

# 浮遊砂の横断方向拡散係数について

池田駿介\*・泉 典洋\*\*

樹木や杭が片岸側にある場合について、水深平均流速分布ならびに浮遊砂濃度分布に関する理論解析を行い、横断方向拡散係数を求める方法を示した。この方法に従い、幅 1 m の水路を用いて拡散係数を測定した。さらに、河岸のような側斜面の場合についても同様な解析を行い、幅 50 cm の水路を用いて拡散係数を求めた。以上の結果、いずれの場合も鉛直方向の拡散係数は  $0.08 u_* D$  程度であり、横断方向拡散係数は  $0.23 u_* D$  程度となることを示した。

**Keywords** : diffusion coefficients, laboratory tests, lateral velocity gradient, suspended sediment

## 1. 序 論

近年、複断面水路あるいは植生のある場の土砂水理や砂床河川の形成機構など浮遊砂の横断方向輸送が支配的な要素となっている水理現象が注目をあびている。このような流れ場では横断方向の流速差に起因する浮遊砂の濃度差が生じ、そのために横断方向への拡散型輸送が発生する。この輸送量を知ることは、高水敷、杭出し水制あるいは植生群中の土砂堆積の見積りや砂床河川の横断形状を求めるうえで不可欠であるが、従来、開水路横断方向への拡散型輸送の研究は運動量（たとえば、山崎ら<sup>1)</sup>、田中ら<sup>2)</sup>、泉ら<sup>3)</sup>、福岡・藤田<sup>4)</sup>）、および溶解性物質（たとえば、Elder<sup>5)</sup>、Sayre・Chang<sup>6)</sup>、Okoye<sup>7)</sup>、Fischer・Hanamura<sup>8)</sup>、Lau・Krishnappan<sup>9)</sup>、Webel・Schatzmann<sup>10)</sup>）に限られており、浮遊砂については鉛直方向の拡散係数については数多くの研究があるものの、横断方向については著者の知る限り皆無であり、運動量や溶解性物質の結果を準用している。

これらの従来の研究により、運動量および溶解性物質ともに鉛直方向拡散係数よりも横断方向拡散係数の方が大きくなることが知られている。たとえば、Fischer<sup>11)</sup> は溶解性物質について測定値の取りまとめを行っているが、これによれば、鉛直方向の乱流拡散係数は

$$\varepsilon_z = 0.067 u_* D \dots \dots \dots (1)$$

である。ここに、 $u_*$  は摩擦速度、 $D$  は水深である。Okoye<sup>7)</sup> は直線水路を用いた実験により、 $\varepsilon_z / u_* D$  は水路幅／水深の関数となり、このアスペクト比が大きくなるにつれて、 $\varepsilon_z / u_* D$  の値は若干増加することを見出している。これに対し、横断方向の乱流拡散係数は、実験室で行っ

た各研究者の測定値について

$$\varepsilon_y = (0.08 \sim 0.179) u_* D \dots \dots \dots (2)$$

となっている（平均値は  $0.135 u_* D$ ）。

運動量の横断方向拡散係数、 $\varepsilon_{my}$  の測定結果によれば、 $\varepsilon_{my}$  の値もやはり  $u_* D$  に比例し、 $\varepsilon_{my} / u_* D$  の値は抵抗係数や横断方向流速差、アスペクト比の関数となることが知られている（Webel・Schatzmann<sup>10)</sup>、田中ら<sup>2)</sup>、泉ら<sup>3)</sup>）。

以上のように、運動量および溶解性物質の横断方向拡散係数は  $u_* D$  に比例し、その比例係数は水路のアスペクト比、抵抗係数（すなわち粗度）、鉛直平均流速の横断方向流速差などの関数となることがわかる。これは、このような諸量により、乱れの構造が規定されているためであると考えられる。

本研究は、従来測定例がないために運動量や溶解性物質の拡散係数を準用していた浮遊砂の横断方向拡散係数を実験水路において測定することを目的としている。実験は（1）植生や杭出し水制のように物体の抗力が存在することにより流体の流速や底面せん断力が減少し、横断方向への浮遊砂濃度勾配が発生する場合と、（2）河岸の側斜面のように水深が減少することにより流速や底面せん断力が減少し、濃度勾配が発生する場合に分けて実験を行う。この理由は前述のように、乱れの構造が境界条件により異なっていると考えられるためである。

## 2. 横断方向拡散係数導出のための理論的考察

### （1）樹木や杭の場合

このような場合には流れは第 1 近似として平面二次元流として取り扱える（たとえば、文献 1）、2）。ここでは抗力による流速減少に起因する濃度勾配に伴う横断方向拡散を抽出するために底面は横断方向に水平とし、樹木や杭はそれらが存在している場では均一に配置されているものとする（図-1）。また、流れは等流条件を満足しているものとする。このとき、力の釣合い式は

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科  
(〒152 目黒区大岡山 2-12-1)

\*\* 学生会員 工修 アメリカ合衆国ミネソタ大学大学院博士課程

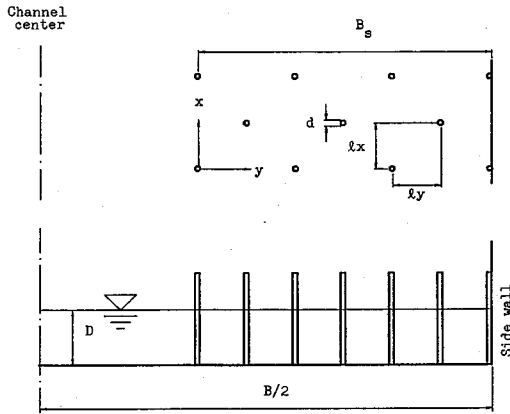


図-1 樹木や杭群の配置と座標系

a) 樹木または杭群外

$$\rho g D S + \rho \epsilon_{m\nu} D \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \rho C_f \bar{u}^2 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

b) 樹木または杭群内

$$\rho g D S + \rho \epsilon_{m\nu} D \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \rho C_f \bar{u}^2 - \rho C_D a D \frac{\bar{u}^2}{2} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\rho$  は水の密度、 $g$  は重力の加速度、 $S$  は水面勾配、 $\bar{u}$  は鉛直平均流速、 $y$  は上記領域の境界から群内向きにとった横断方向座標 (図-1 参照)、 $C_f$  は摩擦抵抗係数 ( $= (u_* / \bar{u})^2$ )、 $C_D$  は樹木または杭の抗力係数、 $a = d / (2l_x l_y)$ 、 $d$  は樹木または杭の直径、 $l_x, l_y$  はこれらの流れ方向、横断方向の間隔である。群から十分離れた領域では

$$\rho g D S = \rho C_f \bar{u}^2 \dots\dots\dots (5)$$

となる。式 (5) を用いて、式 (3)、(4) を無次元化すれば

$$1 + \nu \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} - \phi^2 = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$1 + \nu \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} - (1 + \chi) \phi^2 = 0 \dots\dots\dots (7)$$

