}(x-b)) \} Z(k_{2n}^{(2)} z) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_{2mp}(x, z) \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4^{(2)}(x, z) = & \sum_{n=0}^{\infty} \{C_{4n}^{(2)} \exp(k_{4n}^{(2)}(x-b)) \\ & + D_{4n}^{(2)} \exp(-k_{4n}^{(2)}x)\} Z(k_{4n}^{(2)}z) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_{4mp}(x, z) \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_5^{(2)}(x, z) = & \sum_{n=0}^{\infty} C_{5n}^{(2)} \exp(k_{5n}^{(2)}x) Z(k_{5n}^{(2)}z) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_{5mp}(x, z) \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

構造物底面下の領域 (3) における $O(\epsilon^2)$ のポテンシャル関数は、構造物底面と海底面の不透過境界条件を満足するラプラス方程式の解として $O(\epsilon)$ のポテンシャル関数と同じ形¹⁶⁾の次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_3^{(2)}(x, z) = & C_{30}^{(2)} \left(\frac{1}{l}\right) (x-l-b) + D_{30}^{(2)} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \{C_{3n}^{(2)} \exp\left(\frac{n\pi}{h_3}(x-a)\right) \\ & + D_{3n}^{(2)} \exp\left(-\frac{n\pi}{h_3}(x-b)\right)\} \bar{Z}(z) \dots \dots (27) \end{aligned}$$

ただし、 $\bar{Z}(z) = \cos n\pi(z+d)/h_3$

なお、これらのポテンシャル関数において、たとえば、式 (23) 中の $D_{1n}^{(2)}$ や式 (24) 中の $C_{2n}^{(2)}$, $D_{2n}^{(2)}$ などの係数にかかる指数関数の変数 x が式 (16) の一般解と異なり、それぞれ $x-a$, $x-a$, $x-b$ となっている。これは、鉛直境界面での連続条件より得られる未定係数に関する連立一次方程式を解く際に、連立一次方程式の係数マトリックス中に指数関数による非常に大きな値が入るのを避けるための数値計算上の措置で、理論上は特別の意味はない。

一般解に含まれる未定係数は、鉛直境界面における速度ポテンシャル (およびその法線微分値) の連続条件より決められる。この連続条件を境界面 ($x=a$) を例にとり示すとオーダー p ($p=1, 2$) のポテンシャル関数について次式で表される。

$$\phi_1^{(p)} = \begin{cases} \phi_2^{(p)} & (-h_2 < z < 0) \\ \phi_3^{(p)} & (-h_1 < z < -d) \end{cases} \dots \dots \dots (28)$$

$$\frac{\partial \phi_1^{(p)}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \phi_2^{(p)}}{\partial x} & (-h_2 < z < 0) \\ 0 & (-d < z < -h_2) \\ \frac{\partial \phi_3^{(p)}}{\partial x} & (-h_1 < z < -d) \end{cases} \dots \dots \dots (29)$$

同様の連続条件式が ($x=b$) および ($x=0$) の各鉛直境界面において成り立ち、これらの条件式より得られる未定係数に関する連立一次方程式を解いて未定係数を決めることになるが、まず、線形問題を解いて $O(\epsilon)$ の未定係数を求め、これをストークス波の 2 倍周波数成分 Π_{mp} の算定に用いて、 $O(\epsilon^2)$ の未定係数に関する連立

一次方程式を解く。 $O(\epsilon)$ と $O(\epsilon^2)$ の未定係数が決まれば速度ポテンシャルが決まり、式 (2) のベルヌイの式より水面波形と流体圧力を求めることができる。

なお、 $O(\epsilon)$ の係数を式 (13) に用いて Π_{mp} の算定をする場合には式中の係数は、たとえば領域 (2) の C_n に関しては、

$$\begin{aligned} C_{2n} \exp(k_{2n}(x-a)) \\ = \{C_{2n} \exp(-k_{2n}a)\} \exp(k_{2n}x) \end{aligned}$$

であるから、式 (13) 中の C_{2n} にかえて $C_{2n} \exp(-k_{2n}a)$ を用いる。

(4) 選点解法による未定係数の決定

未定係数に関する連立一次方程式は、従来、固有関数 $Z(k_n z)$ が直交関数系をなすことを利用して導かれていた。しかし、この従来の解法¹⁶⁾では固有関数に関する積分演算が必要で、このため、図-1 に示すような比較的分割領域数の多い流体域形状や、波浪中の動揺浮体などを対象とする解析では、理論式の展開とその表示は恐ろしく煩雑となつて、非線形問題に従来の解法を踏襲することは実質上は不可能である。

そこで、著者らは新たに、固有関数に関する積分演算を行うことなく、きわめて簡潔にしかも精度よく未定係数を決定できる解法 (選点解法) を提案した (吉田ら¹⁸⁾)。

選点解法の詳細な説明は省略するが、(a) 計算点 (選点) の間隔は一定に取ること、(b) 計算点の個数と対応する領域のポテンシャルの級数の項数とを一致させることは、選点解法を用いる際の必須の条件である。

いま、鉛直境界 AB (同じく $A'B'$), BC (同じく $B'C'$), CD (同じく $C'D'$), EF, FG 上の計算点の個数を $O(\epsilon)$ では N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 , $O(\epsilon^2)$ では $N_1^{(2)}, N_2^{(2)}, N_3^{(2)}, N_4^{(2)}, N_5^{(2)}$ に取り、各領域のポテンシャルの固有関数展開の打ち切り項数を $O(\epsilon)$ では n_i ($i=1, \dots, 5$) で、 $O(\epsilon^2)$ では $n_i^{(2)}$ ($i=1, \dots, 5$) で表すこととすると、上述の条件 (b) より、これらの打ち切り項数と計算点の個数とは、 $O(\epsilon)$ を例に取ると $n_1+1=N_1+N_2+N_3$, $n_2+1=N_1$, $n_3+1=N_3$, $n_4+1=N_4+N_5$, $n_5+1=N_4$ で、さらに条件 (a) より、 $N_1+N_2+N_3=N_4+N_5$ (したがって $n_1+1=n_4+1$) である。 $O(\epsilon^2)$ についても同様の関係が成り立つ。

ここで、式 (23) から (27) のポテンシャル関数を各鉛直境界面の連続条件式に代入し、境界面上に取った計算点において条件式が成り立つことを規定すると未定係数に関する連立一次方程式が得られる。 $O(\epsilon)$ については省略して、 $O(\epsilon^2)$ の場合についてのみ示すと次のようである。

