

流れの遷移を伴う一次元河床変動の数値解法

岡部健士*・芦田和男**

河床擾乱を kinematic wave とみなす既往の数値解法は、流れの遷移を伴う現象を的確に処理できない。本論文では、その改善を試みる。まず、流れの非定常性を考慮した特性曲線解析により、河床擾乱の dynamic wave 的な特性を推察したのち、上下流 2 方向の伝播速度を重み係数として用いる新しい河床変動量の計算法を提案する。また、本法と MacCormack 法による不定流解析法との結合法についても検討する。

Keywords: one-dimensional bed-level variation, transition of flow, numerical model, characteristic curve, MacCormack's scheme

1. まえがき

一次元河床変動の解析法は、流水と土砂のそれぞれに関する連続方程式と運動方程式を組み合わせた基礎方程式系を適当な境界条件のもとで解くことに帰着する。この問題については長年にわたる研究の積み重ねがあり、現象論ならびに数値計算のノウハウにかかわる課題は、すでに十分に解明されたかのようにも思われている。しかしながら、特に山地河川のように流れの遷移が各所で頻繁に発生する場を対象にした計算については以下のような問題が残されている。

まず、遷移を伴う流れの不等流計算を、たとえば標準逐次計算法などで行う場合、支配断面はある程度合理的に決定できても¹⁾、やはり一部に計算不能の断面が残されたり、逆に、複数の支配断面からの計算水位線が重複したりすることがよくあるが、このような事態への対処法として適切なものがない。これに対し渡邊²⁾は、定常流の基礎式を leapfrog 法を応用した収束計算によって解く方法を提案している。この方法には流れの遷移を特別に考慮しなくてよいという利点があるが、効率的な収束方法や精度の面に課題が残されているように思われる。一方、保存形で記述した不定流の基礎式より時間 $t \rightarrow \infty$ の漸近解を求める方法あるいは不定流計算と河床変動量計算を並行して進める方法も考えられている。たとえば Two-Step Lax-Wendroff 法³⁾ (以下、TSLW と略記する) あるいは本法の一種で、特に不連続現象を含む流れに適するものとして最近注目されている MacCormack 法^{4),5)} (以下、MC 法と略記する) の活用である。これらも遷移の有無にかかわらず計算を進められるが、河床変動計算への適用性や実用性に関する検討は従来ほ

とんど行われていないようである。

次に、河床位変動量の差分表示ならびにその安定条件に関する問題がある。それらについては、de Vries⁶⁾、鈴木ら⁷⁾、黒木ら⁸⁾ が特性帯の理論を展開し、常流・射流に応じて後進差分・前進差分を使い分ける差分法ならびに CFL 条件式を導いている。これらは実際河川に関する計算でも用いられ、有用性が認められている⁸⁾。しかし、流れの遷移がある場合に上述のような差分法をそのまま適用すると、計算区間全体に関する土砂収支に誤差が生じる⁹⁾。また、既往の CFL 条件式は、Froude 数が 1 に近づくと計算の時間増分を無限小にすることを要求する。これらは、定常流を仮定した基礎式系に特性帯の理論を適用したことに起因している。後述するように、限界流の状態に近づくと、河床擾乱の伝播速度は水流擾乱のそれに対して無視できない大きくなるので、流れを常に定常と仮定することには無理がある。

本文では、一次元河床変動解析法に関する以上のような問題点の改善を試みる。すなわち、2. では、流れを非定常として取り扱った基礎式系について特性曲線と特性式を求めるとともに、河床変動現象における擾乱の伝播特性を分析する。3. では、まず従来の計算法の問題点を再整理したのち、2. の結果を参考にしつつ、より一般的な河床変動量の計算法を誘導し、単純な条件での数値計算への適用を通じてその妥当性を検証する。4. では、MC 法と 3. で得た河床変動量の計算法とを組み合わせた河床変動の一計算法を提示し、その有用性を検討する。

なお、本文では、一樣粒径の掃流砂による河床変動のみが取り扱われている。

2. 理論的考察

(1) 基礎式

任意の断面の河幅が B の広長方形断面河道における

* 正会員 工博 徳島大学助教授 工学部建設工学科
(〒770 徳島市南常三島町 2-1)

** 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

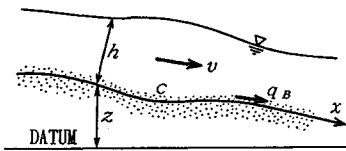


図-1 記号の説明

河床変動について考える。図-1に示すように、河床に沿う流れ方向の座標を x 、河床位、水深、断面平均流速および断面平均の土砂濃度を z, h, v および c とすると、流れの連続式、運動方程式および流砂の連続式は、まず、下記のように表される¹⁰⁾。

$$\frac{\partial}{\partial t}(h(1-c)) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x}(Bvh(1-c)) + \lambda \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = -i_f \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial}{\partial t}(hc) + \frac{1}{(1-\lambda)B} \frac{\partial}{\partial x}(Bvhc) = 0 \quad (3)$$

ここに、 t : 時間、 λ : 河床土砂の空隙率、 g : 重力の加速度、 i_f : エネルギー勾配、である。なお、式(2)では、流れを流砂の影響のない一次元漸変流として取り扱い、エネルギー補正係数も1.0とみなしている。

式(1)および式(3)から c を消去して次式を得る。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x}(Bvh) + \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

さらに、式(3)において、左辺第2項を無視し、断面内の単位幅流砂量をその水理量と土砂の物性のみで決まる平衡状態の単位幅流砂量 q_B で近似すると、

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)B} \frac{\partial}{\partial x}(Bq_B) = 0 \quad (5)$$