となる。ここに、 $\nu = \epsilon_{m\nu} D / C_f \bar{u}_\infty B^2$ 、 $\phi = \bar{u} / \bar{u}_\infty$ 、 $\eta = y / B$ 、 $\chi = C_D a D / 2 C_f$ 、 $\bar{u}_\infty$  は群から十分離れた領域における鉛直平均流速、 $B$  は流路幅である。前にも述べたように  $\epsilon_{m\nu}$  は  $u_* D$  に比例すると考えられるので比例係数を  $\alpha$  とおくと

$$\epsilon_{m\nu} = \alpha u_* D \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) を用いて、 $\nu$  を書き直すと  $C_f = (u_* / \bar{u})^2 = (u_{* \infty} / \bar{u}_\infty)^2$  を用いて

$$\nu = \frac{\alpha}{\sqrt{C_f}} \left( \frac{D}{B} \right)^2 \dots\dots\dots (9)$$

となる。前述のように  $\alpha \sim O(0.1)$ 、 $C_f \sim O(0.01)$  であるので、 $\nu$  の値は一般に非常に小さい値をとると考えられる。したがって、 $\nu$  を微小パラメーターとして漸近

展開を次のように行う。

$$\phi = \phi_0 + \nu \phi_1 + \dots\dots\dots (10)$$

しかし、式 (10) を式 (6)、(7) に代入し、各オーダーの解を求めても、境界 ( $y=0$ ) でうまく接合する解を誘導することはできない。これは、境界近傍では式 (6)、(7) 中の拡散項が他の項とオーダーが同程度となっているためであり、このような場合は特異摂動法を用いて各項のオーダーが等しくなるよう新しい内部変数を導入する必要がある (詳しくは文献3) 参照)。この場合、適切な内部変数  $p$  は

$$p = \eta / \sqrt{\nu} \dots\dots\dots (11)$$

であり、式 (11) を用いて式 (6)、(7) を書き直し、再び式 (10) を代入して各オーダーの解を求めればよい。この境界条件は  $p = -\infty$  で  $\phi = 1$  および  $p = 0$  で  $\phi$  および  $d\phi/dp$  がそれぞれの領域で得られた解について一致することである。オーダー  $\nu$  までについての解は以下のようなになる。

a) 樹木または杭群外

$$\phi = 1 - (1 - J) \exp\left(\sqrt{\frac{2}{\nu}} \eta\right) \dots\dots\dots (12)$$

b) 樹木または杭群内

$$\phi = J \left[ J + (1 - J) \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\nu}} \frac{\eta}{J}\right) \right] \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $J = 1 / (1 + \chi)^{1/4}$  である。

次に横断方向拡散係数  $\epsilon_{m\nu}$  が式 (2) や式 (8) のように  $u_* D$  に比例するとおけることについて考察する。ここで取り扱っているような流れは、底面によって規定される壁乱流と横断方向の流速差に基づく自由乱流によって構成される複雑な乱流場である。前者の壁乱流による運動量拡散係数は  $u_* D$  に比例することは周知の事実である。本研究では鉛直平均した平面二次元流としての取り扱いを行っているので、後者の自由乱流として取り扱うことが妥当と考えられる。このような考え方はすでに山崎ら<sup>1)</sup>によって提案されている。彼らは、Prandtl の自由乱流の仮説から、

$$\epsilon_{m\nu} = \gamma \delta_{dis} (\bar{u}_\infty - \bar{u}_{p\infty}) \dots\dots\dots (14)$$

と置いている。ここに、 $\gamma$  : 比例定数、 $\delta_{dis}$  : 排除厚さ、 $\bar{u}_{p\infty}$  : 杭群内に十分はいた地点における鉛直平均流速 ( $= \bar{u}_\infty / (1 + \chi)^{1/2}$ ) である。式 (14) の値をここで求めた流速分布から見積る。排除厚さは定義から

$$\delta_{dis} = \frac{1}{\bar{u}_j - \bar{u}_j} \int_{-\infty}^0 (\bar{u}_\infty - \bar{u}) dy + \frac{1}{\bar{u}_j - \bar{u}_{p\infty}} \int_0^\infty (\bar{u} - \bar{u}_{p\infty}) dy \dots\dots\dots (15)$$

である。ここに、 $\bar{u}_j$  : 杭群境界 ( $\eta = 0$ ) における鉛直平均流速 ( $= \bar{u}_\infty / (1 + \chi)^{1/4}$ ) である。式 (12)、(13) を代入して、 $\delta_{dis}$  を求めると

$$\delta_{dis} = \sqrt{\nu/2} (1 + J) B \dots\dots\dots (16)$$

となる。以上の値を式 (14) に代入し、式 (16) 中の  $\nu = \epsilon_{my} D / C_f \bar{u}_\infty B^2$ ,  $C_f = (u_{*0} / \bar{u}_\infty)^2$  などに注意して、 $\epsilon_{my}$  を求めると、

$$\epsilon_{my} = \frac{\gamma^2}{2C_f^{1.5}} (1-J)^2 (1+J)^4 u_{*0} D \dots\dots\dots (17)$$

となる。式 (17) は式 (8) と同形であり、 $\alpha$  は理論上、 $C_f$  や  $J$  などの関数となっている。以上から、自由乱流の仮説から出発しても、横断方向拡散係数は鉛直方向拡散係数と同様に  $u_* D$  に比例する形式で表現できることが明らかとなった。

次に横断方向濃度分布を求める。平衡状態にある浮遊砂の拡散方程式は

$$\epsilon_{sy} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = -\epsilon_{sz} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - v_s \frac{\partial c}{\partial z} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 $c$  は浮遊砂濃度、 $\epsilon_{sy}$ ,  $\epsilon_{sz}$  はそれぞれ  $y, z$  方向の浮遊砂拡散係数、 $v_s$  は浮遊砂沈降速度である。自由表面における境界条件

$$\left( \epsilon_{sz} \frac{\partial c}{\partial z} + v_s c \right) \Big|_{z=D} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