($x=a$ での連続条件より)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n_1^{(2)}} D_{1n}^{(2)} Z(k_{1n}^{(2)}z_j) - \sum_{n=0}^{n_1^{(2)}} \{C_{2n}^{(2)} + D_{2n}^{(2)} \exp(-2k_{2n}^{(2)}l)\} Z(k_{2n}^{(2)}z_j) \\ = - \sum_{m=0}^{\bar{n}_1} \sum_{p=0}^{\bar{n}_1} \Pi_{1mp}(a, z_j) + \sum_{m=0}^{\bar{n}_2} \sum_{p=0}^{\bar{n}_2} \Pi_{2mp}(a, z_j) \end{aligned}$$

$$(j=1, \dots, N_1^{(2)}) \dots\dots\dots(30)$$

$$\sum_{n=0}^{n_1^{(2)}} k_{1n}^{(2)} D_{1n}^{(2)} Z(k_{1n}^{(2)} z_j) + \sum_{n=0}^{n_2^{(2)}} k_{2n}^{(2)} \{C_{2n}^{(2)} - D_{2n}^{(2)} \exp(-2k_{2n}^{(2)} l)\} Z(k_{2n}^{(2)} z_j) = \sum_{m=0}^{\bar{n}_1} \sum_{p=0}^{\bar{n}_1} \Lambda_{1mp}(a, z_j) - \sum_{m=0}^{\bar{n}_2} \sum_{p=0}^{\bar{n}_2} \Lambda_{2mp}(a, z_j) \quad (j=1, \dots, N_1^{(2)}) \dots\dots\dots(31)$$

$$\sum_{n=0}^{n_1^{(2)}} k_{1n}^{(2)} D_{1n}^{(2)} Z(k_{1n}^{(2)} z_j) = \sum_{m=0}^{\bar{n}_1} \sum_{p=0}^{\bar{n}_1} \Lambda_{1mp}(a, z_j) \quad (j=1, \dots, N_2^{(2)}) \dots\dots\dots(32)$$

$$\sum_{n=0}^{n_1^{(2)}} D_{1n}^{(2)} Z(k_{1n}^{(2)} z_j) - \{C_{30}^{(2)} + D_{30}^{(2)}\} - \sum_{n=1}^{\frac{n_3^{(2)}}{2}} \{C_{3n}^{(2)} + D_{3n}^{(2)} \exp(-\frac{2n\pi}{h_3})\} \bar{Z}(z_j) = - \sum_{m=0}^{\bar{n}_1} \sum_{p=0}^{\bar{n}_1} \Pi_{1mp}(a, z_j) \quad (j=1, \dots, N_3^{(2)}) \dots\dots\dots(33)$$

$$\sum_{n=0}^{n_1^{(2)}} k_{1n}^{(2)} D_{1n}^{(2)} Z(k_{1n}^{(2)} z_j) + C_{30}^{(2)} \frac{1}{l} + \sum_{n=1}^{\frac{n_3^{(2)}}{2}} \left\{ \frac{n\pi}{h_3} \right\} \{C_{3n}^{(2)} - D_{3n}^{(2)} \exp(-\frac{2n\pi l}{h_3})\} \bar{Z}(z_j) = \sum_{m=0}^{\bar{n}_1} \sum_{p=0}^{\bar{n}_1} \Lambda_{1mp}(a, z_j) \quad (j=1, \dots, N_3^{(2)}) \dots\dots\dots(34)$$

($x=b$ での連続条件より)

$$\sum_{n=0}^{n_2^{(2)}} \{C_{2n}^{(2)} \exp(-2k_{2n}^{(2)} l) + D_{2n}^{(2)}\} Z(k_{2n}^{(2)} z_j) - \sum_{n=0}^{\frac{n_4^{(2)}}{2}} \{C_{4n}^{(2)} + D_{4n}^{(2)} \exp(-k_{4n}^{(2)} b)\} Z(k_{4n}^{(2)} z_j) = - \sum_{m=0}^{\bar{n}_2} \sum_{p=0}^{\bar{n}_2} \Pi_{2mp}(b, z_j) + \sum_{m=0}^{\bar{n}_4} \sum_{p=0}^{\bar{n}_4} \Pi_{4mp}(b, z_j) \quad (j=1, \dots, N_1^{(2)}) \dots\dots\dots(35)$$

$$\sum_{n=0}^{n_2^{(2)}} k_{2n}^{(2)} \{C_{2n}^{(2)} \exp(-2k_{2n}^{(2)} l) - D_{2n}^{(2)}\} Z(k_{2n}^{(2)} z_j) - \sum_{n=0}^{\frac{n_4^{(2)}}{2}} k_{4n}^{(2)} \{C_{4n}^{(2)} - D_{4n}^{(2)} \exp(-k_{4n}^{(2)} b)\} Z(k_{4n}^{(2)} z_j) = - \sum_{m=0}^{\bar{n}_2} \sum_{p=0}^{\bar{n}_2} \Lambda_{2mp}(b, z_j) + \sum_{m=0}^{\bar{n}_4} \sum_{p=0}^{\bar{n}_4} \Lambda_{4mp}(b, z_j) \quad (j=1, \dots, N_1^{(2)}) \dots\dots\dots(36)$$

$$\sum_{n=0}^{n_4^{(2)}} k_{4n}^{(2)} \{C_{4n}^{(2)} - D_{4n}^{(2)} \exp(-k_{4n}^{(2)} b)\} Z(k_{4n}^{(2)} z_j) = - \sum_{m=0}^{\bar{n}_4} \sum_{p=0}^{\bar{n}_4} \Lambda_{4mp}(b, z_j) \quad (j=1, \dots, N_2^{(2)}) \dots\dots\dots(37)$$

$$\sum_{n=0}^{n_4^{(2)}} \{C_{4n}^{(2)} + D_{4n}^{(2)} \exp(-k_{4n}^{(2)} b)\} Z(k_{4n}^{(2)} z_j) + \{C_{30}^{(2)} - D_{30}^{(2)}\} - \sum_{n=1}^{\frac{n_3^{(2)}}{2}} \{C_{3n}^{(2)} \exp(-\frac{2n\pi}{h_3}) + D_{3n}^{(2)}\} \bar{Z}(z_j)$$

$$= - \sum_{m=0}^{\bar{n}_4} \sum_{p=0}^{\bar{n}_4} \Pi_{4mp}(b, z_j) \quad (j=1, \dots, N_3^{(2)}) \dots\dots\dots(38)$$

