

投稿論文 (和文)
PAPER

緩やかな境界形状をもつ層流における 壁面せん断応力に関する研究

山田 正*・大前智敬**

本研究は緩やかな境界形状をもつ層流の壁面せん断応力とその分布特性を理論的に求めたものである。解析にあたってはナビエ-ストークス方程式に対して直交関係展開とレイノルズ数と壁面の緩やかさを示すパラメーターによる2重摂動展開を行っている。式展開では数式処理言語を用いコンピュータ上で高次項までを求めており、壁面せん断応力の境界形状との位相差を精度良く求めることができた。

Keywords : laminar flow, wall shear stress, phase lag, REDUCE

1. はじめに

河床波上の流れにおいては壁面せん断応力と波面との間に位相差が生じることが知られている。このことは河床波の発生を考えるうえで重要であり、Kennedy¹⁾、林²⁾らの研究によって初めて明らかにされた。その後著者ら^{3),4)}も河床波の発生に及ぼすせん断応力の分布に関して実験的、理論的研究を進めており、小規模河床波の発達を記述する方程式を導いている。ところで、上記の位相差を解析的に導いたものとしてMiles⁵⁾、Benjamin⁶⁾、Stewart⁷⁾、Davis^{8),9)}、Hsu¹⁰⁾、日野・宮永¹¹⁾、岩佐¹²⁾らの研究があり、数値計算により層流の場合を計算したものとJ. S. Lee, Y. C. Fungら¹³⁾の研究がある。本研究は松信¹⁴⁾の示した解析方法に従い、上記の位相差に関し層流中における河床波上の流れをより精度よく解析的に明らかにすることを目的とし、また、従来行われていなかった波高と位相差の関係について議論する。本研究では数式処理言語であるREDUCE¹⁵⁾を用い、高次摂動解を何らの省略も行うことなくコンピュータ上で求めている。

本研究は、層流中における壁面せん断応力とその分布に関して着目しており、小規模河床波の発生に及ぼす河床せん断応力の分布に関する基礎的知見を得る目的で層流を扱っている。

2. 基礎式および計算手法

(1) 問題設定および基礎方程式

図-1 (a) のような x 軸に関して対称な緩やかな波

* 正会員 工博 中央大学助教授 理工学部土木工学科 (〒112 文京区春日 1-13-27)

** 学生会員 北海道大学大学院 工学研究科

注1) ここでREDUCEとは、数値でなく数式の演算をコンピュータ上で実行するプログラムの支援ツールの1つで、Rand社から発売されているものである。

状境界をもつ流れを考える。壁面は、 $y=Hh(kx)$ ($h(kx)$ は無次元)で与え、流れは二次元定常流とする。ここで、 H :流路の半幅、 L :壁面境界の波長、 k :断面が非一様である領域の特性的長さの逆数(ここでは波長 L の逆数をとる、 $k=1/L$)、 $h(kx)$:境界断面の形状を与える関数(x について任意回微分可能とする)、 κ :断面の空間的变化の緩やかさを表す無次元パラメーター($\kappa=kH=H/L$)、 a :波高とする。 $\kappa=0$ の極限では断面は一様となり、流れは平面Poiseuille流に帰する。空間座標(x, y)の無次元化を行うと、 x 方向、 y 方向は、それぞれ

$$\xi = kx = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{Hh(kx)} = \frac{y}{Hh(\xi)} \dots\dots\dots (1)$$

となり、流れの領域は、 $-1 \leq \eta \leq 1$ で表される真っすぐな平行断面内部に写像される。渦度と流れ関数を用いると二次元のNavier-Stokesの方程式より次式を得る。

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 ϕ :流れ関数、 ω :渦度、 ν :動粘性係数である。式(1)を用いて式(2)の独立変数を (ξ, η) に変換すると、

$$\frac{\kappa}{h} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) = \frac{\nu}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \kappa^2 h^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{h'}{h} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \omega \right] \dots\dots\dots (3)$$

となる。

解析するにあたっては次の3つの条件を考慮する。

① ξ 軸に関して対称となる解、すなわち、

$$\phi(\xi, -\eta) = -\phi(\xi, \eta)$$

② $\eta = \pm 1$ において $u=0$ 、すなわち、

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_{\eta=\pm 1} = 0$$

③ $\eta = \pm 1$ において $v=0$ 、すなわち、

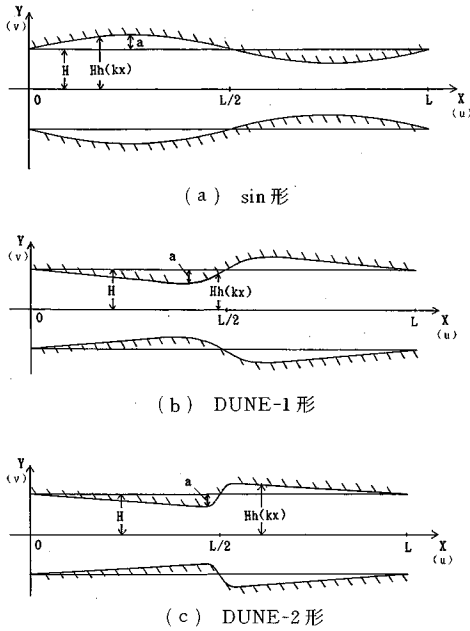


図-1 境界断面形状

$$\phi_{\eta=\pm 1} = \text{const}$$

本研究の解析で用いる波状境界面形を示しておく、図-1 (a) に示すような SIN 形および図-1 (b), (c) で示すような DUNE-1 形, DUNE-2 形である。