を考慮し、式 (18) を  $z=0$  から  $D$  まで積分すれば

$$\epsilon_{sy} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \epsilon_{sz} \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=0} + v_s c|_{z=0} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、

$$\zeta = \int_0^D c(z) dz \dots\dots\dots (21)$$

である。式 (20) の右辺第 1 項は底面からの巻き上げ量であり、次のように書ける。

$$\epsilon_{sz} \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=0} = -v_s E \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 $E$  は無次元巻き上げ量であり、完全な平衡状態にある場合には巻き上げ量と沈降量 ( $v_s c|_{z=0}$ ) が等しいことから  $E = c|_{z=0}$  となる。無次元巻き上げ量  $E$  はこのことを利用して平衡状態にある場合について数多くの測定が行われている。それらをまとめた結果によれば

$$E = K \left( \frac{u_*}{v_s} \right)^2 \dots\dots\dots (23)$$

となる<sup>3)</sup>。ここに、 $K$  は比例定数 ( $= 6.7 \times 10^{-5}$ ) である。次に式 (20) 右辺第 2 項の沈降量を見積る。ここで仮定しているように鉛直拡散係数が水深方向に一定である場合には、浮遊砂濃度の鉛直分布は

$$c = c|_{z=0} \exp\left(-\frac{v_s z}{\epsilon_{sz}}\right) \dots\dots\dots (24)$$

である。式 (24) を式 (21) に代入して、 $\zeta$  は

$$\zeta = \frac{\epsilon_{sz}}{v_s} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{v_s D}{\epsilon_{sz}}\right) \right] c \Big|_{z=0} \approx \frac{\epsilon_{sz}}{v_s} c \Big|_{z=0} \dots\dots\dots (25)$$

となる。ここに、式 (25) においては一般に  $v_s D / \epsilon_{sz} \gg 1$  であるので、[ ] 内第 2 項は無視している。したがって、沈降量は

$$v_s c|_{z=0} = \frac{v_s^2}{\epsilon_{sz}} \zeta \dots\dots\dots (26)$$

となる。式 (22), (26) を式 (20) に代入して、

$$\epsilon_{sy} \frac{d^2 \zeta}{dy^2} = -v_s K \left( \frac{u_*}{v_s} \right)^2 + \frac{v_s^2}{\epsilon_{sz}} \zeta \dots\dots\dots (27)$$

を得る。流速分布の場合と同様に境界 ( $y=0$ ) から十分離れた領域では巻き上げ量と沈降量は完全に平衡状態にあり、次式が成立する。

$$v_s K \left( \frac{u_{*0}}{v_s} \right)^2 = \frac{v_s^2}{\epsilon_{sz}} \zeta_\infty \dots\dots\dots (28)$$

式 (28) を用いて、式 (27) を無次元化すれば、濃度分布を支配する方程式が次のように得られる。

$$\lambda \frac{d^2 Z}{d\eta^2} = Z - \sigma \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 $\lambda = \epsilon_{sy} \epsilon_{sz} / v_s^2 B^2$ ,  $Z = \zeta / \zeta_\infty$ ,  $\sigma = (u_* / u_{*0})^2 = (\bar{u} / \bar{u}_\infty)^2$  である。 $\sigma$  はしたがって  $\phi$  に関する解から

$$\sigma = \phi_0^2 + 2\nu\phi_0\phi_1 + \dots\dots\dots (30)$$

により求まる。

式 (30) を式 (29) に代入すれば、境界条件、 $\eta=0$  で  $Z$  および  $dZ/d\eta$  がそれぞれの領域の解について一致する条件、の下で直ちに解が求まる。結果は、

a) 樹木または杭群外

$$Z = 1 + W_0 \exp\left(\frac{\eta}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{2\nu(J-1)}{2\lambda-\nu} \exp\left(\sqrt{\frac{2}{\nu}} \eta\right) - \frac{\nu(1-J)^2}{8\lambda-\nu} \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{\nu}} \eta\right) \dots\dots\dots (31)$$

b) 樹木または杭群内

$$Z = J^4 + W_1 \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{2\nu J^5(1-J)}{2\lambda-\nu J^2} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\nu}} \eta\right) - \frac{\nu J^4(1-J)^2}{8\lambda-\nu J^2} \exp\left(-2\sqrt{\frac{2}{\nu}} \eta\right) \dots\dots\dots (32)$$

である。ここに

$$W_0 = -\frac{1-J}{2} [(J+1)(J^2+1) + \frac{2}{\omega-1} - \frac{2J^4}{\omega+J} - \frac{1-J}{2\omega-1} - \frac{J^3(1-J)}{2\omega+J}] \dots\dots\dots (33)$$

$$W_1 = \frac{1-J}{2} [(J+1)(J^2+1) - \frac{2}{\omega+1} + \frac{2J^4}{\omega-J} + \frac{1-J}{2\omega+1} + \frac{J^3(1-J)}{2\omega-J}] \dots\dots\dots (34)$$

$$\omega = \left(\frac{2\lambda}{\nu}\right)^{1/2}$$

である。

式 (31), (32) から  $\epsilon_{sy}$  を求めるには次のような手順による。1) 鉛直平均流速の横断方向分布から  $\nu$  を同定する。2) 浮遊砂の鉛直分布に式 (24) をあてはめ、分布形を最もよく表す  $\epsilon_{sz}$  を決定する。3) 鉛直積分浮遊砂濃度の横断方向分布に式 (31), (32) をあてはめ、分

布形を最もよく表す $\lambda$ を同定する。以上から、 $\epsilon_{sv}$ が求まる。

(2) 側斜面の場合

側斜面の場合には水深が水際線に向かって減少し、これに対応して底面せん断力も徐々に変化しており、したがって前の場合のように拡散項が支配的となる領域が形成されない。以上のことから(1)の場合のような方法で横断方向拡散係数を測定することはできず、他の方法を考える必要がある。ここでは、流れ方向の2断面において、断面内濃度分布を測定し、この差から横断方向拡散係数を導出する。この場合の浮遊砂の拡散方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x}(uc) + \frac{\partial}{\partial \xi}(vc) + \frac{\partial}{\partial \eta}(wc) = \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon_{sx} \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\epsilon_{s\xi} \frac{\partial c}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\epsilon_{s\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta}) - v_s \sin\theta \frac{\partial c}{\partial \xi} + v_s \cos\theta \frac{\partial c}{\partial \eta} \dots\dots\dots(35)$$