以下、本章の考察では、式(2)、(4)および式(5)を河床変動現象の基礎式系として用いる。

ところで、従来の特性曲線解析では、たとえば

$$(1-F_r^2) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = F_r^2 \frac{h}{B} \frac{dB}{dx} - i_f \quad (6)$$

と式(5)が基礎式として採用されてきた。ここに、 F_r は Froude 数で、 $F_r = v/\sqrt{gh}$ である。式(5)および式(6)より河床擾乱の伝播速度 ω_z を求めると、

$$\omega_z = -\frac{1}{(1-F_r^2)(1-\lambda)} \frac{\partial q_B}{\partial h} \quad (7)$$

となる。本式によると、 $F_r \rightarrow 1$ のとき $|\omega_z| \rightarrow \infty$ になる。これは、式(6)を用いる際の仮定に反するし、物理的にも不合理である。

(2) 特性曲線式と特性式

式(2)、(4)および式(5)で構成される基礎式系を未知量 h, v および z の偏微係数がすべて陽的に現れるように変形すると下記ようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{vh}{B} \frac{dB}{dx} \quad (8)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = -i_f \quad (9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_B}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_B}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{q_B}{(1-\lambda)B} \frac{dB}{dx} \quad (10)$$

そして、 t と x の関数を ϕ_1 および ϕ_2 とし、(8)+(9) $\times \phi_1 + (10) \times \phi_2$ なる1次結合が t に関する常微分方程式となるような dx/dt の条件を求めると次式のような

$$\omega \equiv dx/dt = v + \phi_1 + \xi_h \phi_2 = \frac{h + (v/g)\phi_1 + \xi_v \phi_2}{\phi_1/g} = \frac{\phi_1}{1 + \phi_2} \quad (11)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \xi_h &= \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_B}{\partial h} \\ \xi_v &= \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_B}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(11)より特性曲線の方程式を求めれば、

$$w^2 - 2w^2 + w = -\frac{\xi_h}{v} w^2 + \left(\frac{1}{F_r^2} + \frac{\xi_h}{v} \right) w + \frac{1}{F_r^2} \left(\frac{\xi_h}{v} - \frac{\xi_v}{h} \right) \quad (13)$$

となる。ただし、

$$w = \omega/v \quad (14)$$

なる無次元化がなされている。また、これに対応する特性方程式は、次のように書かれる。

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\phi_1}{g} \frac{dv}{dt} + (1 + \phi_2) \frac{dz}{dt} = -\frac{vh}{B} \frac{dB}{dx} - i_f \phi_1 - \frac{q_B}{(1-\lambda)B} \frac{dB}{dx} \phi_2 \quad (15)$$

なお、 ϕ_1 と ϕ_2 は、式(11)より次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \omega - v + \frac{v \xi_h}{\omega + \xi_h} \\ \phi_2 &= -\frac{v}{\omega + \xi_h} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式(13)は式(12)のように定義された変数 ξ_h, ξ_v を含み実用的でないので、以下、流れの抵抗則と流砂量式を導入して、より具体的な形式に書き直しておこう。さて、抵抗則としては Manning 式を用いる。

$$v = \frac{1}{n} h^{2/3} i_f^{1/2} = \frac{h^{1/6}}{n \sqrt{g}} u_* \quad (17)$$

ここに、 n : Manning の粗度係数、 u_* : 摩擦速度である。一方、 q_B は次のように表示できる。

$$q_B / \sqrt{sgd^3} = \Phi_B(\tau_*) \quad (18)$$

ここに、 s : 砂礫粒子の水中比重、 d : 粒径、 Φ_B : 流砂量関数、 τ_* : 無次元掃流力 ($= u_*^2 / sgd$) である。式(17)および式(18)を用いれば、式(12)は次のように書き直される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi_h}{v} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{(1-\lambda)\phi} \frac{d}{h} \tau_*^{1/2} \frac{d\Phi_B}{d\tau_*} \\ \frac{\xi_v}{h} &= 2 \frac{1}{(1-\lambda)\phi} \frac{d}{h} \tau_*^{1/2} \frac{d\Phi_B}{d\tau_*} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

明らかに、 $\xi_h/v = -1/6 \cdot \xi_v/h$ であり、これを考慮しつつ式(13)を変形すると式(20)を得る。すなわち、記述を簡単にするために、 ξ_v/h を ξ と書いて、

$$w^3 - 2w^2 + w = \frac{1}{6}\xi w^2 + \left(\frac{1}{F_r^2} - \frac{1}{6}\xi\right)w - \frac{7}{6}\frac{\xi}{F_r^2} \dots\dots\dots(20)$$

なお、 $\Phi_B(\tau_*)$ として次のようなBrown型の式、

$$\Phi_B(\tau_*) = 10\tau_*^{5/2} \dots\dots\dots(21)$$

を使うならば、 ξ の表示は、

$$\xi = \frac{50}{(1-\lambda)\phi} \frac{d}{h} \tau_*^2 \dots\dots\dots(22)$$

となる。ただし、 ϕ :流速係数(= v/u_*)である。本式より、実際現象では、 ξ は高々1程度の正の値であるといえる。

(3) 擾乱の伝播特性

一般に、特性曲線方程式の解は、基礎式系が表す物理現象における擾乱の伝播速度と解釈される。上で導かれた式(20)は、 $\xi=0$ すなわち $q_B=0$ の特別な場合のみ、その3個の実数解を下記のように陽な形式で表示することができる。

$$\begin{aligned} w &= 0 \dots\dots\dots(23-a) \\ w &= 1 - 1/F_r \dots\dots\dots(23-b) \\ w &= 1 + 1/F_r \dots\dots\dots(23-c) \end{aligned}$$