(2) 基礎方程式の展開

上記式 (2) あるいは式 (3) を解析するにあたり、本研究では松信⁽⁴⁾により初めて用いられた超球多項式 (または Gegenbauer 多項式) $C_n^{\lambda}(\eta)$ による展開方法を採用する。この理由は超球多項式は上記の条件 (1), (2), (3) をすべて満たしているからである。よって、流れの諸量を直交関数である超球多項式を用いて展開すると流れ関数 ϕ の展開は、

$$\phi = -\frac{1}{3}HU \sum_{n=1}^{\infty} h(\xi) A_{2n}(\xi) C_{2n+1}^{3/2}(\eta) \dots (4)$$

となる。ここで、 U : 代表流速、ここでは、幅 $2H$ の平行平板間のポアズイユ流れの最大流速をとる。 $A_{2n}(\xi)$: 超球多項式 $C_{2n+1}^{3/2}(\eta)$ に関する展開係数である。このような展開は超球多項式の直交性のために常に可能である。式 (4) をもとにして、流れの各諸量の展開形を求めると以下ようになる。

速度 u, v は以下のように表される。なお、本解析では、座標系は (ξ, η) 系であるが、流速成分はもとの直交座標 (x, y) 系のものである。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y} = U \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}(\xi) C_{2n}^{1/2}(\eta) \dots (5-a)$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \kappa U \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n+1}(\xi) C_{2n+1}^{1/2}(\eta) \dots (5-b)$$

渦度 ω に関しては以下ようになる。

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}(\xi) C_{2n-1}^{1/2}(\eta) \dots (6)$$

$$\nabla^2 \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{3U}{H^2} \sum_{n=1}^{\infty} N_{2n-1}(\xi) C_{2n-1}^{5/2}(\eta) \dots (7)$$

ここで本研究で着目するせん断応力 τ は、

$$\begin{aligned} \tau &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\mu U}{Hh(\xi)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_{2n}(\xi) + \kappa^2 D_{2n}(\xi) \right) C_{2n-1}^{1/2}(\eta) \dots (8) \end{aligned}$$

と表される。さらに、上記の展開係数間には以下に示す関係がある。

$$\begin{aligned} B_{2n+1}(\xi) &= \frac{2nh'(\xi)A_{2n}(\xi) - h(\xi)A_{2n}'(\xi)}{4n-1} \\ &\quad + \frac{(2n+1)h'(\xi)A_{2n+2}(\xi) + h(\xi)A_{2n+2}'(\xi)}{4n+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{2n}(\xi) &= \frac{(2n-1)h'(\xi)B_{2n-1}(\xi) - h(\xi)B_{2n-1}'(\xi)}{4n-3} \\ &\quad + \frac{2nh'(\xi)B_{2n+1}(\xi) + h(\xi)B_{2n+1}'(\xi)}{4n+1} \end{aligned}$$

$$\Omega_{2n}(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \left(A_{2n}(\xi) + \kappa^2 D_{2n}(\xi) \right)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2n+1}(\xi) &= \frac{h(\xi)\Omega_{2n}(\xi) - (2n-1)h'(\xi)\Omega_{2n}(\xi)}{(4n-1)h(\xi)} \\ &\quad - \frac{h(\xi)\Omega_{2n+2}(\xi) + (2n+2)h'(\xi)\Omega_{2n+2}(\xi)}{(4n+3)h(\xi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{2n+2}(\xi) &= \frac{h(\xi)\phi'_{2n+1}(\xi) - (2n-1)h'(\xi)\phi_{2n+1}(\xi)}{(4n+1)h(\xi)} \\ &= -\frac{h(\xi)\phi'_{2n+3}(\xi) + (2n+4)h'(\xi)\phi_{2n+3}(\xi)}{(4n+5)h(\xi)} \end{aligned}$$

$$N_{2n-1}(\xi) = \frac{1}{h(\xi)^2} \left(\Omega_{2n+2}(\xi) + \kappa^2 Z_{2n+2}(\xi) \right)$$

ここで、 Re : レイノルズ数で、 HU/ν で定義する。 $B_{2n+1}(\xi)$: 速度 u, v に関する展開係数、 $D_{2n}(\xi)$: 渦度 ω に関する展開係数、 $\Omega_{2n}(\xi)$: 渦度 ω に関する展開係数、 $\phi_{2n+1}(\xi)$: $\nabla^2 \omega$ に関する展開係数、 $Z_{2n+2}(\xi)$: $\nabla^2 \omega$ に関する展開係数、 $N_{2n-1}(\xi)$: $\nabla^2 \omega$ に関する展開係数である。' は ξ に関する微分である。これらを式 (3) に代入し整理すると解くべき基礎式は、