ここに、 $\xi, \eta$ は水際線から底面に沿う距離ならびに底面に直角上向きにとった座標、 $\theta$ は側斜面の傾きである(図-2参照)。いま、2次流成分( $v, w$ )は直線水路であり、かつ横断方向の傾きが緩やかであるので無視でき、また $x$ 方向の拡散は $\xi, \eta$ 方向への拡散に比べて小さく無視できるとし、 $\xi$ について0から $\xi_0, \eta$ について0から $\eta_0$ まで積分すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\xi_0} \int_0^{\eta_0} ucd\xi d\eta &= \int_0^{\eta_0} \epsilon_{s\xi} \frac{\partial c}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} d\eta - \int_0^{\xi_0} (\epsilon_{s\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \\ &\quad - \epsilon_{s\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0}) d\xi \\ &\quad - v_s \sin\theta \int_0^{\eta_0} c \Big|_{\xi=\xi_0} d\eta \\ &\quad + v_s \cos\theta \int_0^{\xi_0} (c \Big|_{\eta=\eta_0} - c \Big|_{\eta=0}) d\xi \end{aligned} \dots\dots\dots(36)$$

となる。この誘導において、 $\xi=0$ で $c=0, \partial c/\partial \xi=0$ としている。いま、知りたい量は式(36)の右辺第1項に含まれる $\epsilon_{s\xi}$ である。すでに仮定しているように、 $\epsilon_{s\xi}$ を深さ方向に一定とし、積分と微分の順序を入れ替えれば、

$$\int_0^{\eta_0} \epsilon_{s\xi} \frac{\partial c}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} d\eta = \epsilon_{s\xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \int_0^{\eta_0} cd\eta \right) \Big|_{\xi=\xi_0} - c \Big|_{\eta=\eta_0} \tan\theta \right] \dots\dots\dots(37)$$

となる。水面においては、水面を横切る浮遊砂 flux はないので、次式が成り立つ。

$$\int_0^{\xi_0} \epsilon_{s\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} d\xi + \int_0^{\xi_0} v_s \cos\theta \cdot c \Big|_{\eta=\eta_0} d\xi = 0 \dots\dots\dots(38)$$

後述の側斜面の実験では、側斜面に沈降・堆積した浮遊砂は仕切り板後方から側斜面に向かって徐々に広がっていた。また、横断面内の流速分布は流下方向に変化しないので、実験開始から時間を十分にとり、側斜面に浮遊砂が堆積している状態であれば、底面においても、巻き上げ量と沈降量はほぼ釣り合っていると考えられるので、次式が成り立つ。

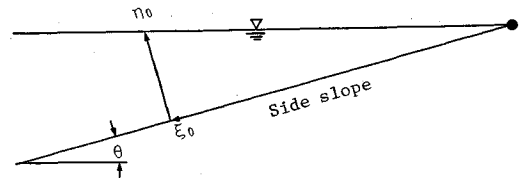


図-2 座標系の定義

$$\int_0^{\xi_0} \epsilon_{s\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} d\xi + \int_0^{\xi_0} v_s \cos\theta \cdot c \Big|_{\eta=\eta_0} d\xi = 0 \dots\dots\dots(39)$$

式(37)、(38)、(39)を式(36)に代入して、 $\epsilon_{s\xi}$ を求める式、

$$\epsilon_{s\xi} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\xi_0} \int_0^{\eta_0} ucd\xi d\eta + v_s \sin\theta \cdot \zeta}{\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - c \Big|_{\eta=\eta_0} \tan\theta} \dots\dots\dots(40)$$

を得る。ここに、 $\zeta$ は式(21)で表される積分浮遊砂濃度である。底面の傾き $\theta$ が小さい場合には式(40)は

$$\epsilon_{s\xi} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \approx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\xi_0} \int_0^{\eta_0} ucd\xi d\eta \dots\dots\dots(41)$$

と近似される。ただし、本論文では、式(40)を用いて横断方向拡散係数を求めた。

3. 実 験

樹木や杭の場合の実験には長さ12m、幅1mの循環式可変勾配水路を、側斜面の場合には長さ15m、幅0.5mの流れ込み式可変勾配水路を用いた。流速測定には直径3mmの小型プロベラ流速計および側斜面の場合にはピトー管を用い、浮遊砂として $d_{50}=0.145$ mm、 $d_{34}/d_{16}=3.3$ の細砂を用いた。浮遊砂濃度の測定には先端を流れ方向に向けた細い銅管を7本鉛直方向に1cm間隔で配置し、これらを移動させて各点で砂粒子を含んだ水を採取し、炉で乾燥させた後、精密天秤で重量を測定する方法を用いた。採水量は通常200ccとしたが、浮遊砂濃度が小さい場合には500cc程度の採水を行った。以下におのおの場合について実験方法、結果等を記す。

a) 樹木や杭の場合

図-1を参照して、直径5mm、長さ10cmの木製円柱を $l_x=l_y=5$ cmで千鳥状に配列し、杭群とした。杭群は水路片側に幅30cm、流下方向に10mにわたって設置した。水路底面には等流状態が得られやすいように $d_{50}=1.1$ mmの粗砂を貼り付けた。測定は等流条件が流れが十分発達した上流端から7mの断面で行われた。流速の測定は鉛直方向に5mm間隔で、横断方向には流速の変化が大きい箇所では2cm間隔で、それ以外は5cm間隔で測定を行った。流速の測定は固定床状態で行い、これらが終了した後、前述の細砂を混入させた。このとき、浮遊砂量が過剰になると水路床に沈殿し、砂漣

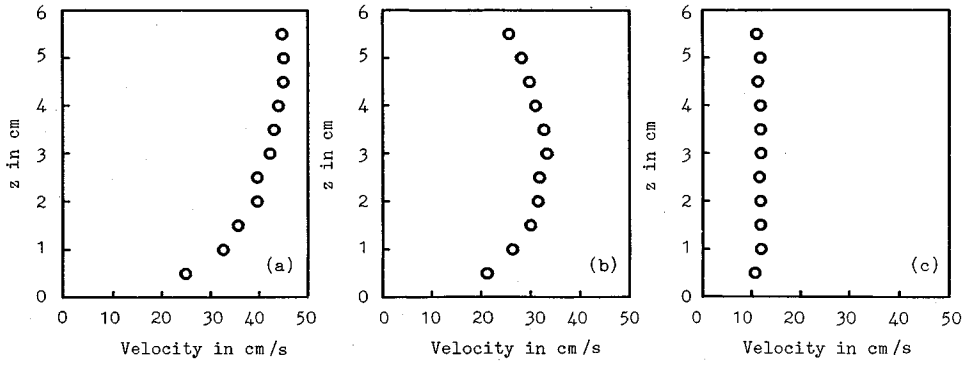


図-4 鉛直方向流速分布 (Run 1), (a)  $y = -39$  cm, (b)  $y = -3$  cm, (c)  $y = 16$  cm.