ここに、 $w=0$ は河床形状が変化しないことを示し、残りの2式はdynamic waveの伝播速度を表すことは周知のとおりである。しかし、 $\xi \neq 0$ の場合には実数形式でしかも陽な解の表示を得る手段がないので、伝播する物理量を解析的に特定することはできない。そこで、以下においては、式(20)の数値解を示しながら、それが表す伝播速度の物理的意義を推察してみよう。

さて、式(20)の左・右両辺をそれぞれ、

$$\begin{aligned} f(w) &= w^3 - 2w^2 + w \dots\dots\dots(24) \\ g(w) &= \xi/6 \cdot w^2 + (1/F_r^2 - \xi/6)w - 7/6 \cdot \xi/F_r^2 \dots\dots(25) \end{aligned}$$

と表して、 ξ と F_r の代表的な組合せについて両式の曲線を描くと図-2のようである。一部の大きい ξ に対する g 曲線が f 曲線と交わらないが、 ξ は高々1であるから、実際に起こる現象では、ほぼ例外なく3本の特性曲線が存在するであろう。そして、これらのうちの1本は上流に向かい、残る2本は中立かあるいは下流方向に向かう。

図-2において、 f 曲線と g 曲線の交点によって与えられる3種の伝播速度を、値の小さい順に w_1 、 w_2 および w_3 と名付け、おのおのの定性的な特性を述べると次

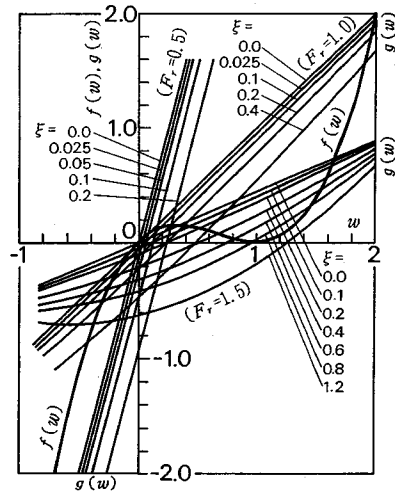


図-2 特性曲線の解の性質

のようである。まず、 w_1 は常に負であり、 F_r が0に近づくると急速に $-\infty$ に近づき、逆に F_r 増大すると0に近づく。また、 F_r を固定したとき、 ξ の増加は $|w_1|$ の増大をもたらす。ついで、 w_2 は、 $\xi=0$ のとき、 F_r に関係なく0となる。そして、 F_r と ξ が増加すると、 w_2 も一樣に増大する。最後に、 w_3 は、常に1より大きい。 F_r が0に近づくとき、 w_3 は $+\infty$ に近づき、 F_r が増加するとともに急速に1に近づく。 ξ の増加は w_3 のわずかな減少をもたらす。以上の結果と式(23-a-c)および式(7)とを比較すれば、 w_3 と F_r の関係は式(23-c)に類似していることがわかる。また、 $F_r < 1$ に対する w_1 および $F_r > 1$ に対する w_2 の特性は、それぞれ式(23-b)が示すものに近い。さらに、 $F_r > 1$ の場合の w_1 と $F_r < 1$ の場合の w_2 の特性は式(7)のそれに類似している。以上のことから、常流の場合、 w_1 と w_3 は流れの、 w_2 は河床の擾乱の伝播速度を表し、射流の場合には、 w_1 が河床の、 w_2 と w_3 が流れの擾乱の伝播速度を表すといえなくはない。しかしながら、常に $w_3 > 1$ である w_3 は別として、 w_1 と w_2 は、特に F_r が比較的1に近い場合、河床擾乱と流れの擾乱の双方の伝播に、同程度に関与するとみるのが自然であろう。そして、両者は必ず一対の正値・負値となるから、河床擾乱は上流・下流の両方向に伝播するものと考えられる。

図-3は、河床擾乱の伝播に関する w_1 と w_2 の特性を ξ と F_r をパラメーターにして示したものである。ところで、式(20)の解法には、Cardanoの方法という解析的手法もあるが、これは必ずしも簡便ではない。そこで著者らは、まず $f(w)$ を図-4に示す3個の2次式で近似し、これらと $g(w)$ とを等値した2次方程式より粗い近似解を求めたのち、Newtonの反復法を適用して所要の精度の解を得た。

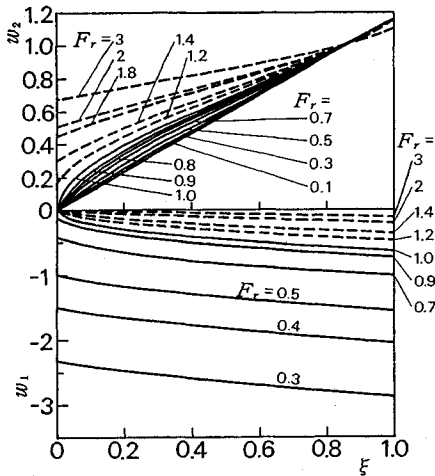


図-3 w_1 と w_2 の特性

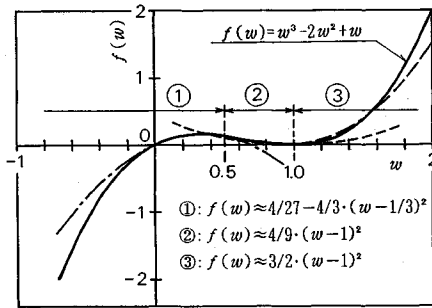


図-4 2次曲線による $f(w)$ の近似

さて、常流では、 F_r が小さい場合に $|w_1| \gg w_2$ であるが、 F_r が 1 に近づくに従って両者の相違が小さくなり、 $F_r > 0.8$ で ξ がある程度大きい条件では $|w_1| < w_2$ にもなる。また、常流では、 ξ の変化すなわち流砂量の変化に対して w_2 のほうが w_1 よりも敏感に応答する。一方、射流の場合には、常に $|w_1| < w_2$ で、 F_r が大きくなるにつれて、 $|w_1| \ll w_2$ になるが、 ξ の変化に対する応答性には常流の場合ほどの明瞭な相違は認められない。