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} N_{2n-1}(\xi) C_{2n-1}^{5/2}(\eta) \\ &= \frac{1}{3} \kappa Re \left[\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}(\xi) C_{2n-1}^{1/2}(\eta) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}(\xi) C_{2n}^{1/2}(\eta) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3h(\xi)} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} (h(\xi)A_{2n}(\xi))' C_{2n+1}^{3/2}(\eta) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}(\xi) C_{2n-2}^{3/2}(\eta) \right\} \right] \dots (9) \end{aligned}$$

となる。

(3) 摂動法による解

前節で得られた式 (9) はパラメーターとして $\kappa \times$

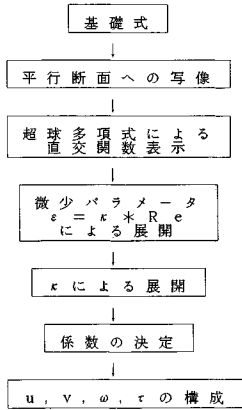


図-2 数式処理による固有関数展開および2パラメータによる2重摂動展開のフローチャート

Re (以後、 $\varepsilon = \kappa \times Re$ とする。)の形だけが現れている。よって、式(9)中の $h(\xi)$ 以外の ξ の関数を $\varepsilon = \kappa \times Re$ のべき級数に展開したのち、 ε の0次、1次、2次ごとに代数方程式が作りだされる。また、 Ω 、 N の形よりすべての未知数は κ^2 のべき級数に展開されることがわかる。よって、さらに A 、 Ω 等を κ^2 のべき級数で展開すると、それぞれの次数ごとの代数方程式が得られ、これを解くことになる。計算を行うにあたってはREDUCEによる数式処理を用い、 ε^2 、 κ^2 の項まで求めた。実際の計算では、 ε の0次、1次、2次までの各項をまとめ、次に κ の3次以上の項を0とする。 ε の0次、1次、2次でそれぞれ κ の0次、2次の項をとりだし代数方程式を数式処理で解く(付録B参照)。解析途中の結果は200以上の項数を含む膨大な式の羅列であり、人間の手計算で解を求めることはかなり困難なことである。図-2は、ここで述べた摂動解を求めるまでのフローチャートを示した。本研究の特徴は、2つのパラメータ ε 、 κ による2重摂動展開と超球多項式による展開に対して何らの省略を行うことなくコンピュータ上で数式処理を行い解を求めていることである。

3. 解析結果および考察

(1) SIN形をした河床波上の流れ

本節では前節で求めた解をもとにして壁面せん断応力を求めてみた。なお、本論文で壁面せん断応力というときは、壁面近傍で y 軸に垂直な面内でのせん断応力であり、後に示す図-8、10中の破線は壁面に接する方向のせん断応力を示している。境界断面形状は図-1(a)で示したようなSIN形である。図-3は壁面せん断応力の分布図、図-4は流線図の一例を示している。これらの図より以下のことがわかる。

- 1) 壁面せん断応力の最大値は境界断面のクレストの上流側にある。位相差 ϕ の壁面形状に対する上流

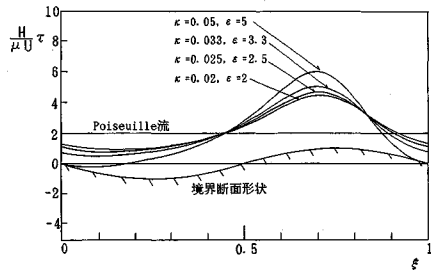


図-3 sin形の壁面せん断応力分布図 ($Re=100$, $a/H=0.3$) (以下の図で流れはすべて左から右)

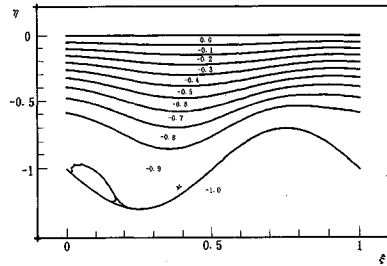


図-4 sin形の流線図 ($Re=100$, $\kappa=0.05$, $\varepsilon=5$, $a/H=0.3$)

側への進みがうかがえる。

- 2) 無次元波数 κ の値が小さくなるにつれ、すなわち波長が長くなるにつれ、壁面せん断応力の分布は平たくなり最大値は小さくなる。

また、図-4に示す流線図より境界断面のクレスト上よりもクレストのすぐ上流側において流線間隔は狭くなっており、流れが速くなっているのを見ることができる。このことが壁面せん断応力の上流側での増大を生んでいると考えられる。図-5(a), (b), (c)に位相差 ϕ と無次元波数 κ との関係を示す。図中の \rightarrow は \leftarrow より \rightarrow の領域では剥離が起きていることを示している。これらの図より以下のことがわかる。

- 1) 剥離の発生の有無にかかわらず、壁面せん断応力と波面との間に位相差 ϕ が生じており、その値は常に正である。このことより、位相差 ϕ が上流側に進んでいることがわかる。
- 2) 位相差 ϕ はある無次元波数 κ の値に対して極大値をとる。その値は Re 数が大きいほど大きくなり、ピークも顕著に現れる。
- 3) 図-5の(a), (b), (c)より他条件が同じなら、波高が小さいほど位相差 ϕ が大きい。波高をさらに小さくしていくと位相差 ϕ は大きくなるが位相差 ϕ 間の差は小さくなっていき、一定の値に収束する。
- 4) 剥離が生じたとき、その領域が大きくなるにつれ位相差 ϕ も大きくなる傾向がみられる。その傾向は Re が大きいほどはつきりする。