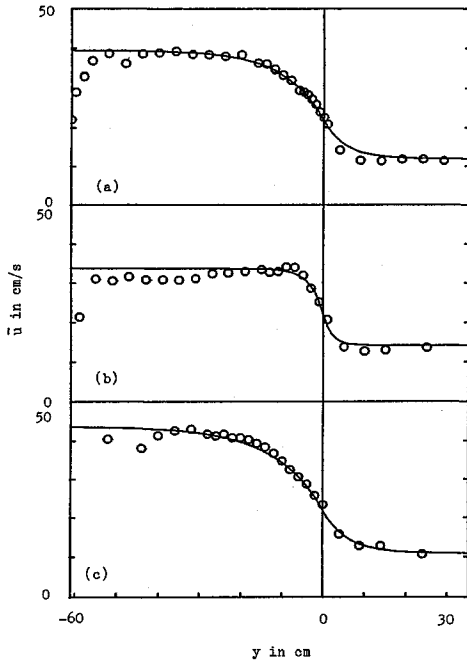


図-3 水深平均流速の横断方向分布, (a) Run 1, (b) Run 4, (c) Run 5.

を形成するので、顕著な堆積が生じないよう水路循環系に含まれる砂量を調節した。このようにして都合9ケースについて実験を行った。これらのうち、それぞれ3ケースについては流速分布と濃度分布がともに測定されている。流量、水深、勾配などの水理条件を表-1に示す。このようにして測定された水深平均流速の横断方向分布の例を図-3に示す。図中の実線は式(12)、(13)を用いて実際の流速分布によく適合するよう $\nu$ の値を選んで描いたものである。式(12)、(13)を描くには $J = 1/(1 + \chi)^{1/4}$ の値が必要である。 $\chi = C_D a D / 2C_f$ であるので、 $C_D$ 、 $a$ 、 $C_f$ の値がわかれば $J$ が求まる。 $C_D$ の値は、境界から十分杭群の中へはいった領域における平衡流速、す

表-1 樹木や杭群の場合の実験条件

Run number	Q in cm <sup>3</sup> /s	D in cm	B/2 in cm	S	Bed condition
1	15,300	6.0	96.0	$1.61 \times 10^{-3}$	fixed
2	22,600	6.0	96.0	$3.57 \times 10^{-3}$	fixed
3	18,600	5.0	96.0	$3.57 \times 10^{-3}$	fixed
4	7,000	3.0	96.0	$3.13 \times 10^{-3}$	fixed
5	24,000	8.5	96.0	$1.22 \times 10^{-3}$	fixed
6	15,300	6.0	96.0	$1.61 \times 10^{-3}$	movable
7	22,600	6.0	96.0	$3.57 \times 10^{-3}$	movable
8	24,000	8.5	96.0	$1.22 \times 10^{-3}$	movable
9	not measured	5.0	96.0	$6.67 \times 10^{-3}$	movable

表-2 樹木や杭群の場合の測定値

Run number	$C_f$	$C_D$	$\epsilon_{my}, \epsilon_{sy}$ in cm <sup>2</sup> /s	$\alpha = \epsilon_{sy} / u_* D$
1,6	0.00608	2.0	7.39	0.40
2,7	0.00608	2.0	5.73	0.21
3	0.00653	1.8	3.18	0.16
4	0.00812	2.0	1.83	0.20
5,8	0.00533	2.0	7.53	0.28
9	0.00653	1.6	4.34	0.15

なわち式(13)から $\phi = J^2$ 、と実測流速が合うよう定める。このとき、 $C_f$ の値は、杭群から十分離れた領域において $C_f = gDS / \bar{u}^2$ より求まる値を用いる。このようにして得られた $C_f$ 、 $C_D$ の値は表-2に示されている。 $a$ の値は杭の配列等により定まり、ここではすべて $a = 0.01 \text{ cm}^{-1}$ である。このようにして得られた $\nu$ の値から $\nu = \epsilon_{my} D / C_f \bar{u} B$ の関係を用いて、 $\epsilon_{my}$ の値が求められる。図-4に鉛直方向の流速分布の例を示す。杭群から十分離れた地点( $y = -39$  cm)では底面に近づくほど流速が減少し、底面からの摩擦が流れを支配しており、杭群内の地点( $y = 16$  cm)では流速はほぼ一様であり、杭の抗力によって支配されている。

浮遊砂濃度の鉛直分布の例を図-5に示す。図中の実線は式(24)で表現される指数型分布が実測値とよく適合するよう $\epsilon_{sz}$ の値を選んで描いたものである。ただし、このとき底面濃度 $c|_{z=0}$ は式(23)によって表される $E$ に等しいとして与えている。これから、浮遊砂濃度の鉛直分布は杭群内外で指数型分布によりよく表すことができ、また、濃度の絶対値も底面濃度を式(23)を用いて

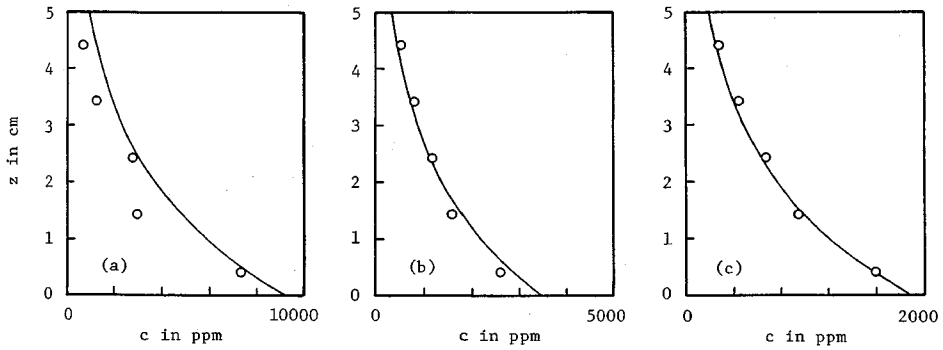


図-5 鉛直方向濃度分布 (Run 9), (a)  $y = -39$  cm, (b)  $y = 0$  cm, (c)  $y = 22.5$  cm.