3. 河床変動量の計算法と安定条件

(1) 問題点の再整理

従来の河床変動計算法の問題点については、すでに1.でも簡単に触れたが、以下、前章の成果もふまえつつ再度整理しておきたい。

まず、従来の計算法では、土砂に関する連続式の差分化を行う際に、常流・射流に応じてそれぞれ後退・前進差分（いずれも片側差分）を用いているが、これは、河床擾乱が上・下流に伝わることを示唆した前章の解析結果と完全には整合しない。すなわち、常流で $|w_1| \gg w_2$ 、あるいは射流で $w_2 \gg |w_1|$ の場合には、CFL の安定条件

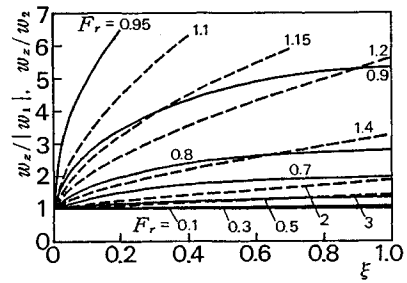


図-5 w_2 と $|w_1|$ あるいは w_2 との比

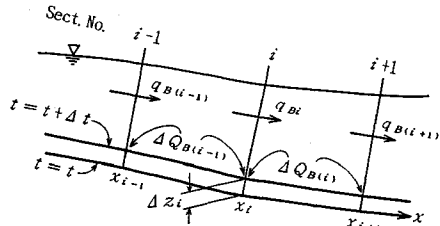


図-6 河床変動量の新しい計算法の模式図

に照らして伝播速度が大きいほうの擾乱を無視することは妥当であるけれども、流れが限界状態にかなり近く、 $|w_1|$ と w_2 の差が小さい場合には、片方の擾乱の伝播を無視できる根拠が見当たらない。後者の場合でも従来の計算法が妥当か否かを確認する必要がある。

次に、限界状態に近い流れによる河床変動の計算に式(7)を適用すると、時間 step Δt を不必要に小さくするおそれがある。ここで、式(7)に基づいて計算される無次元伝播速度 $w_2 (= \omega_2/v)$

$$w_2 = 7/6 \cdot \xi / (F_r^2 - 1) \dots \dots \dots (26)$$

と常流の w_2 あるいは射流の $|w_1|$ との比を求めてみると図-5 のようである。もしも w_2 の代わりに w_1 あるいは w_2 を用いて Δt を決定しても安定な計算が可能ならば、流れが限界状態に近い条件での計算時間をかなり短縮できることがわかる。

このほか、流れの遷移がある場合に従来の差分法をそのまま適用すると土砂収支に狂いが生じることも重要である。

次項では、以上のような問題点あるいは改善への期待に同時に答えられる新しい計算法を提案する。

(2) 河床変動量の新しい計算法

図-6 は、新しい計算法の模式図である。河床変動計算のために離散的に配置した断面のうち、上流から第 i 番目の断面における、 Δt 時間内の河床上昇量を Δz_i とする。前章の特性曲線解析の結果に従うならば、任意の i 断面と $(i+1)$ 断面間（間隔は一樣でなくてもよい）における単位時間当たりの全幅流砂量の不均衡 $\Delta Q_{B(i)}$ 、

$$\Delta Q_{B(i)} = B_i q_{B(i)} - B_{(i+1)} q_{B(i+1)} \dots \dots \dots (27)$$

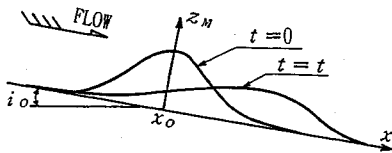


図-7 マウントの模式図

に起因する擾乱は、双方の断面の方向に伝播する。ただし、 q_{B_i} および B_i は、それぞれ第 i 断面の単位幅流砂量および河幅である。このとき、伝播速度が大きいほど対応する擾乱はこの区間の外に出てしまう可能性が高い。そこで、まず擾乱が当該区間に止まる割合は単純に伝播速度の絶対値の逆数に比例するものと仮定するとともに、実用上の観点より、 ΔQ_{B_i} によって生じる河床堆積土砂の容積変化を i および $(i+1)$ 断面のみの河床位の変化として評価することにすれば、 ΔQ_{B_i} による i および $(i+1)$ 断面の河床上昇量 $\Delta z'_{i,i}$ および $\Delta z'_{i+1,i}$ は、それぞれ次式のように表示される。

$$\Delta z'_{i,i} \Delta x_i B_i = \frac{w_{2i}'}{(|w_{1i}'| + w_{2i}')} \cdot \frac{\Delta Q_{B_i} \Delta t}{(1-\lambda)} \dots\dots\dots (28)$$

$$\Delta z'_{i+1,i} \Delta x_{i+1} B_{i+1} = \frac{|w_{1i}'|}{(|w_{1i}'| + w_{2i}')} \cdot \frac{\Delta Q_{B_i} \Delta t}{(1-\lambda)} \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 $\Delta z'$ の第 1 添字は断面番号、第 2 添字は ΔQ_B に付されたものと同一の区間番号である。また、 Δx_i は、河床堆積土砂量を計算する際に考える第 i 断面の支配区間長で、第 i 断面の x 座標値を x_i とするならば、上・下流端の断面以外においては、