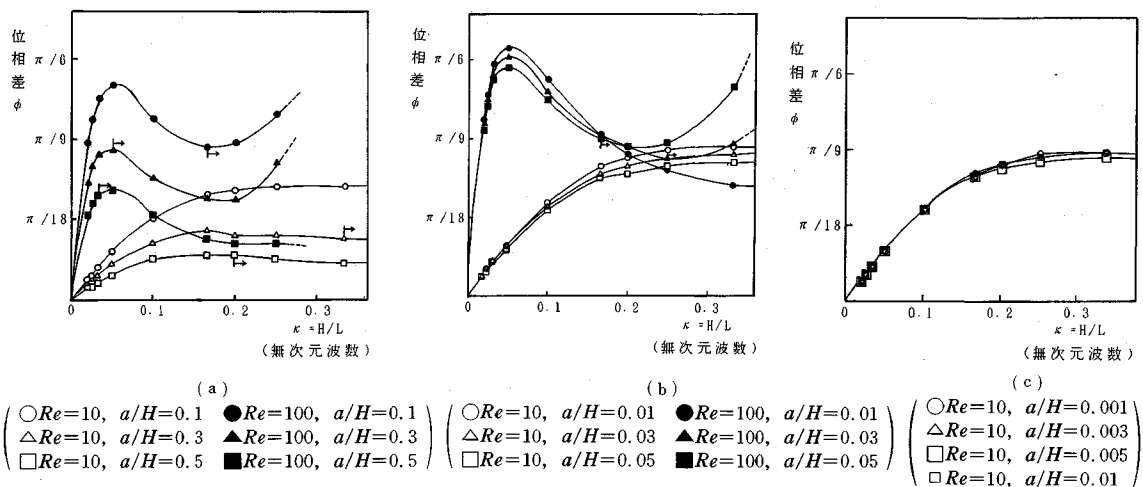


図-5 位相差 ϕ と無次元波数 κ の関係

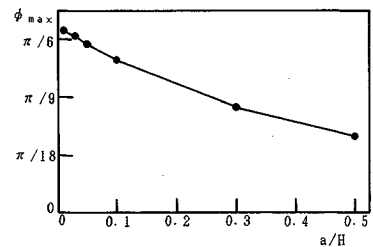


図-6 $Re=100$ における位相差 ϕ のピーク ϕ_{max} と波高 a/H の関係

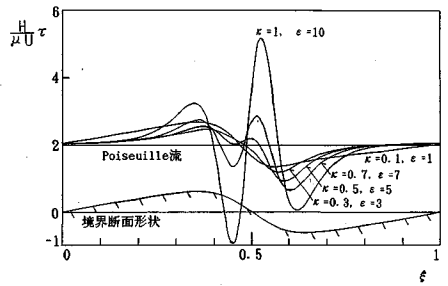


図-7 DUNE-1 形の壁面せん断応力分布図 ($Re=10, a/L=0.0121, A=0.2, t=5, \delta=1$)

5) 波高が大きいほど小さい無次元波数 κ の値において剝離が生じる。

上記 2) に示す位相差 ϕ のピーク値 ϕ_{max} に関して図-6 は $Re=100$ と波高 a/H との関係を示す。この図より底面の波高が大きくなるにつれて ϕ_{max} が小さくなっていくのが確かめられる。

(2) DUNE-1 形をした河床波上の流れ

ここでは図-1 (b) に示す断面形について解析を行った。断面の形状を与える関数として、

$$h(\xi) = 1 - \frac{A}{H} \cdot \frac{L}{t} \left[\left(\xi - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \tanh \left\{ \frac{L^2}{2\delta t} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \right\} \right] \quad (0 \leq \xi \leq 1) \dots\dots\dots (10)$$

を用いている。この式ではパラメーター A, t, δ および波長 L の値によって断面形状のなめらかさを変え得る。なお、図中の a と式中の A とは異なるものである。 L の値によって断面の形状が変わってしまうので \sin 形のとときは逆に H の値を変えることにより無次元波数 κ の値を変える。図-7 は壁面せん断応力の分布を示したものである。この図より以下に示す知見が得られた。

- 1) クレストのあたりで壁面せん断応力が極大値をとっている。位相差 ϕ は SIN 形のとときと比較して値は小さく下流側にずれる場合がある。

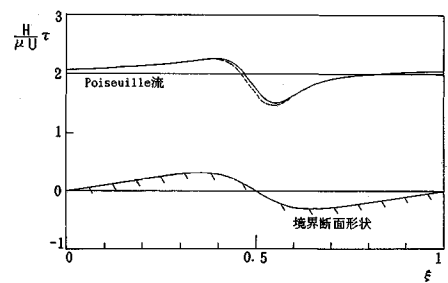


図-8 DUNE-1 形において、 $\kappa=0, \epsilon \neq 0$ としたときの壁面せん断応力 ($\kappa=0, \epsilon=5, Re=10, a/L=0.0121, A=0.2, t=5, \delta=1$)

- 2) 無次元波数 κ の値を大きくしていくと、壁面せん断応力は激しく変動する。無次元波数 κ の値が過大になると、その変動は物理的に不合理なほど上下に振れ (本文中には示していないが)、理論の適用限界をはずれる。