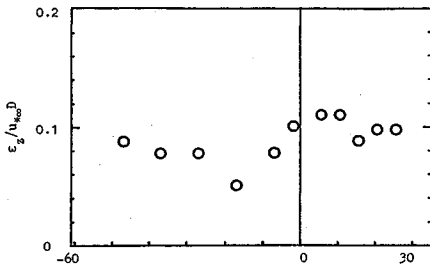


図-6 鉛直方向拡散係数の横断分布 (Run 9).

与えれば再現性がよいことが知られる。このようにして求められた  $\epsilon_{sz}$  の値を  $u_{*∞}D$  で除し、無次元化した値の横断分布の一例が図-6 に描かれている。この測定から鉛直方向浮遊砂拡散係数は杭群内で若干大きくなるものの平均的には

$$\epsilon_{sz} = 0.077 u_{*∞} D \dots \dots \dots (42)$$

である。この値は Karman 定数,  $\kappa = 0.4$  を用いた場合の水深平均された鉛直方向渦動粘性係数  $\epsilon_{mz} = 0.067 \times u_{*∞} D$  の約 1.15 倍となっており、従来から知られている値とよく一致している<sup>12), 13)</sup>。以下に述べる積分浮遊砂濃度の横断分布を求める際に必要となる  $\epsilon_{sz}$  の値は式 (42) によって与えられる値を用いることとする。

図-7 は積分浮遊砂濃度  $\zeta$  の横断方向分布を示している。図中の実線は式 (31), (32) が実測値とよく適合するよう定めたものである。このとき式 (31), (32) 中の  $\nu, J$  の値は前述の操作により既知であり、 $\lambda$  のみが未知となる。したがって、 $\lambda$  の値を操作することにより、式 (31), (32) と実測値が一致するようにすることになる。このようにして、 $\lambda$  の値が定まれば、 $\lambda = \epsilon_{sy} \epsilon_{sz} / \nu_s^2 B^2$  の関係式から  $\epsilon_{sy}$  の値が求まることになる。ここで、砂粒子の沈降速度  $\nu_s$  は  $d_{50}$  に対して Rubey の式より求めた。実際には鉛直平均流速の横断方向分布から得られた  $\epsilon_{my}$  と等しいように  $\epsilon_{sy}$  の値を選べば積分浮遊砂濃度の横断方向分布をよく表すことができた。したがって、図-7 の実線は  $\epsilon_{my} = \epsilon_{sy}$  として描かれたものである。

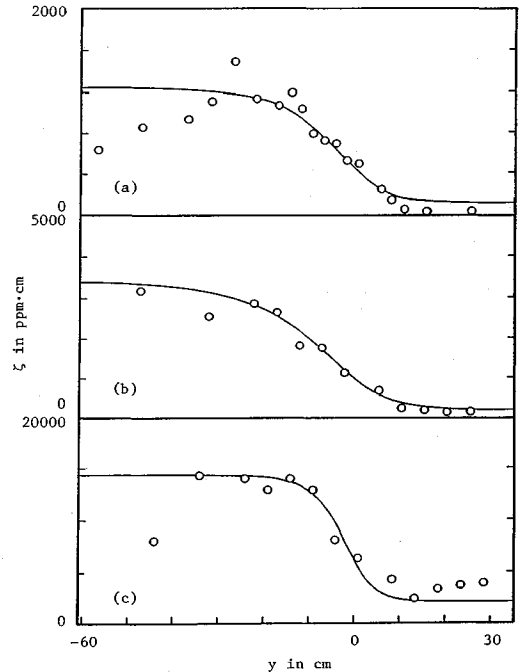


図-7 積分浮遊砂濃度の横断分布, (a) Run 6, (b) Run 8, (c) Run 9.

以上のような手順により求められた  $\epsilon_{sy} (= \epsilon_{my})$  の値を表-2 に示す。無次元化された値  $\epsilon_{sy} / u_{*∞} D$  の値は 0.15~0.4 程度を示し、その平均は 0.23 程度である。この値は、式 (42) で与えられる鉛直方向拡散係数の約 3 倍となっており、Fischer<sup>11)</sup> がまとめた値、式 (2), と比較しても約 70% 大きい値となっている。この原因は本実験では横断方向に大きな速度勾配、特に流速の変曲点をもつために流れの場が不安定となりやすく<sup>14)</sup>、水平渦が顕著に発達したことによると考えられる (たとえば、文献 4), 15) 参照)。

b) 側斜面の場合

図-8 を参照して、側斜面は水路上下流にわたって耐水ベニヤ板を用いて  $\tan \theta = 0.1425$  となるよう水路の片

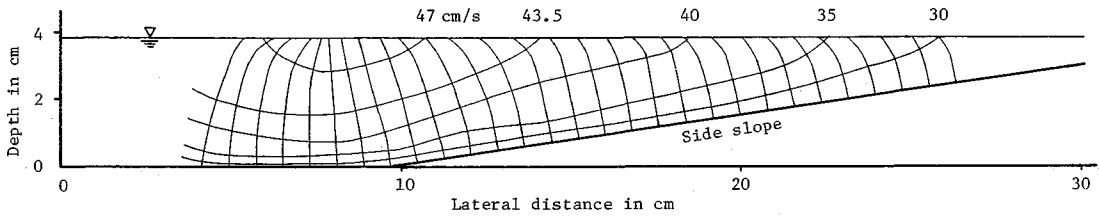


図-9 等流速線と直交する曲線群による断面分割 (Run S1).

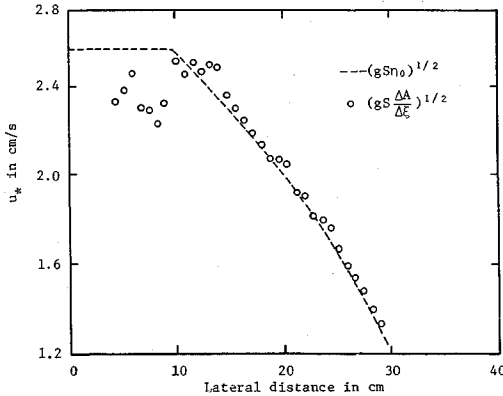


図-10 摩擦速度の分布 (Run S1).