$$\Delta x_i = (x_{(i+1)} - x_{(i-1)}) / 2 \dots\dots\dots (30-a)$$

のように、また上・下流端の断面においては、

$$\Delta x_i = |x_i - x_{(i+1)}| / 2 \dots\dots\dots (30-b)$$

のように定義する(添字の複号は、上流端では+、下流端では-とする)。さらに、 w_{1i}' および w_{2i}' は、注目する区間の平均的な伝播速度であり、 i 断面の w_1 と w_2 をそれぞれ w_{1i} 、 w_{2i} とおいて、次式により近似的に算定するものとする。

$$w_{1i}' = (w_{1i} + w_{1(i+1)}) / 2 \dots\dots\dots (31-a)$$

$$w_{2i}' = (w_{2i} + w_{2(i+1)}) / 2 \dots\dots\dots (31-b)$$

そして、第 i 断面において Δt 時間内に生じる実際の河床上昇量 Δz_i は、その上・下流の区間の影響を重ね合わせて、

$$\Delta z_i = \Delta z'_{i,i-1} + \Delta z'_{i,i} \dots\dots\dots (32)$$

により求めればよい。

本法による限り、いかなる条件下においても計算区間全体に関する土砂収支の不合理的は生じない。また、本法は、 F_r が 1 からある程度離れて、 $w_2 \ll |w_1|$ または $w_2 >$

$|w_1|$ となるときには、それぞれ従来の後退差分または前進差分による方法に帰着する。

(3) 数値計算例に基づく検討

ここでは、前項において提案された河床変動量計算法の妥当性を、簡単な条件をもつ現象モデルへの適用を通して検討する。また、従来の計算法に関して本章(1)で記述した 2, 3 の指摘に関する数値的検討も併せて行う。

数値計算の現象モデルとしては、図-7 に示すように、幅、勾配ともに一樣な河床上で非常になだらかな縦断形状の突部(マウント)が変形する過程を取り上げた。初期状態におけるマウントの高さ z_M は、メートル単位で次式のように与えた。

$$z_M = 0.05 \exp[-(x-x_0)^2/250] \dots\dots\dots (33)$$

ここに、 x_0 は初期状態におけるマウントの中心の x 座標値である。計算は、全区間において常流または射流だけが生じる条件下で行うことにした。流れは近似的に定常流として取り扱うこととし、抵抗則として Manning 式を導入した標準逐次計算法による不等流計算を行った。流砂量の計算には式(21)を使用した。

図-8(a), (b) は、特に初期の段階において、マウント頂点近傍の流れの F_r が 1 に非常に近い場合の計算結果の一例であり、(a) には常流の場合、(b) には射流の場合のものを示している。また、図-9(a), (b) には、全過程を通して全断面の F_r が 1 から十分離れた値となる条件下の結果である。図中の i_0 および h_0 は、それぞれマウントを除く河床の初期勾配および等流水深であり、 h_c は限界水深を表す。これらの計算では、流れの単位幅流量 q および Manning の粗度係数 n を、それぞれ $1.0 \text{ m}^2/\text{s}$ および 0.03 に固定し、 i_0 を変えることで流れの状態を変化させるとともに、粒径 d も常流と射流に対しそれぞれ 1 mm と 2 mm と変化させている。また、 Δx_i は 5.0 m に固定し、 Δt については、時間 step ごとに、まず全断面において $|w_1|$ と w_2 のいずれか小さい方と CFL の安定条件式から算定される値を求め、これらの最小値をさらに $2/3$ 倍したものを全断面に共通して適用した。このように Δt を当初の計算値の $2/3$ 倍とさらに短縮したのは、それをそのまま用いると、射流で、 $|w_1|$ と w_2 の差がかなり大きい場合の解に軽微な振動が乗る傾向が認められたからである。

さて、図-8 および図-9 には、 F_r の条件にかかわらず、きわめて安定した計算結果が得られており、著者の計算法の妥当性が窺える。比較のために、図-8の(a) および (b) と同一の条件下のマウントの変形過程を、従来どおりの片側差分法を採用するとともに、式(26)の w_2 に基づいて Δt を決定しながら計算した結果を、それぞれ図-10(a) および (b) に示す。本図においても計算の不安定は発生しておらず、安定性の面で

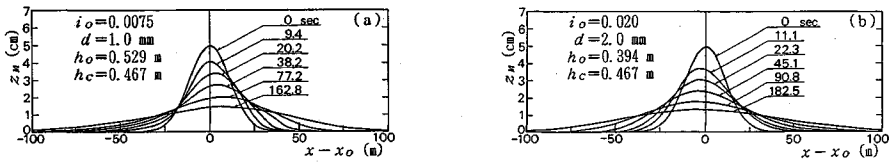


図-8 著者らの方法を用いた計算例 (流れが限界状態にきわめて近い場合)

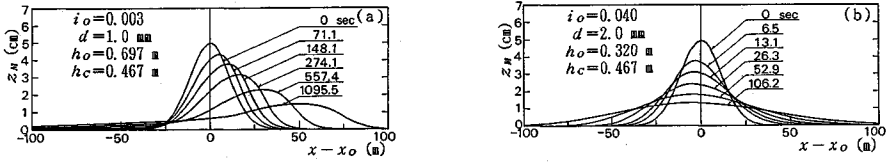


図-9 著者らの方法を用いた計算例 (流れが限界状態からかなり遠い場合)