$$\sum_{n=0}^{n_4^{(2)}} k_{4n}^{(2)} \{C_{4n}^{(2)} - D_{4n}^{(2)} \exp(-k_{4n}^{(2)} b)\} Z(k_{4n}^{(2)} z_j) - C_{30}^{(2)} \frac{1}{l} - \sum_{n=1}^{\frac{n_3^{(2)}}{2}} \left\{ \frac{n\pi}{h_3} \right\} \{C_{3n}^{(2)} \exp(-\frac{2n\pi l}{h_3}) - D_{3n}^{(2)}\} \bar{Z}(z_j) = - \sum_{m=0}^{\bar{n}_4} \sum_{p=0}^{\bar{n}_4} \Lambda_{4mp}(b, z_j) \quad (j=1, \dots, N_3^{(2)}) \quad (x=0 \text{ での連続条件より}) \dots\dots\dots(39)$$

$$\sum_{n=0}^{n_5^{(2)}} C_{5n}^{(2)} Z(k_{5n}^{(2)} z_j) - \sum_{n=0}^{n_4^{(2)}} \{C_{4n}^{(2)} \exp(-k_{4n}^{(2)} b) + D_{4n}^{(2)}\} Z(k_{4n}^{(2)} z_j) = - \sum_{m=0}^{\bar{n}_5} \sum_{p=0}^{\bar{n}_5} \Pi_{5mp}(0, z_j) + \sum_{m=0}^{\bar{n}_4} \sum_{p=0}^{\bar{n}_4} \Pi_{4mp}(0, z_j) \quad (j=1, \dots, N_4^{(2)}) \dots\dots\dots(40)$$

$$\sum_{n=0}^{n_5^{(2)}} k_{5n}^{(2)} C_{5n}^{(2)} Z(k_{5n}^{(2)} z_j) - \sum_{n=0}^{n_4^{(2)}} k_{4n}^{(2)} \{C_{4n}^{(2)} \exp(-k_{4n}^{(2)} b) - D_{4n}^{(2)}\} Z(k_{4n}^{(2)} z_j) = - \sum_{m=0}^{\bar{n}_5} \sum_{p=0}^{\bar{n}_5} \Lambda_{5mp}(0, z_j) + \sum_{m=0}^{\bar{n}_4} \sum_{p=0}^{\bar{n}_4} \Lambda_{4mp}(0, z_j) \quad (j=1, \dots, N_4^{(2)}) \dots\dots\dots(41)$$

$$\sum_{n=0}^{n_5^{(2)}} k_{4n}^{(2)} \{C_{4n}^{(2)} \exp(-k_{4n}^{(2)} b) - D_{4n}^{(2)}\} Z(k_{4n}^{(2)} z_j) = - \sum_{m=0}^{\bar{n}_4} \sum_{p=0}^{\bar{n}_4} \Lambda_{4mp}(0, z_j) \quad (j=1, \dots, N_5^{(2)}) \dots\dots\dots(42)$$

なお、 $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_4, \bar{n}_5$ は、ストークスの 2 倍周波数成分項 Π_{mp}, Λ_{mp} の算定に用いる $O(\epsilon)$ の解の打ち切り項数で、 $\Lambda_{mp}(x, z)$ は $\Pi_{mp}(x, z)$ の x 方向微分である。

(5) 水面波形と流体圧力

式 (2) のベルヌイの式に式 (1), (6), (7) を代入して整理すると水面波形 $\zeta(x, t)$, 流体圧力 $p(x, z, t)$ はそれぞれ次式のように表せる。

$$\zeta(x, t) / \zeta_0 = R_e [\eta_1^{(1)}(x) \exp(i\sigma t) + \epsilon \{\eta_0^{(2)}(x) + \eta_2^{(2)}(x) \exp(i2\sigma t)\}] \dots\dots\dots(43)$$

$$p(x, z, t) / \rho g \zeta_0 = R_e [\rho_1^{(1)}(x, z) \exp(i\sigma t) + \epsilon \{\rho_0^{(2)}(x, z) + \rho_2^{(2)}(x, z) \exp(i2\sigma t)\}] \dots\dots\dots(44)$$

ここで、

$$\eta_0^{(2)}(x) = [-\{|\phi_x^{(1)}|^2 + |\phi_z^{(1)}|^2\} / 4k\Gamma + \phi^{(1)*} \phi_z^{(1)} / 2k + Q^{(2)}]_{z=0} \dots\dots\dots(45)$$

$$\eta_2^{(2)}(x) = [-i2\phi^{(2)} - \{(\phi_x^{(1)})^2 + (\phi_z^{(1)})^2\} / 4k\Gamma + \phi^{(1)} \phi_z^{(1)} / 2k]_{z=0} \dots\dots\dots(46)$$

$$\rho_0^{(2)}(x, z) = -\{|\phi_x^{(1)}|^2 + |\phi_z^{(1)}|^2\} / 4k\Gamma + Q^{(2)} \dots\dots\dots(47)$$

$$p_2^{(2)}(x, z) = -i2\phi^{(2)} - \{(\phi_x^{(1)})^2 + (\phi_z^{(1)})^2\} / 4k\Gamma \dots (48)$$

$\phi_x^{(1)}, \phi_z^{(1)}$ はそれぞれ $\phi^{(1)}$ の x, z 微分で、 $\phi^{(1)*}$ は $\phi^{(1)}$ の共役複素数である。

上式に $O(\epsilon)$ の一般解 (8) と $O(\epsilon^2)$ の一般解 (16) を代入すると、水面を有する領域の $\eta_0^{(2)}(x), \eta_2^{(2)}(x)$, および $p_0^{(2)}(x, z), p_2^{(2)}(x, z)$ は一般に次式で与えられる。

$$\eta_0^{(2)}(x) = \sum_{m=0}^{\bar{n}} \sum_{p=0}^{\bar{n}} [\alpha(k_m, k_p^*) + \Gamma/2k] Q_{mp}^*(x) + \{\bar{\alpha}(k_m, k_p^*) + \Gamma/2k\} \bar{Q}_{mp}^*(x) + Q^{(2)} \dots (49)$$

$$\eta_2^{(2)}(x) = -2i \sum_{n=0}^{\bar{n}} \{C_n^{(2)} \exp(k_n^{(2)}x) + D_n^{(2)} \exp(-k_n^{(2)}x)\} + \sum_{m=0}^{\bar{n}} \sum_{p=0}^{\bar{n}} \{H(k_m, k_p) Q_{mp}(x) + \bar{H}(k_m, k_p) \bar{Q}_{mp}(x)\} \dots (50)$$