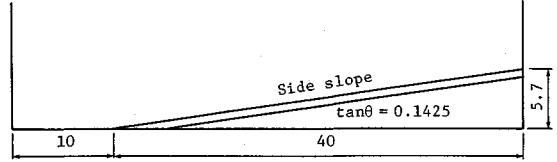


図-8 用いた水路の横断面形状 (単位: cm)

表-3 側斜面の場合の水理条件

Run number	S	Q in l/s	Depth at right bank in cm	Averaged fluid velocity in cm/s	Water temperature (°C)
S1	1/566	3.38	3.80	34.2	16.0
S2	1/414	4.69	4.47	41.3	12.7
S3	1/315	5.75	4.69	46.9	10.2

側に幅 40 cm で設置した。残り幅 10 cm は平坦のまま残している。この平坦床上に厚さ 1 cm にわたり前述の細砂を敷きつめた。上流から 2 m のところに長さ 60 cm の仕切り板を設置し、輸送される砂の分だけ給砂器で給砂した。流速の測定は鉛直方向に 2 mm 間隔で、横断方向には 2 cm 間隔で行った。このように細かく流速分布を測定したのは、式 (40) において積分項に  $u$  が含まれていること、および後述のように等流速線から底面せん断力を求めるためである。濃度の測定は前述の採水器を用いて、流速測定点と同じ箇所で行った。測定は上述の仕切り板下流端から 50 cm, 1 m の 2 断面について行った。実験は流量、勾配を変化させ等流条件が満足されていることを確かめたうえで、3 ケースについて実施した。その水理条件を表-3 に示す。なお、仕切り板の位置は  $y=12.5$  および  $17.5$  cm の 2 種類とした。

さて、今まで述べてきたように浮遊砂の拡散係数は水深および摩擦速度により規定されており、したがって局所摩擦速度を見積ることがきわめて重要となる。一般に、側斜面が緩やかであれば、摩擦速度は近似的に

$$u_* = (gS\eta_0)^{1/2} \dots\dots\dots (43)$$

により表される。このことを確かめるために、図-9 に示されているように等流速線に直交する曲線群を引き、次式を用いて摩擦速度を求めた。

$$u_* = \left(gS \frac{\Delta A}{\Delta \xi}\right)^{1/2} \dots\dots\dots (44)$$

ここに、 $\Delta A$  は隣り合う直交曲線の底面における間隔

$\Delta \xi$  の間に含まれる面積である。式 (43), (44) により得られた摩擦速度の分布の一例を図-10 に示す。これから側斜面部ではほとんど差異はみられないことがわかる。これは他のケースでも同様であり、したがって摩擦速度はこのような緩やかな側斜面では式 (43) を用いても十分精度よく評価できる。以下の計算では式 (43) を用いることとする。 $\eta$  軸に沿う流速分布を調べたところ、どの点においても速度欠損則に従い、ほぼ一本の線に乗った。このことも流れは各地点の局所摩擦速度によって規定されており、式 (43) により摩擦速度を求めることの妥当性を支持している。

図-11 は仕切り板後端から 0.5 m, 1 m の 2 断面における等濃度線を描いたものである。これから 2 断面の間で浮遊砂は横断方向に拡散されていくことがわかる。図-9 および図-11 により、式 (40) 中の  $u, c$  の値が与えられる。なお、同式中の  $c|_{\eta=\eta_0}$  および  $\zeta$  については、 $\eta$  方向に式 (24) を外挿して底面濃度を求め、これから  $\zeta$  を式 (21) により計算した。ただし、側斜面の角度  $\theta$  が小さいのでこのような近似により生じる誤差は小さいと考えられる。以上の操作により  $\epsilon_{s\zeta}$  を求めることができる。図-12 はこのようにして求められた横断方向拡散係数を

$$\epsilon_{s\zeta} = \beta u_* \eta_0 = \beta (gS)^{1/2} \eta_0^{3/2} \dots\dots\dots (45)$$

と置き、この比例係数  $\beta$  を水路側面から側斜面方向へ横断方向にとった座標  $y$  に対してプロットしたものである。 $\beta$  の値は実験条件によらず安定しており、その平均値は約 0.24 である。この値は前述の樹木や杭群の場合の平均比例係数 0.23 とほぼ一致する。

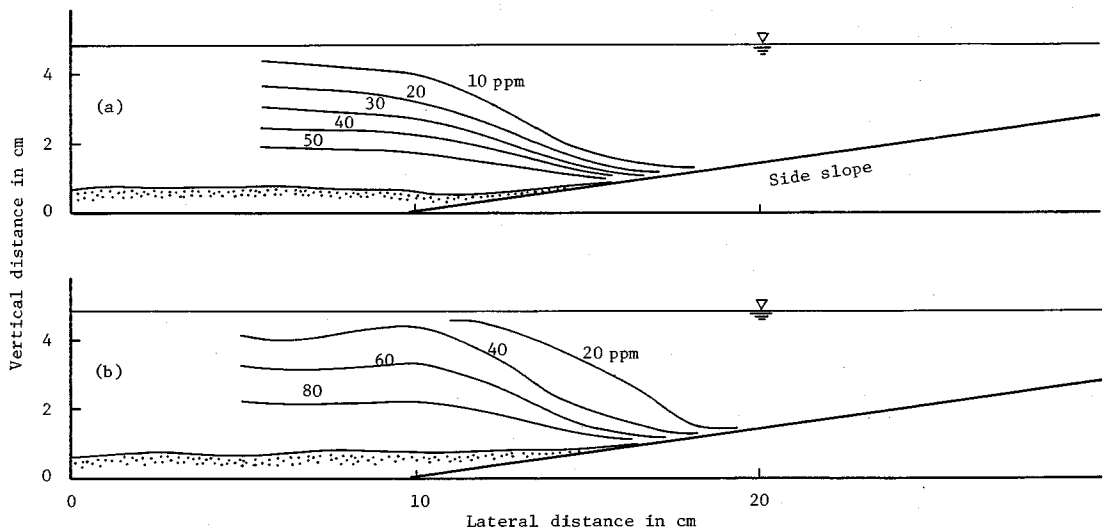


図-11 等濃度線 (Run S1, 仕切り板位置  $y=12.5$  cm の場合), (a)  $x=0.5$  m, (b)  $x=1$  m.