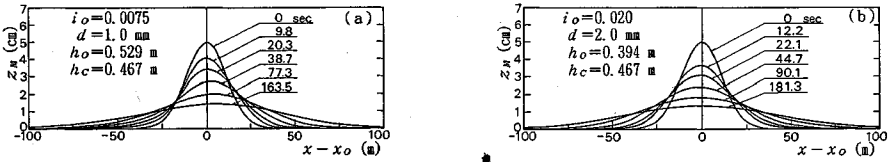


図-10 従来の片側差分法による計算例 (Δt を w_2 に基づいて決定)

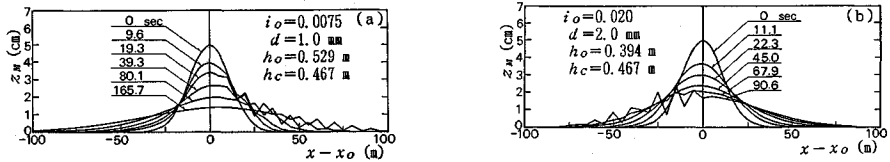


図-11 従来の片側差分法を用いるが、 Δt を w_1 あるいは w_2 から算定した計算例

は従来の方法も十分妥当であることが再確認される。また、本図の各時刻におけるマウンドの形状と図-8に示されたほぼ同一時刻のものを個々に対比すると、計算の初期に、後者が前者のものから、常流の場合には下流側に、射流の場合には上流側にわずかに偏っているけれども、この点を除けば両者はきわめてよく一致していることがわかる。しかしながら、ここに示した例では、 w_1 または w_2 に基づく Δt と w_2 によるものとの比は、現象の初期において5/1~6/1、ある程度時間が経過したのちでも2/1~3/1であり、著者らの計算法によるならば、計算時間を従来のものよりかなり大幅に短縮できるといえる。最後に、一つの試みとして、河床変動量の計算には従来の片側差分法を用い、 Δt を常流、射流に応じてそれぞれ w_1 、 w_2 に基づいて決定した計算結果の一例を図-11 (a), (b)に示している。本図の (a) および (b) の与条件は、それぞれ図-8 (a) および (b) のものと同一にしている。この場合には、前もって予想されるように、計算開始直後からマウンドの頂点付近で不安定が発生し、次第に増幅しつつ、常流の場合には下流方向に、射流の場合には上流方向に伝播している。そのまま計算を継続すると、(a)の常流の場合には不安定が次第に減衰

したが、(b)の射流の場合には、増幅を続け、ついには跳水の発生など常識的には考えられない状態がもたらされた。すなわち、従来の片側差分法による限り、 Δt を引き伸ばすことはできない。なお、図-11のいずれにおいても不安定の伝播方向が影響を無視した側になっている点がきわめて興味深い。著者らが提案した計算法は、従来のものが無視した側の擾乱の影響を考慮することにより不安定の発生を押さえることに成功しているものと解釈できよう。

4. MacCormack 法を利用した河床変動計算

MC法はTSLW法と同様に2次の精度をもつ計算法であるが、段波や跳水のような不連続現象もかなり良い精度で計算できるようである⁴⁾。また、MC法はアルゴリズムがTSLW法に比してはるかに簡単で計算時間も節約できることから、流れのみに関する計算ばかりでなく河床変動の計算にも利用しやすいように思われる。ただし、MC法による開水路流れの計算のノウハウはまだ確立されておらず、また、著者らが知る限り既往の事例がないので、河床変動計算への適用性も不明である。そこで本章では、まず、MC法の一計算法を提示し、

ついで、これと前章で提案した著者らの河床変動量計算法を組み合わせて行った計算例を示しつつ、このような計算法の有用性ならびに今後の課題について考察する。

(1) MacCormack 法の計算モデル

MC法の基本については文献11)などに詳しく述べられているのでここでは割愛し、著者らが用いた計算モデルの骨子のみを示しておく。

まず、流れの基礎式(2)および(4)を保存形に変換すると次のようになる³⁾。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = Z \dots\dots\dots(34)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \dots\dots\dots(35)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A &= Bh \\ Q &= Bvh \\ Z &= -\partial z / \partial t \\ F &= Bv^2h + gBh^2/2 \\ S &= gBh(-\partial z / \partial x - i_f) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

である。なお、式(34)の右辺を左辺の第1項に含めて記述することも考えられるが、本式を以下に示すように差分表示する場合には、どちらでもかまわない。

式(34)、(35)において未知数はAとQである。MC法では、時刻tまでに求められた第i断面の解をA_i、Q_iとして、Δt後の未知量の近似解A^p_i、Q^p_iを求め(予測子段階)、ついで、より精度の高い解A^c_i、Q^c_iを計算する(修正子段階)。各段階の計算式は、たとえば式(34)の場合には、次のようになる。

(予測子段階)

$$A^p_i = A_i$$

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}(Q_{i+1} - Q_i + D_{i+1} - D_i) - \Delta t B_i Z_i \dots\dots\dots(37)$$

(修正子段階)

$$A^c_i = 1/2 \cdot (A_i + A^p_i)$$

$$-\frac{\Delta t}{2\Delta x_{i-1}}(Q^p_i - Q^p_{i-1} - D^p_i + D^p_{i-1}) - \frac{\Delta t}{2} B_i Z^p_i \dots\dots\dots(38)$$

両式において、Z、Dの下付きおよび肩付き添え字は、AおよびUに準じる。D_iは増幅行列の値が1の中立安定から不安定化が始まるのを防ぐために付加した人工粘性であり、本計算では次式のように与えた¹¹⁾。

$$D_i = 1/8 \cdot (A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1}) E_i / \Delta x_i \dots\dots\dots(39)$$