$$p_2^{(2)}(x, z) = -2i \sum_{n=0}^{\bar{n}} \{C_n^{(2)} \exp(k_n^{(2)}x) + D_n^{(2)} \exp(-k_n^{(2)}x)\} Z(k_n^{(2)}z) - 2i \sum_{m=0}^{\bar{n}} \sum_{p=0}^{\bar{n}} \Pi_{mp}(x, z) + \sum_{m=0}^{\bar{n}} \sum_{p=0}^{\bar{n}} \{\alpha(k_m, k_p) Z(\bar{k}_{mp}z) Q_{mp}(x) + \bar{\alpha}(k_m, k_p) Z(k_{mp}z) \bar{Q}_{mp}(x)\} \dots (51)$$

$$p_0^{(2)}(x, z) = \sum_{m=0}^{\bar{n}} \sum_{p=0}^{\bar{n}} \{\alpha(k_m, k_p^*) Z(\bar{k}_{mp}z) Q_{mp}^*(x) + \bar{\alpha}(k_m, k_p^*) Z(k_{mp}z) \bar{Q}_{mp}^*(x)\} + Q^{(2)} \dots (52)$$

ただし、

$$\alpha(k_m, k_p) = -\{\Gamma^2 + k_m k_p\} / 4k\Gamma \quad \bar{\alpha}(k_m, k_p) = -\{\Gamma^2 - k_m k_p\} / 4k\Gamma \quad (53)$$

$$H(k_m, k_p) = \left\{ -2i \frac{\lambda(k_m, k_p)}{\mu_1(k_{mp})} + \alpha(k_m, k_p) - \frac{\Gamma}{2k} \right\} \quad \bar{H}(k_m, k_p) = \left\{ -2i \frac{\bar{\lambda}(k_m, k_p)}{\mu_1(\bar{k}_{mp})} + \bar{\alpha}(k_m, k_p) - \frac{\Gamma}{2k} \right\} \dots (54)$$

定数 $Q^{(2)}$ は、 $x \rightarrow \infty$ で $\bar{\eta}_0^{(2)} = 0$ の平均水位を基準水深に取ることにすると、式 (49) より、次式で与えられる。

$$Q^{(2)} = \bar{\alpha}(k, k) (1 + |D_0|^2) \dots (55)$$

ここに示してはいないが、同様に、構造物底面下の領域における流体圧力も、式 (47), (48) に式 (27) のポテンシャル関数を用いて得られるから、これらの圧力を構造物表面に沿って積分することによって、構造物に作用する $O(\epsilon)$ と $O(\epsilon^2)$ の波力が算定できる。

3. 数値計算法の検討と実験による理論解の検証

(1) 数値計算法の検討

$O(\epsilon^2)$ の計算には一次解の項数 $n_i + 1$, 自由波のポテンシャルの項数 $n_1^{(2)} + 1$, およびストークス波の2倍周

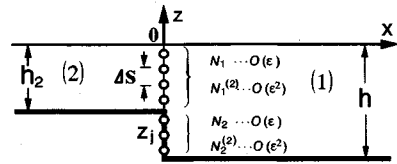


図-2 ステップ地形と計算点

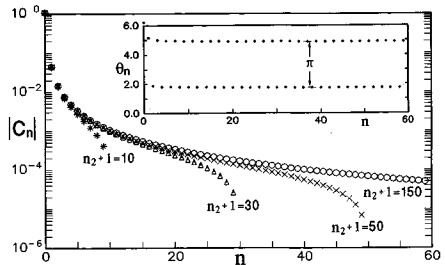


図-3 打ち切り項数による一次解 C_n の変動 ($kh=1.0$)

波数成分の算定に用いる一次解の項数 $\bar{n}_i + 1$ が相互に影響することになり、精度のよい解を得るためには $O(\epsilon)$ の場合に比べ、検討すべき点が格段と多い。そこで、図-2に示す、最も単純なステップ地形を例にとって、これらの点についての検討を行った。なお、ステップ上の水深 h_2 は領域 (1) の水深 h の半分 ($h_2/h=0.5$) に取っている。したがって、選点解法における打ち切り項数と境界上の計算点（選点）の個数との関係から、 $n_1 + 1 = 2(n_2 + 1)$, $n_1^{(2)} + 1 = 2(n_2^{(2)} + 1)$ の関係にある。

a) $O(\epsilon)$ の数値解の特性

図-3は、打ち切り項数の違いによる $O(\epsilon)$ の解の差異の様子を示したもので、一次解の打ち切り項数 n_i ($i=1, 2$) が $n_2 + 1 = 10, 30, 50, 150$, (したがって $n_1 + 1 = 20, 60, 100, 300$) の場合について、ステップ上の領域 (2) のポテンシャルの未定係数の大きさ $|C_n|$ と位相 θ_n (rad.) を60項まで示している。図中○印は、($n_1 + 1 = 300, n_2 + 1 = 150$) の場合で、九州大学計算機センターの一般ジョブのほぼ容量いっぱい的一次解の項数を取った場合に当たり、便宜上、これを $O(\epsilon)$ の厳密解と呼ぶことにする。図より、係数 C_n は、 n が大きくなるにつれて単調に減少し、打ち切り項数の値にかかわらず隣合う係数ごとに位相が π だけ異なる。打ち切り項数が大きい厳密解の結果をみると、 n が大きくなるにつれて、係数の大きさが等しくなる（一定値を取る）傾向にあり、しかも、隣合う係数は互いに逆位相であるから、未定係数 C_n から成る無限級数は、項数 n が大きいところでは、隣合う項が互いに相殺するようになると考えられ、 $O(\epsilon)$ のポテンシャルの固有関数展開の一樣収束性が成り立つことが数値解より推測される。なお、ここには示していないが（参考文献19）参照、入射波側の領域 (1) の係数 D_n から成る無限級数についても一樣収

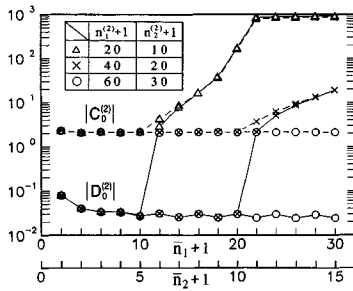


図-4 二次の解の打ち切り項数 $n_i^{(2)}$ と Π_{mp} の算定に用いる一次解の項数 \bar{n}_i+1 との関係による解の変動 ($kh=1.0$)