図-8 は本研究で得られる理論解に対してパラメーターの影響を調べる目的で $\kappa=0, \epsilon \neq 0$ として計算した結果を示したものである ($\epsilon=5$)。この結果、図-7 においては境界形状の変曲点近傍でとっていた極大値がなく

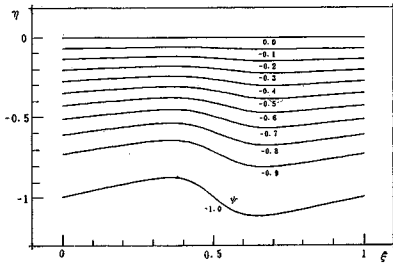


図-9 DUNE-1形の流線図
($Re=10, a/L=0.0121, \kappa=0.1, \varepsilon=1$)

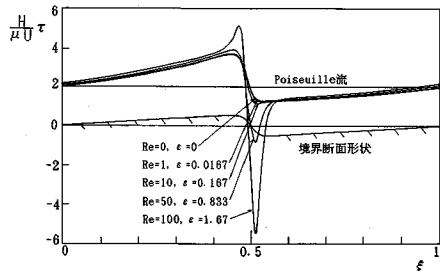


図-11 DUNE-2形の壁面せん断応力分布図
($\kappa=0.0167, a/L=0.0044, A=0.1, t=10, \delta=1$)

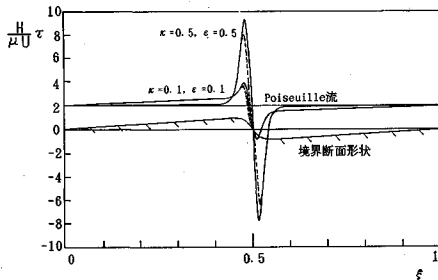


図-10 DUNE-2形の壁面せん断応力分布図
($Re=1, a/L=0.0133, A=0.03, t=1, \delta=1$)

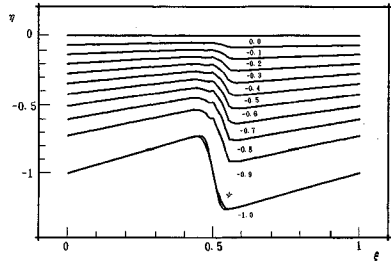


図-12 DUNE-2形の流線図
($Re=50, a/L=0.0044, \kappa=0.0167, \varepsilon=0.833$)

なっている。破線は壁面上に沿ったせん断応力を示している。図-9は流れの全体像を知る目的で $\kappa=0.1, \varepsilon=1$ の場合の流線を示したものである。この場合には図-4と異なり、流線間隔はクレストにおいて一番狭くなっており、ここにおいて壁面せん断応力は一番大きくなっている。

(3) DUNE-2形をした河床波上の流れ

式(10)において、パラメーター A, δ, t を変え、DUNE-1形よりも、変曲点あたりの角度をきつとした断面形について解析を行った(図-1(c))。解析方法はDUNE-1形の場合と同じである。図-10に示した壁面せん断応力分布をみると、

- 1) 変曲点あたりを境にして壁面せん断応力は極端に変化することが図-7と比較してわかる。
- 2) 位相差 ϕ は、DUNE-1形同様わずかにクレストの下流側にずれる場合がある。

破線は壁面に沿ったせん断応力を示しているが実線との差は小さい。次に無次元波数 κ の値を固定し、 Re の値を変えて計算を行ってみた。このとき計算結果を、図-11に示した。これより、

1) Re が小さければ(ε が小さければ)分布形はほとんど変化しない。 Re が大きいき(ε が大きいき)変曲点付近で大きく変動する。

2) 位相差 ϕ は、わずかにクレストの下流側にずれている。

図-12ではクレストの後部に剝離域がほとんど現れな

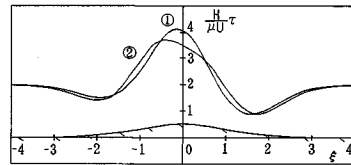


図-13 境界断面形状が $h=1-(a/H) \times \exp(-\xi^2/2)$ によって表されるときの壁面せん断応力分布図 ($a/H=0.05$)
① $\kappa=0, \varepsilon=100$ ② $\kappa=2, \varepsilon=100$

い $\kappa=0.0167, \varepsilon=0.833$ の場合の流線を示している。この図より、断面形の変曲点近傍で流線は小さく変動しているのがわかる。

(4) 無次元波数 κ の効果

本計算全体を通じて、無次元波数 κ の値の大小は、位相差 ϕ に対して敏感に働いていることがわかってきた。この節では、このパラメーターの働きをより具体的に知る目的で以下の計算を行ったものである。図-13は関数形が式(11)で与えられる断面形について解析した結果を示している。

$$h(\xi) = 1 - \frac{a}{H} \exp(-\xi^2/2) \dots \dots \dots (11)$$

ここで、 $a/H=0.05$ である。①は、 $L \rightarrow \infty$ とし、 $\kappa = H/L \rightarrow 0$ で、 $\varepsilon = \kappa \times Re = 100$ とおき、一方②は、 $Re=50, H=10$ とし、 L としては境界形状のすその間隔として $L=5$ をとり(H, L の単位は任意)、 $\kappa=2, \varepsilon=100$ として計算したものである。この図より、無次元波数 κ を考慮して計算したものの方が位相差 ϕ がより上流側に