ここに、Eは人工粘性係数であり、Dの目的に従って適当に与えればよいが、本計算では、次元の整合を考慮して、

$$E = hu^* \dots\dots\dots(40)$$

のように定義した。なお、この人工粘性項のオーダーは

3次と見積られるから、精度が2次のMC法の精度に影響を及ぼさない。

一方、式(35)の差分化も以上と同様に行えばよい。ただし、計算を実行した結果、摩擦項Sを式(34)中のZと同様にS_iあるいはS^p_iとして計算すると、不安定が発生しやすい傾向が認められた。これは、水理学的な観点からも当然のことのように思われる。そこで、Sに対しては、便宜的に次のような計算式を与えることにした。

(予測子段階) S = θS_i + (1-θ)S_{i+1}.....(41-a)

(修正子段階) S = (1-θ)S^p_i + θS^p_{i-1}.....(41-b)

ここに、θは重み係数であり、数値は経験的に決定する。本計算では、関係する2断面間に支配断面がある場合にθ=0.8、跳水の場合にθ=0.2、その他の場合にはθ=0.5としたが、これらの数値の一般性については今後の検討を要する。

以上の諸式を用いる場合、予測子段階では下流から上流に向けて、修正子段階では上流から下流に向けて計算を進めるが、前者では下流端、後者では上流端の断面の水量が求まらない。それらに対しては、MC法とは別のbox schemeを用いた。また、上・下流端の2断面には式(39)をそのまま適用することができないが、Dは上述した目的の人工粘性項であるから、計算不能のAには上下流端の断面の値を代入することにした。

(2) 計算例ならびに考察

河幅と河床勾配の変化が著しい山地溪流を念頭に置きながら作った架空の移動床水路について、河床変動のシミュレーションを行った。流れの抵抗則および流砂量式としては前章と同様に、それぞれManning式および移動限界を考慮しないBrown式を用いた。

図-12に、水路幅および河床形状の初期値を計算結果とともに示している。河床構成材料の粒径はd=3.0mmとし、上流端からの流入流量はQ=1.0m³/sに固定した。流れは、t=0の初期状態においては、下流端水位H₀=3.2mの不等流であるものと仮定し、このあとt=500sまでの間にH₀を1.0mまで等速度で降下させ、それ以降は1.0mに固定した。計算断面は等間隔Δx=5.0mで61個設定された。Δtは、全断面において、

$$\Delta t = \Delta x / (|v| + \sqrt{gh}) \dots\dots\dots(42)$$

を計算し、その最小値を全断面で用いた。河床変動量は各時間ステップごとに、また、予測子・修正子双方の段階において計算した。ちなみに、修正子段階における河床位の算定式は、式(38)に準じて、