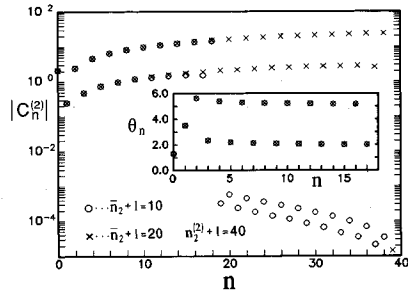


図-5 Π_{mp} の算定に用いる一次解の項数による二次の解 $C_n^{(2)}$ の差異 ($kh=1.0$)

束性が成り立つことが、 C_n の場合と同様に推測される。

b) $O(\epsilon^2)$ の打ち切り項数 $n_i^{(2)}$

前節で示した $O(\epsilon)$ の係数を $O(\epsilon^2)$ のストークス波成分 $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定に使い、ついで、これを外力項とする境界値問題を解いて二次の解を求めることになるが、この際に $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定に用いる一次解の項数 \bar{n}_i+1 としては、必ずしも一次解の係数を全部用いる ($\bar{n}_i+1=n_i+1$) 必要はなく、数値計算上は $\bar{n}_i+1 \leq n_i+1$ であれば任意の値を用い得る。ただし、自由波を表す級数項の打ち切り項数 $n_i^{(2)}$ は、 \bar{n}_i と無関係に取ることはできない。このことを図-4 に示した。図には $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定に用いる一次解 (厳密解) の項数 \bar{n}_i+1 に対する未定係数 (初項) の大きさ $|C_n^{(2)}|$ と $|D_n^{(2)}|$ を、 $n_i^{(2)}+1$ が 20, 40, 60 の場合についてそれぞれ Δ , \times , \circ で示している。なお、 \bar{n}_i+1 , \bar{n}_2+1 を、ここでは一応 $\bar{n}_i+1=2(\bar{n}_2+1)$ の関係に取っているがこれについては後述する。

図より、 $n_i^{(2)}+1=20$ の場合には \bar{n}_i+1 が 10 より大きくなると、また、 $n_i^{(2)}+1=40$ の場合には \bar{n}_i+1 が 20 より大きくなると妥当な解が得られなくなることがわかる。これは次のように説明できる。境界値問題の外力項は $O(\epsilon^2)$ ではストークス波成分 $\Pi_{mp}(x, z)$ である。この外力項の鉛直面における最も高次の振動成分は式(19)より $m=p=\bar{n}$ の場合の $Z(k\bar{n}z_i) = \cos 2k\bar{n}(z+h) / \cos 2k\bar{n}h$ で与えられ、 $2k\bar{n}$ までの振動成分を含む。したがって、外力項 $\Pi_{mp}(x, z)$ によって励起される自由波の停止散乱波成分は、少なくとも $2k\bar{n}$ 以上の振動成分を含むように打ち切り項数 $n^{(2)}$ を取っておかなければならないことによる。すなわち、 $O(\epsilon^2)$ の計算においては自由波を表す級数項の打ち切り項数 $n_i^{(2)}$ とストークス波成分 $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定に用いる一次解の項数 \bar{n}_i を $n_i^{(2)} \geq 2\bar{n}_i$ の関係が満足されるように取らねば妥当な解が得られない。

上述の条件と選点解法における (a) (b) の条件 (2. (4) 参照) より、 $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定に用いる一次解の項数 \bar{n}_i+1 、級数の打ち切り項数 $n_i^{(2)}$ 、計算点の個数は、

相互に次に述べる関係を満足すべきことになる。

Δs を計算点間隔とすると、 h_2 と $h-h_2$ が $\Delta s/2$ の偶数倍となる計算点配置の場合には (図-2 参照)、任意の h_2 の値に対して計算点の個数 $N_1^{(2)}$, $N_2^{(2)}$ が取り得る値の組は次式で与えられる値に限定される。

$$N_1^{(2)} = p\alpha, \quad N_1^{(2)} + N_2^{(2)} = p\beta \dots \dots \dots (56)$$

ただし、 α, β は h_2/h を共通の約数をもたない整数の比 α/β で表した場合の整数値で、 p は正の整数値 ($=1, 2, 3, \dots$) である。計算点の個数と級数の項数は同じに取るから、先述の $n_i^{(2)} \geq 2\bar{n}_i$ の関係は領域 (1), (2) についてそれぞれ次式のように書ける。

$$n_1^{(2)} + 1 = N_1^{(2)} + N_2^{(2)} \geq 2\bar{n}_1 + 1 \dots \dots \dots (57)$$

$$n_2^{(2)} + 1 = N_1^{(2)} \geq 2\bar{n}_2 + 1 \dots \dots \dots (58)$$

したがって、いずれか一方の領域において $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定に用いる一次解の項数 \bar{n}_i+1 を与えると、その領域に対応する不等式 (式 (57) あるいは式 (58)) を満足し、かつ最小の計算点の個数を与える整数 p が式 (56) より決まり、計算点の個数 $N_1^{(2)}$ と $N_2^{(2)}$ が決まる。残りの領域における項数 \bar{n}_i+1 はもう一方の不等式を満足するように決められる。なお、 h_2 と $h-h_2$ が $\Delta s/2$ の奇数倍となる計算点配置の場合 (図-1 参照) には式 (56) に代えて次式を用いる。

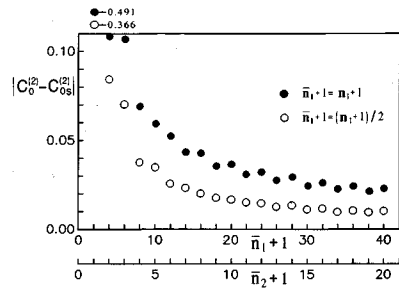
$$N_1^{(2)} = (p\alpha + 1)/2, \quad N_1^{(2)} + N_2^{(2)} = (p\beta + 2)/2 \dots \dots \dots (59)$$

上述の関係は、図-1 のように領域の数が 2 つ以上であっても同様に成り立ち、任意の領域において $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定に用いる一次解の項数 \bar{n}_i+1 を与えるとそれに応じて各境界の計算点の個数 (最小値) および残りの領域における \bar{n}_i+1 を決めることができる。