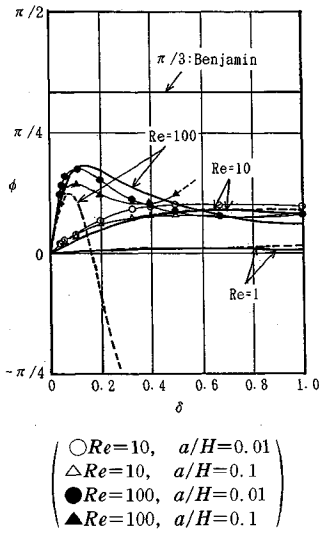


図-14 日野・宮永の解と著者らの解の比較

(太実線・破線：日野・宮永の解)
 (○△●▲：著者らの解)

ずれていることがわかり、解に対して無次元波数 κ の値が敏感に働いていることを示している。

4. 従来の研究との比較

本論文の最初にも述べたように、波状境界をもつ層流に関しては数多くの研究があるが、ここではその中で最も精度高く解析されていると思われる日野・宮永¹¹⁾の研究と比較する。日野・宮永は波状境界をもつ二次元管路の非圧縮で定常な層流を考え、正弦波形状の波面について解析を行っている。無次元パラメーター δ ($=h/l$: 相対管径) (h : 管の平均直径, l : 波面の波長) により基礎式を摂動展開し解を求めているが、本研究と異なる点は、彼らの解析では a/h (相対波高) (a : 波面の波高) というパラメーターを展開のなかにそのまま入れて行っていることである。本研究では波状境界面を一度平行断面に写像し流れの展開式を求めている。その展開式に波面の関数形を与えるとき初めて波高に関するパラメーターが出てくる。彼らの計算では解を求めるにあたり δ の3次の解において複雑な計算を避けるため a/h の2次以上の項を無視している。また、位相差と波形パラメーターの関係を求めるにあたっては、陽な形に解を求めるため、 δ の2次の項までとった無次元壁面せん断応力の式において a/h の2次以上の項を省略している。よって彼らの計算結果では、摂動パラメーター a/h の1次のオーダーでは壁面せん断応力の位相差は steepness a/h に無関係である。そのため、波高の大小による位相差の議論はできない。本研究においては REDUCE を用いることにより、高次摂動パラメーターを一切省略す

ることなく求めている。そのため、波形形状の関数式を与えるときに高次の波高パラメーター a/h をそのままとり入れて解析を行っている。よって、波高の変化による議論を行うことができる。以上より、摂動展開した時点ではわれわれの解は一般的な形状をした境界面に対して成立しているため、解の中に波高パラメーターは顕には現れてこない。この点が、日野・宮永と著者らの研究の最大の相違点といえよう。

図-14に位相差 ϕ と δ の関係において両者の計算結果を比較したものを示す。日野・宮永の研究において、太実線は δ の2次の項までをとったもので、破線は3次の項を加えたものである。本研究の結果に対しては、 $Re=100$ においては●、▲で、 $Re=10$ においては○、△で、波高 (a/H) の違いによって示している。ここで本研究で用いている κ と δ の関係は、 $\kappa = \delta/2$ である。この図より以下のことがわかる。

- 1) $Re=10$, $Re=100$ において全体的な形は似ており、両理論は同程度の精度を有していると思われる。 $Re=100$ における位相差のピークの値は本研究の方が小さい δ の値において起きている。
- 2) 著者らの計算では相対波高 a/h が小さいほど、位相差 ϕ は大きい。このことは、 Re 数の値に関係なくいえる。

このように、本研究では波高の変化により位相差 ϕ を議論することができる。なお、日野・宮永は層流流れの実験も行っており、流速分布の比較が行われているが、壁面せん断応力に関しては理論と実証するほどの実験数が少ないため、ここでは彼らの実験との比較はさしひかえる。

5. 結 論

本解析で得られた結果を要約すると、

- (1) 河床波上の流れにおいては壁面せん断応力と波面との間に位相差 ϕ が生じる。位相差 ϕ は、SIN 形のように緩やかな波面においてはクレストの上流側に進み、DUNE-1, 2 形のような波面の場合には、わずかにクレストの下流側に遅れる。これは DUNE-1, 2 形では上流面の縦断面形がほとんど直線であるためと思われる。
- (2) 波高が小さいほど位相差が大きくなる。波高を小さくしていくと、位相差は一定の値に収束していく。
- (3) 波高が小さいほど壁面せん断応力の変化も小さい。
- (4) 無次元波数 κ の値が小さいと、壁面せん断応力分布は平たくなる。
- (5) なめらかな形状をした DUNE-1 形と、急激な落ちこみを示す DUNE-2 形では、断面の変曲点において無次元波数 κ の値によっては激しく変動する解を得