$$z^c_i = 1/2 \cdot \{(z_i + z^p_i) + \Delta z^p_i\} \dots\dots\dots(43)$$

のようである。ここに、z^pは予測子段階で求められた河床位、Δz^pは予測子段階で求められた水量から計算される河床変動量である。すなわち、河床変動量の計算

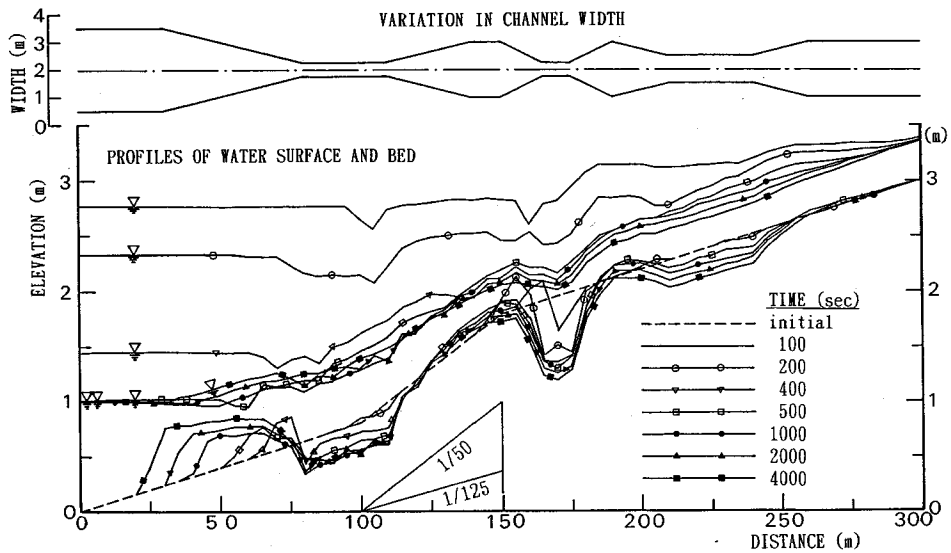


図-12 MacCormack法を利用した流れの遷移を伴う河床変動の計算例

にも一部にMC法の概念が取り入れられている。なお、上・下流端の河床変動量は流れの場合と同様に基礎式をbox schemeで離散化して求めた。

さて、図-12に示された水面形と河床形状の変化過程は、経験的に予想されるものとほとんど矛盾しない。すなわち、流れにおいては、 H_0 がある程度小さくなったのち、河幅が最小の狭窄部の前後と最下流部に発達するデルタの肩の付近で遷移が生じている。また、遷移断面間の水面形状もほぼ妥当なものである。一方、河床においては、下流端からの距離が約170m付近の急激な狭窄部で特に著しい洗掘が生じている。ここで洗掘された砂は一時的に河幅の拡大部でデルタを形成するが、このデルタは短時間の間に消滅している。また、下流端付近のデルタは、その肩の高さをほぼ一定の高さに保ちながら発達・前進している。以上より、本法は、流れの遷移を伴う河床変動問題の有力な数値解法であると判断できる。ただし、図ではさほど明瞭でないが、計算の内部では約800s経過以降、下流端からの距離が50~150mの区間の水面形と河床形に Δx の4倍の波長をもつノコギリ状の振動が生じ始めた。これは、最下流の跳水の地点を発生源とし、時間の経過とともに増幅しつつ上流に伝播した(2000sの計算結果参照)。また、流量も水深と同位相で振動した。このような解の振動は、物理的な意味をもつものでなく、不連続現象に対するMC法が本質的に有している不安定性であるが、現在のところこれを理論的に回避する手段はないようである。そこで、図-12にその結果を示した計算では、2000s以降、水深と流量の計算値の一部を変動の周期内で移動平均することにより強制的に平滑化した。4000sの結果では上

述のような変動がかなり押さえられているのは、そのためである。また、本計算は汎用計算機システムFACOM M-780/30(京都大学)を用いて行われたが、 $t=0\sim 5000\text{ s}$ の計算のCPU timeが約50sにも達した。これは Δt を水面波の伝播速度に基づいて決定したからである。河床変動量の計算の安定性に関しては、そのような Δt があまりにも過小であることはいうまでもない。この種の計算法を実用化する際には、従来どおりの不等流計算法では計算不能の区間にのみ限定して適用するなど計算時間を削減する工夫が必要である。

5. むすび

本研究では、流れの遷移が各所で発生する河道における一次元河床変動の数値解法の改善案を提示するとともに、その妥当性ならびに有用性を数値計算例に基づいて検討した。本研究の主要な成果を取りまとめて記述すると以下のようなものである。

(1) 流れの遷移が頻繁に生じる状態下における河床変動現象の基礎式系では、流れの非定常性を可能な限り考慮することが望ましい。このような観点より、本研究では、式(2)、(4)および式(5)を基礎式として用いた。

(2) 上述の基礎式系に対して特性帯の理論を適用し、式(20)のような擾乱の伝播速度の表示式を得た。これが与える伝播速度の特性を調べた結果、河床擾乱は上・下流2方向に伝播することが示唆された。

(3) 従来の河床変動量の計算法と安定条件の決定法は必ずしも最善のものではないことを指摘した。そして、これに代わる新たな計算法を提案し、簡単な条件の現象

モデルへの適用を通してその妥当性を検証した。実験・実測値に基づく検討は今後の課題とする。

(4) 著者らが誘導した河床変動量の計算法と不定流に対する MacCormack 法 (MC 法) とを組み合わせた河床変動の解析法を提案し、計算例を紹介した。本法は、流れの遷移を伴う河床変動問題の有力な解法になり得るが、実用化のためには、今後、MC 法に特有の数値振動の適切かつ合理的な抑制方法ならびに計算時間の削減方法を検討してゆく必要がある。

参 考 文 献

- 1) 石川忠晴・林 正男：常流・射流が混在する区間の不等流計算法，土木技術資料，25-3，pp.39~44，1983.
- 2) 渡邊康玄：常流・射流混在場での不等流計算，第44回土木学会年次学術講演会概要集，第2部門，pp.442~443，1989.
- 3) たとえば伊藤 剛編：数値計算の応用と基礎（水理学を中心として），アテネ出版，第5章，pp.89~99，1971.
- 4) 崇田徳彦・清水康行・北條紘次：MacCormack 法を用いた不定流計算，第45回土木学会年次学術講演会概要集，第2部門，pp.432~433，1990.
- 5) 潮田智道・河村三郎・中谷 剛：保存則系差分法のスキームの特性に関する考察，第45回土木学会年次学術講演会概要集，第2部門，pp.438~439，1990.
- 6) de Vries, M. : River-Bed Variation-Aggradation and degradation, Delft Hydraulic Laboratory Publication No. 107, 1973.
- 7) 鈴木幸一：混合砂河床の粒度変化について，第32回土木学会年次学術講演会概要集，第2部門，pp.420~421，1977.
- 8) 黒木幹男・岸 力・清水康行：河床変動の数値計算法に関する研究，第17回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集，pp.175~178，1980.
- 9) 道上正規・藤田正治・前田真吾：非平衡浮遊砂を考慮した急勾配水路における貯水池堆砂の計算法，水工学論文集，pp.367~372，1990.
- 10) 許 協慶・朱 鵬程（吉良八郎・今富正巳訳）：特性曲線法による河床変動問題の解析，農業土木学会誌，第37巻，第11号，pp.747~758，1970.
- 11) 日本機械学会編：流れの数値シミュレーション，コロナ社，第2章，1989.

(1990.10.29 受付)

IMPROVED NUMERICAL MODEL FOR ONE-DIMENSIONAL BED-LEVEL VARIATION ACCOMPANIED BY TRANSITION OF FLOW

Takeshi OKABE and Kazuo ASHIDA

This study is concerned with the prediction method for the one-dimensional bed-level variation in rivers where the transition between sub-critical flow and super-critical flow frequently takes place at arbitrary sections. A new numerical model to calculate the bed-level change in a finite time increment is derived on the basis of the theory of characteristic curve. In the analysis of the propagation of bed-level disturbance, the flow as well as the bed-level is considered to be unsteady. The proposed model is proved, through the application to numerical examples, to be reasonable for the numerical analysis of the bed-level variation phenomena accompanied by the transition of flow. It is also confirmed that a flood routing with the aid of MacCormack's scheme is useful for the analysis of the problems.