図-4 に示した結果は ($h_2/h = \alpha/\beta = 1/2$) の場合で、このとき $N_1^{(2)} = p$, $N_1^{(2)} + N_2^{(2)} = 2p$ で、 $n_i^{(2)}+1$ は偶数であるから、式 (57) を満足する偶数の最小値として $n_i^{(2)}+1 = 2(\bar{n}_i+1)$ に取り、 \bar{n}_i+1 が奇数が偶数かに応じて、式 (58) を満足するように、 $2\bar{n}_2+1 = \bar{n}_1+1$ か $2\bar{n}_2+2 = \bar{n}_1+1$ に取ればよい。打ち切り項数 $n_i^{(2)}$ を必要以上に大きく取っても、項数が $2\bar{n}_i+1$ を越えるところの係数値

表一 二次のポテンシャルの収束の様子

$kh=1.0$		$h_2/h=0.5$		$n_1+1=300$		$n_2+1=150$	
$n_1^{(2)}$	n_1+1	$\sum D_n^{(2)}$		$\sum \Pi_{1mp}(0,0)$		$ \phi_1^{(2)} $	
		Real	Imaginary	Real	Imaginary		
4	4	-0.945E+00	-0.261E+01	0.132E+01	0.219E+01	0.5609	
8	8	0.403E-01	-0.792E+01	0.237E+00	0.726E+01	0.7090	
12	12	0.131E+01	-0.152E+02	-0.105E+01	0.146E+02	0.5980	
16	16	0.338E+01	-0.237E+02	-0.309E+01	0.231E+02	0.6888	
20	20	0.576E+01	-0.339E+02	-0.552E+01	0.333E+02	0.6156	
32	32	0.159E+02	-0.715E+02	-0.156E+02	0.709E+02	0.6741	
44	44	0.294E+02	-0.120E+03	-0.291E+02	0.119E+03	0.6315	
56	56	0.463E+02	-0.177E+03	-0.459E+02	0.176E+03	0.6668	
68	68	0.655E+02	-0.243E+03	-0.657E+02	0.242E+03	0.6365	
80	80	0.886E+02	-0.318E+03	-0.883E+02	0.317E+03	0.6665	
$n_2^{(2)}$	n_2+1	$\sum C_n^{(2)}$		$\sum \Pi_{2mp}(0,0)$		$ \phi_2^{(2)} $	
		Real	Imaginary	Real	Imaginary		
2	2	0.838E+00	0.209E+01	-0.383E+00	-0.257E+01	0.6583	
4	4	0.204E+01	0.518E+00	-0.184E+01	-0.118E+01	0.6893	
6	6	0.467E+01	-0.265E+01	-0.436E+01	0.211E+01	0.6238	
8	8	0.757E+01	-0.740E+01	-0.733E+01	0.678E+01	0.6733	
10	10	0.112E+02	-0.136E+02	-0.108E+02	0.130E+02	0.6317	
16	16	0.243E+02	-0.393E+02	-0.240E+02	0.387E+02	0.6637	
22	22	0.408E+02	-0.745E+02	-0.405E+02	0.739E+02	0.6401	
28	28	0.600E+02	-0.118E+03	-0.598E+02	0.117E+03	0.6591	
34	34	0.818E+02	-0.169E+03	-0.816E+02	0.168E+03	0.6428	
40	40	0.106E+03	-0.226E+03	-0.106E+03	0.225E+03	0.6594	



図—6 一次解の項数と解の精度 ($kh=1.0$)

はほぼ0となり、計算量が増えるだけで精度の向上には寄与しない（次節図—5参照）。

c) $O(\epsilon^2)$ の数値解

$O(\epsilon^2)$ のポテンシャルの未定係数 $C_n^{(2)}$ の例を、図—5に示した。級数の項数 $n_2^{(2)}+1$ を40に取り、ストークス波の2倍周波数成分項の算定に用いる一次解の項数 $\bar{n}_2+1=10, 20$ に対応する係数値をそれぞれ○と×印で示している。前節で述べたように○印は $O(\epsilon^2)$ の級数項を必要以上に大きく取った場合に当たる。図より、係数値が単調に減少する $O(\epsilon)$ の場合とは逆に係数値は増大し、 $O(\epsilon)$ の係数にみられるような、 n の特定の間隔ごとの係数どうしが大きさが等しくかつ逆位相となる関係はみられない。 $\bar{n}_2+1=10$ の場合、前節で述べたように、 n が $2\bar{n}_2+1(=19)$ を越えると係数値は数値計算上はほぼ0の値を取る。ここには示していないが、係数 $D_n^{(2)}$ についても同じである。

このような係数の特性より、これらの係数から成る二次のポテンシャルの級数は発散して収束しないように思われるが、打ち切り項数 $n_1^{(2)}$ が大きくなるのに対応して一定値に収束することが数値計算の結果より推測される。これを表—1に示した。表は、原点における、領域(1)のポテンシャル関数 $\phi_1^{(2)}(0, 0)$ と領域(2)のポテンシャル関数 $\phi_2^{(2)}(0, 0)$ 、

$$\phi_1^{(2)}(0, 0) = \sum_{n=0}^{n_1^{(2)}} D_n^{(2)} + \sum_{m=0}^{\bar{n}_1} \sum_{p=0}^{\bar{n}_1} \Pi_{1mp}(0, 0)$$

$$\phi_2^{(2)}(0, 0) = \sum_{n=0}^{n_2^{(2)}} C_n^{(2)} + \sum_{m=0}^{\bar{n}_2} \sum_{p=0}^{\bar{n}_2} \Pi_{2mp}(0, 0)$$

の、自由波の項とストークスの2倍周波数成分の項、および両者の和であるポテンシャル関数 $\phi_1^{(2)}, \phi_2^{(2)}$ を、それぞれ打ち切り項数 $n_1^{(2)}, n_2^{(2)}$ に対して示したもので、上式よりわかるように、 $\phi^{(2)}$ の値は、未定係数からなる無限級数の部分和を表している。表より、自由波を表す第1項目の級数項とストークスの2倍周波数成分を表す

第2項目の二重級数項は、 n が大きくなるとともに、どちらも単調に増大するが、両者は相殺しあって、 $\phi^{(2)}$ 自身は一定値に収束することがわかる。

d) $O(\epsilon)$ の解による $O(\epsilon^2)$ の解の変動

前節までの検討では、 $O(\epsilon)$ の解には厳密解（打ち切り項数を計算機容量が許す限り大きく取った解）を用い、 $O(\epsilon^2)$ の級数の打ち切り項数も比較的大きく取って種々の検討を行った。 $O(\epsilon)$ の解に厳密解を用いる場合には、図—4に示したように、 $\Pi_{mp}(x, z)$ の算定に用いる一次解の項数 \bar{n}_1+1 が10項程度以上であれば係数値の変動は小さく安定した解が得られる。しかし、具体的な構造物を対象に解析を行う場合にも厳密解を用いるのは、計算機の容量や計算時間が大きくなり、実際には、必要十分な精度の解が得られる範囲で、できるだけ少ない計算量の解析を行うのが効率的である。