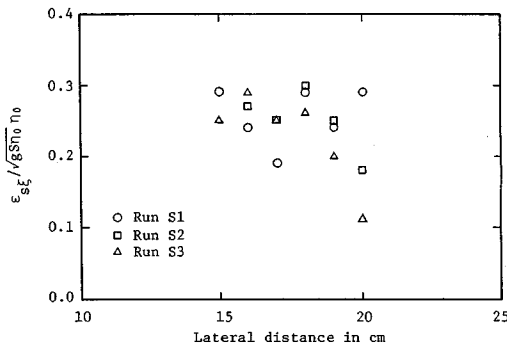


図-12 側斜面における横断方向拡散係数の分布

垂直方向の拡散係数を濃度分布から定めたところ、 $\epsilon_{sz} = (0.062 \sim 0.081)u_*\eta_0$  程度の値であり、その平均値は  $0.071u_*\eta_0$  であった。この値も、樹木や杭群の場合の値、式 (42)、によく合致している。したがって、この場合も横断方向の拡散係数は底面に垂直方向の拡散係数の約 3.4 倍の値となっている。ただし、その値は図-12 にみられるように、斜面方向に向かうにつれて小さくなっている。これは、図-11 からわかるように、斜面を上るに従い、堆積している浮遊砂が少なくなり、巻き上げ量と沈降量がほぼ釣り合っていると仮定が成立しなくなっている (沈降が勝っている) ためであると考えられる。

以上の実験結果から樹木や杭群あるいは側斜面のように水平方向に流速勾配が存在する場では特に横断方向拡散係数が大きくなり、底面に垂直方向の拡散係数に対する比も 3 以上となる。この値は従来 Fischer<sup>11)</sup> が溶解性物質の測定値についてまとめた値の平均的な比、約 2 (式 (1), (2) 参照)、に比べてかなり大きくなっている。

この理由は用いた物質によるのではなく、流れの場の相違にあると考えられる。Fischer がまとめた実験あるいは野外測定はむしろ流路中央付近で測定され、横断方向に流速勾配が余りない場での値である。これに対し、本実験では横断方向に流速勾配がある場合であり、拡散を引き起こす乱れの場合は底面から発生する壁乱流のほか横断方向流速差に起因する自由乱流の影響を強く受けている。このような流れ場では不安定性により周期的に水平渦が発生しやすく (たとえば文献 14), 15) 参照)、これが横断方向の拡散を増大させると考えられる。

#### 4. 結 論

直線水路を用いて a) 樹木や杭のある場合と b) 側斜面の場合について、流速分布と浮遊砂濃度分布を詳細に測定することにより、鉛直方向および横断方向の浮遊砂拡散係数を求めた。その結果、以下の点が判明した。

(1) 鉛直方向拡散係数については a) の場合は  $\epsilon_{sz} = 0.077u_*\infty D$ , b) の場合は  $\epsilon_{sz} = 0.071u_*\eta_0$  程度であり、従来から知られている値とほぼ一致する。

(2) 横断方向拡散係数については a) の場合は  $\epsilon_{sy} = 0.23u_*\infty D$ , b) の場合は  $0.24u_*\eta_0$  となり、従来 Fischer<sup>11)</sup> が提案していた値  $0.135u_*D$  よりもかなり大きくなっている。これは、本実験の場合は横断方向に顕著な速度勾配や速度勾配に変曲点をもつことがあり、鉛直方向に渦軸をもつ水平渦が発生したためであると考えられる。

(3) 以上のことから、樹木や杭群あるいは側斜面近傍の流れ場では大きな物質拡散係数、運動量拡散係数をもつことに注意する必要がある。

(4) 水平渦を含む乱れ場の構造の解明は今後の課題



である。

謝 辞：本研究は文部省科学研究費一般C（課題番号，01550398）ならびに鹿島学術振興財団平成2年度研究助成の補助を受けて行われたものである。なお，実験については伊藤力生，鈴木真司，西村達也（当時埼玉大学4年生）の援助を受けた。記して謝意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) 山崎真一・石川忠晴・金丸督司：開水路平面せん断流に関する実験的研究，土木学会第39回年次学術講演会講演集，II-237，1984.
- 2) 田中昌宏・石川忠晴・木村 聡：平行平板間の乱流の水平混合特性について，土木学会第41回年次学術講演会講演集，II-148，1986.
- 3) 泉 典洋・池田駿介・伊藤力生：流水抵抗及び浮遊砂濃度に及ぼす植生の効果，第33回水理講演会論文集，pp.313~318，1989.
- 4) 福岡捷二・藤田光一：洪水流に及ぼす河道内樹木群の水利的影響，土木研究所報告，180号，pp.129~192，1990.
- 5) Elder, J.W. : The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, 5, pp.544~560, 1959.
- 6) Sayre, W.W. and Chang, F. : A laboratory investigation of open channel dispersion processes for dissolved, suspended and floating dispersants, *Geol. Surv. Prof. Paper* 433-E, 1968.
- 7) Okoye, J.K. : Characteristics of transverse mixing in open-channel flows, Rep. KH-R-23, W.M. Keck Lab., Cal. Inst. Tech., 1970.
- 8) Fischer, H.B. and Hanamura, T. : The effect of roughness strips on transverse mixing in hydraulic models, *Water Resources Res.*, AGU, Vol.12, No.2, pp.362~364, 1975.
- 9) Lau, Y.L. and Krishnappan, B.G. : Transverse dispersion in rectangular channels, *J. Hydraul. Div.*, ASCE, Vol.103, No.HY 10, pp.1173~1189, 1977.
- 10) Webel, G. and Schatzmann, M. : Transverse mixing in open channel flow, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, Vol.110, No.4, pp.423~435, 1984.
- 11) Fischer, H.B. : Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open-channel flow, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol.5, pp.59~78, 1973.
- 12) Chien, N. : The present status of research on sediment transport, *Trans. ASCE*, Vol.121, pp.833~868, 1956.
- 13) 吉川秀夫：流砂の水理学，丸善，pp.86~95，1985.
- 14) Tatsumi, T. and Gotoh, K. : The stability of free boundary layers between two uniform flows, *J. Fluid Mech.*, No.7, pp.433~441, 1960.
- 15) Tamai, N., Asaeda, T. and Ikeda, H. : Study on generation of periodical large surface eddies in a composite channel flow, *Water Res. Res.*, AGU, Vol.22, No.7, pp.1129~1138, 1986.

(1990.11.28 受付)

## TRANSVERSE DIFFUSION COEFFICIENTS OF SUSPENDED SEDIMENT

Syunsuke IKEDA and Norihiro IZUMI

Measurements on the lateral diffusion coefficients of suspended sediment were performed in straight laboratory flumes with piles placed in stagger and side slope, respectively. Cross-sectional distributions of fluid velocity and concentration of suspended sediment were measured in detail, from which the diffusion coefficients were calculated. It was found that the lateral diffusion coefficient is about  $0.24 u_* D$ , which is much larger than the value observed for turbulent flows without lateral velocity gradient. The reason is that the lateral velocity gradient induces instability of flow and generates organized vortices which effectively transport longitudinal fluid momentum and suspended sediment.