る。そのため無次元波数 κ の値が過大になると理論の適用限界を越えてしまう。

6. おわりに

本研究は河床波の発生メカニズムあるいは定常な河床波の存在要因を得る目的で、解析的取扱いの容易な層流における壁面せん断応力の分布について検討を行ったものである。周知のごとく、河床波を議論するにあたっては、波高に対する壁面せん断応力と波面との間の位相差が重要となってくる。波高が小さいと位相差が大きく、河床波の発達を促す。波高が大きくなるにつれ位相差は小さくなり、河床波の発達をおさえるように働く。これが定常な河床波の生成をもたらす一つの要因であると考えられる。これについては、別途、小規模河床波の発生理論を展開する予定である。

付録 A 超球多項式 (Gegenbauer 多項式)

文献 14), 16) によると、超球多項式 $C_n^q(x)$ は次の微分方程式の解として定義されている。

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2} - (2q+1)x\frac{dw}{dx} + n(n+2q)w = 0$$

$C_n^q(x)$ は他の直交関数と同様に多くの再帰公式を有しており、これが式展開をおおいに簡易化し得る理由の一つである。これらの公式を REDUCE のプログラム内ではじめに憶え込ませておけば、以後の式展開では自動的に簡易化された式として表現される。さらに $C_n^q(x)$ は q が負の半奇数で n がある値以上の整数値のときはいつも $C_n^q(\pm 1) = 0$ であり、 $u, v(\pm 1) = 0$ の粘着条件を常に満たしている。これが、超球多項式展開を本研究に用いる理由の一つである。

付録 B 摂動法の概略とその解

流れ関数 ϕ を求めるにあたって、式 (4) 中の展開係数 $A_{2n}(\xi)$ を摂動展開した解を示す。ここで式 (4) より、

$$C_3^{-3/2}(1) = -1, C_{2n+1}^{-3/2}(1) = 0 \quad (n \geq 2) \text{ であるから } \phi \text{ は,}$$

$$\phi(\xi, 1) = \frac{1}{3}HUh(\xi)A_2(\xi) \dots \dots \dots \text{(B-1)}$$

となる。全流量の半分の値を示す定数を Q とすると $\phi(\xi, 1) \equiv Q$ となり式 (B-1) は、

$$A_2(\xi) = \frac{3Q}{HU} \frac{1}{h(\xi)} \dots \dots \dots \text{(B-2)}$$

と書くことができる。 U は二次元ポアズイユ流の中心速度であるから流量 $2Q$ 、幅 $2H$ とすると、 $Q = (2/3)HU$ となるので式 (B-2) は、

$$A_2(\xi) = \frac{2}{h(\xi)} \dots \dots \dots \text{(B-3)}$$

となる。また $C_3^{-3/2}(0) = 0, C_{2n+1}^{-3/2}(0) = 0 \quad (n \geq 2), C_3^{-3/2}$

$(-1) = 1, C_{2n+1}^{-3/2}(-1) = 0 \quad (n \geq 2)$ であるから式 (4) は、

$$\frac{\phi}{HU} \times \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} h(\xi)A_{2n}(\xi)C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \dots \dots \dots \text{(B-4)}$$

と書くことができる。

展開係数 $A_{2n}(\xi)$ をパラメーター ε で以下のように展開する。

$$A_{2n}(\xi) = A_{2n}^{(0)}(\xi) + \varepsilon A_{2n}^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 A_{2n}^{(2)}(\xi) + \dots \dots \dots \text{(B-5)}$$

ここで $A_2^{(0)}(\xi) = 2/h(\xi), A_j^{(j)}(\xi) = 0 \quad (j=1, 2, \dots)$ であることを考慮する。このことは $A_2(\xi)$ が式 (B-3) によって完全に決定されているからである。 $A_{2n}^{(0)}(\xi), A_{2n}^{(1)}(\xi), A_{2n}^{(2)}(\xi)$ をそれぞれ次のようにおく。

$$A_2^{(0)} = a_2^{(2,0)}$$

$$A_4^{(0)} = \kappa^2 a_2^{(4,0)} + \kappa^4 a_4^{(4,0)} + \dots \dots$$

$$A_6^{(0)} = \kappa^4 a_4^{(6,0)} + \dots \dots$$

$$A_4^{(1)} = a_0^{(4,1)} + \kappa^2 a_2^{(4,1)} + \dots \dots$$

$$A_6^{(1)} = a_0^{(6,1)} + \kappa^2 a_2^{(6,1)} + \dots \dots$$

$$A_8^{(1)} = \kappa^2 a_2^{(8,1)} + \dots \dots$$

$$A_4^{(2)} = a_0^{(4,2)} + \kappa^2 a_2^{(4,2)} + \dots \dots$$

$$A_6^{(2)} = a_0^{(6,2)} + \kappa^2 a_2^{(6,2)} + \dots \dots$$

$$A_8^{(2)} = a_0^{(8,2)} + \kappa^2 a_2^{(8,2)} + \dots \dots$$

$$A_{10}^{(2)} = a_0^{(10,2)} + \kappa^2 a_2^{(10,2)} + \dots \dots$$

$$A_{12}^{(2)} = \kappa^2 a_2^{(12,2)} + \dots \dots$$

ここで $a_0^{(2,0)} = 2/h$ は決定されているので、以下 κ^2 について次数の低いものから順次決定すると、

$$a_2^{(4,0)} = -\frac{16}{5} \frac{h'}{h} + \frac{4}{5} h''$$

$$a_4^{(4,0)} = \frac{48}{25} \frac{h'^4}{h} + \frac{4}{25} h'' h'^2 - \frac{2}{5} h''^2 h - \frac{8}{25} h'' h' h' + \frac{2}{75} h'' h^2$$