いま、 $O(\epsilon^2)$ の計算で外力項となるストークスの2倍周波数成分項 $\Pi_{mp}(x, z)$ の、係数 $C_m C_p, D_m D_p$ にかかる係数 $\lambda(k_m, k_p)/\mu_1(k_{mp})$ は式(14)と式(21)を代入して若干の変形を行うと次式のように書き表せる。

$$-\frac{i}{2k\Gamma} \left\{ \frac{\Gamma^2 k_p (k_m - k_p) + k_m k_p^2 (2k_m + k_p) - 3\Gamma^4}{4\Gamma^2 + (k_m - k_p)^2} \right\}$$

これは $m=p$ のとき次の最大値を取る。

$$-\frac{3i}{8k\Gamma^3} (k_m^4 - \Gamma^4)$$

特定の入射波に対して、 k, Γ は一定で、 m が大きくなると k_m は $m\pi$ で近似されるから、 $\lambda(k_m, k_m)/\mu_1(k_{mm})$ は m^4 のオーダーで大きくなる。したがって、厳密解を用いない場合、すなわち、 $O(\epsilon)$ の解の項数を小さく取って計算を行う場合、図—3に示したような、打ち切り項数近くで大きくなる厳密解との差異や、打ち切り項数 n_i の違いによる未定係数値の差異が Π_{mp} の算定に、ひいては $O(\epsilon^2)$ の解に大きく影響することが考えられ、これについて検討しておく必要がある。

このため、いくつかの異なる打ち切り項数の一次解について、係数 $C_0^{(2)}$ の \bar{n}_1+1 に対する変動を調べ、厳密解 ($C_0^{(2)}$ で表す) に対する $C_0^{(2)}$ の偏差の大きさを図—6に示した。異なる打ち切り項数の一次解に対して、 Π_{mp}

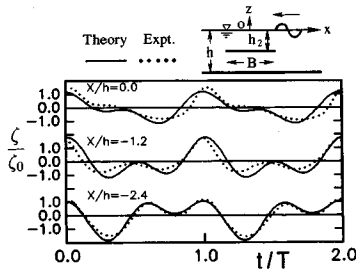


図-7 没水水平版近傍の水面変動, $B/h=2.0$, $h_2/h=0.25$, $kh=1.57$, $\zeta_0/h=0.036$

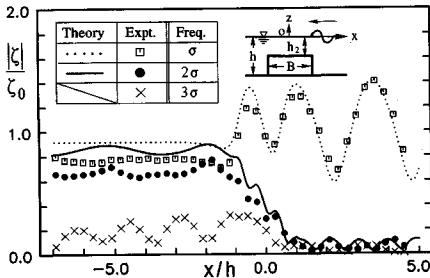


図-8 矩形潜堤近傍の波高分布, $B/h=2.0$, $h_2/h=0.5$, $kh=1.26$, $\zeta_0/h=0.038$

の算定に一次解の係数全部を用いる場合 ($\bar{n}_1+1=n_1+1$) を●印で、一次解の係数の半分を用いる場合 ($\bar{n}_1+1=(n_1+1)/2$) を○印で示している。比較のために用いる係数 $C_{0s}^{(2)}$ の厳密解 $C_{0s}^{(2)}$ は、図-4の○印で示す $n_1^{(2)}+1=60$ で $\bar{n}_1+1=24, 26, 28, 30$ の場合の解4個の平均を用いた。図より、 \bar{n}_1+1 が大きくなるにつれて、両者とも偏差は減少するが、同じ \bar{n}_1+1 の値について比較すると、 $O(\epsilon)$ の解の係数全部を用いる場合の方が、 $O(\epsilon)$ の解の項数を2倍に取り、その係数の半分を用いる場合に比べて厳密解 $C_{0s}^{(2)}$ との偏差が大きい。また、 $O(\epsilon)$ の解の項数を同じに取り、その全部を用いる場合と、その半分の係数を用いる場合 (たとえば、 $\bar{n}_1+1=20$ の●印と $\bar{n}_1+1=10$ の○印) を比較しても、半分を用いた方がわずかながら常に偏差が小さく、 Π_{mp} の算定に用いる $O(\epsilon)$ の係数は、打ち切り項数近傍で $O(\epsilon)$ の厳密解との差異が大きくなる影響が入らないように、高次の項を除いて用いる方が精度のよい解が得られることがわかる。

高次の項を除く場合、係数の半分ほども除くことは必ずしも必要でなく、一次解の項数に応じて、高次の項を5から10項程度除けば同程度の精度が得られる。ただ、用いる項数を一次解の半分 (かそれ以下) とすると、式(57)および(58)より最小限必要な $O(\epsilon^2)$ の計算点の個数は $O(\epsilon)$ の計算点の個数と同じ (かそれ以下) でよく、このときは両者を同じに取ることができて便利である。以上のことより、 $O(\epsilon^2)$ の解を用いてさらに高

次のオーダーの解析を行うことを考えない場合には、 $O(\epsilon^2)$ の解とその厳密解との偏差は数%程度以下であれば (微小量 ϵ が高々0.1程度の値であることを考慮すると) 十分な精度であるといえるから、 n_1+1 を10から20項程度に取り、 Π_{mp} の算定にはその半分の5から10項程度を取ればよい。

(2) 実験による理論解の検証

理論解の検証を行うため、水槽実験を行って矩形堤体と没水水平版堤体近傍の水面変動を測定して理論解と比較した。実験には九州大学水工土木学科の波吸収機能をもつ造波装置を備えた造波水槽 (深さ0.5 m, 幅0.3 m, 長さ28 m) を使い、水深 h を0.35 mに取り、水路中央付近に堤体を設置して、容量式波高計により、造波板前方3 mで入射波高を測定し、0.105 m間隔に取った計43個の測点で、堤体中心から前方1.58 m, 後方2.84 mの範囲の水面変動を測定した。各測点においては、水路端および造波板からの反射が入る前の水面変動を、サンプリング間隔50 msで、個数300から400個をデジタルデータレコーダーに記録した。図-7は水平版について、堤体中心から通過側の測点における水面変動の時系列を比較したもので、実線が理論値、点線が実験値を表している。図-8は矩形潜堤について、各測点における水面変動の時系列データを、データ長512個でフーリエ解析を行った後、角周波数 σ および 2σ 近傍のフーリエ係数について、それぞれ2乗平均を求め、それらを入射波の振幅で除して理論式中の $\eta_1^{(1)}$ と $\eta_2^{(2)}$ に対応する実験値を算定し、これを理論解と比較した結果である。図中、点線が一次、実線が二次の理論値を表し、□が一次、●が二次の実験値を表している。なお、図中の×印は 3σ の水面変動の実験値である。これらの比較より、理論値は実験値と非常に良く一致しており、本文で示した解析法は妥当な解を与えているといえる。ただ、ストークス波の適用限界²⁰⁾を考慮した本解析法の適用性についてはさらに詳細な実験との比較が必要で、これについてはまた、別の機会に報告したい。

4. あとがき

ポテンシャル接続法を用いた、有限振幅波 (ストークス波) に関する波動境界値問題の解析法を示した。これは、固有関数の直交性を利用する従来の解法に代えて、著者らが示したきわめて簡潔な解法 (選点解法) を用いることによって実質的に可能となったものである。

本解析法の特長は、 $[\partial\phi/\partial x]^2$ や $[\partial\phi/\partial z]^2$ の非線形量が差分によらず理論的に得られることで、境界要素法や有限要素法などの離散化手法を用いる有限振幅波の解析では必ず生じる差分誤差の影響が全くなく、きわめて精度のよい解が得られる。このため、さらに高次のオーダーの解析に拡張することも十分可能である。また、前記の

離散化手法に比べて計算機の容量や計算時間が少なく済む。

本文では、理論式の展開と数値計算上の留意点および理論解の検証について述べるにとどまったが、種々の構造物への応用は容易である。

最後に、本研究は文部省科学研究費一般C(課題番号02650364, 代表:吉田明德)の補助を受けた。記して謝意を表す。

参考文献

- 1) Faltinsen, O.M. : A Numerical Nonlinear Method of Sloshing in Tanks with Two-Dimensional Flow, *J. Ship Research*, Vol.22, No.3, pp.193~202, 1978.
- 2) 滝川 清・田淵幹修:有限要素法による波動解析について(第1報),第25回海岸工学講演会論文集, pp.28~32, 1978.
- 3) Iijima, T. and Nagata, S. : Numerical Analysis of Tranjent Finite Amplitude Waves by Boundary Integral and Perturbation Expansion, *Coastal Engineering in Japan*, Vol.23, pp.25~44, 1980.
- 4) Isaacson, M. S. : Nonlinear-wave effects on fixed and floating bodies, *J. Fluid Mech.*, Vol.120, pp.267~281, 1982.
- 5) Kim, S. K., Liu, P. L-F. and Liggett, J. A. : Boundary Integral Equation Solutions for Solitary Wave Generation, Propagation and Run-Up, *Coastal Engineering*, Vol.7, pp.299~317, 1983.
- 6) 大山 巧:境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析,第32回海岸工学講演会論文集, pp.555~559, 1985.
- 7) 安田孝志・原 正典・田中光宏:ステップおよび潜堤を通過する孤立波の変形と破波指標, *海岸工学論文集*, 第36巻, pp.51~55, 1989.
- 8) Potash, R. L. : Second-order theory of oscillating cylinders, *J. Ship Research*, Vol.15, No.4, pp.295~324, 1971.
- 9) 経塚雄策:二次元物体に働く非線形流体力について(第1報散乱問題), *日本造船学会論文集*, 第148号, pp.45~53, 1980.
- 10) 喜岡 渉:クノイド波による回折波波力の算定方法とその適用性について,第35回海岸工学講演会論文集, pp.617~621, 1988.
- 11) 吉田明德・村上啓介・小島治幸・鶴本良博:グリーン公式による有限振幅波の定常境界値問題解析法, *海岸工学論文集*, 第36巻, pp.469~473, 1989.
- 12) Orlandi, I. : A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, *J. Computational Physics*, Vol.21, pp.251~269, 1976.
- 13) Larsen, O. and Dancy, H. : Open boundaries in short wave simulations—a new approach, *Coastal Engineering*, Vol.7, pp.285~297, 1983.
- 14) 日野幹雄・灘岡和夫:共形変換を用いた任意断面地形上の波動場の解析法—非線形波動の場合—,第31回海岸工学講演会論文集, pp.108~112, 1984.
- 15) 浜中健一郎・日比康生・佐伯 浩:高次の自由波を考慮した波の浅水変形について,第33回海岸工学講演会論文集, pp.119~122, 1986.
- 16) 井島武士:最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用,1971年度水工学に関する夏期研究会講義集
- 17) Massel, S. R. : Harmonic generation by waves propagating over a submerged step, *Coastal Engineering*, Vol.7, pp.357~380, 1983.
- 18) 吉田明德・小島治幸・鶴本良博:波動境界値問題におけるポテンシャル接続法の選点解法, *土木学会論文集*, 第417号/II-13, pp.265~274, 1990.
- 19) 吉田明德・小島治幸・鶴本良博:ポテンシャル接続法(選点解法)による有限振幅波の境界値問題解析法, *海岸工学論文集*, 第37巻, pp.519~523, 1990.
- 20) 堀川清司・西村仁嗣・磯部雅彦:有限振幅波理論の適用範囲について,第24回海岸工学講演会論文集, pp.10~14, 1977.

(1990.9.28 受付)

A NUMERICAL NONLINEAR SOLUTION OF WAVES-STRUCTURE INTERACTIONS WITH COLLOCATION METHOD OF MATCHED EIGENFUNCTION EXPANSIONS

Akinori YOSHIDA, Haruyuki KOJIMA and Yoshihiro TSURUMOTO

A numerical method for the study of interaction between Stokes-second-order waves and structures is presented. It uses the method of matched eigenfunction expansions of velocity potentials. The present method has two distinctive features: (1) the differentiations of the physical quantities are obtained theoretically; thus it is free from errors caused by numerical differentiation which is unavoidable in other methods using discretization technique such as Boundary Element Method and Finite Element Method, (2) the collocation matching instead of the conventional matching in the method of matched eigenfunction expansions is used, which excludes tedious evaluation of the integrals related to the eigenfunctions; thus the theoretical formulation and the computer programming become extremely simple. Detailed explanations on numerical calculations are described. Comparisons of the numerical results with the experimental ones are also shown.