$$a_4^{(6,0)} = -\left(-\frac{16}{7} \frac{h'^4}{h} + \frac{16}{7} h'' h'^2 - \frac{8}{35} h''^2 h - \frac{32}{105} h'' h' h' + \frac{2}{105} h'' h^2 \right)$$

$$a_0^{(4,1)} = -\frac{8}{45} \frac{h'}{h}$$

$$a_0^{(6,1)} = \frac{8}{315} \frac{h'}{h}$$

$$a_2^{(4,1)} = -\left(-\frac{584}{17325} \frac{h'^3}{h} - \frac{1984}{17325} h'' h' + \frac{344}{51975} h'' h \right)$$

$$a_2^{(6,1)} = \frac{4376}{20475} \frac{h'^3}{h} - \frac{2672}{20475} h'' h' + \frac{472}{61425} h'' h$$

$$a_2^{(8,1)} = -\left(\frac{512}{15015} \frac{h'^3}{h} - \frac{16}{1001} h'' h' + \frac{16}{15015} h'' h \right)$$

$$a_0^{(4,2)} = -\frac{8128}{675675} \frac{h'^2}{h} + \frac{3616}{675675} h''$$

$$a_0^{(6,2)} = -\left(-\frac{2816}{429975} \frac{h'^2}{h} + \frac{992}{429975} h'' \right)$$

$$a_0^{(8,2)} = -\frac{1184}{765765} \frac{h'^2}{h} + \frac{128}{255255} h''$$

$$a_0^{(10,2)} = -\left(-\frac{128}{1\ 640\ 925} \frac{h'^2}{h} + \frac{64}{2\ 297\ 295} h''\right)$$

$$a_2^{(4,2)} = \frac{85\ 504}{23\ 648\ 625} \frac{h'^4}{h} + \frac{311\ 968}{23\ 648\ 625} h'' h'^2 - \frac{32}{4\ 125} h''^2 h$$

$$- \frac{15\ 584}{2\ 149\ 875} h'' h' h + \frac{3\ 424}{14\ 189\ 175} h^{IV} h^2$$

$$a_2^{(6,2)} = -\left(-\frac{85\ 504}{7\ 309\ 575} \frac{h'^4}{h} + \frac{155\ 648}{7\ 309\ 575} h'' h'^2$$

$$- \frac{160\ 448}{36\ 547\ 875} h''^2 h - \frac{172\ 672}{36\ 547\ 875} h''' h' h$$

$$+ \frac{26\ 816}{109\ 643\ 625} h^{IV} h^2\right)$$

$$a_2^{(8,2)} = -\frac{1\ 408}{181\ 545} \frac{h'^4}{h} + \frac{45\ 312}{5143\ 775} h'' h'^2$$

$$- \frac{649\ 312}{509\ 233\ 725} h''^2 h - \frac{1\ 999\ 136}{1\ 527\ 701\ 175} h''' h' h$$

$$+ \frac{102\ 016}{1\ 527\ 701\ 175} h^{IV} h^2$$

$$a_2^{(10,2)} = -\left(-\frac{51\ 776}{23\ 648\ 625} \frac{h'^4}{h} + \frac{109\ 568}{57\ 432\ 375} h'' h'^2$$

$$- \frac{1\ 367}{6\ 185\ 025} h''^2 h - \frac{259\ 552}{1\ 206\ 079\ 875} h''' h' h$$

$$+ \frac{64}{5\ 360\ 355} h^{IV} h^2\right)$$

$$a_2^{(12,2)} = -\frac{192\ 512}{152\ 7701\ 175} \frac{h'^4}{h} + \frac{22\ 816}{218\ 243\ 025} h'' h'^2$$

$$- \frac{1\ 504}{117\ 515\ 475} h''^2 h - \frac{48\ 544}{4\ 583\ 103\ 525} h''' h' h$$

$$+ \frac{3\ 424}{4\ 583\ 103\ 525} h^{IV} h^2$$

となる。以上の結果を用いて $A_{2n}^{(j)}(\xi)$ を κ^2 の項まで求めると、

$$A_2^{(0)} = \frac{2}{h}$$

$$A_4^{(0)} = \kappa^2 \left(-\frac{16}{5} \frac{h'^2}{h} + \frac{4}{5} h''\right)$$

$$A_6^{(0)} = A_8^{(0)} = \dots = 0$$

$$A_2^{(1)} = 0$$

$$A_4^{(1)} = -\left(\frac{8}{45} \frac{h'}{h} - \frac{584}{17\ 325} \frac{h'^3}{h} \kappa^2 - \frac{1\ 984}{17\ 325} h'' h' \kappa^2$$

$$+ \frac{344}{51\ 975} h''' h \kappa^2\right)$$

$$A_6^{(1)} = \frac{8}{315} \frac{h'}{h} + \frac{4\ 376}{20\ 475} \frac{h'^3}{h} \kappa^2$$

$$- \frac{2\ 672}{20\ 475} h'' h' \kappa^2 + \frac{472}{61\ 425} h''' h \kappa^2$$

$$A_8^{(1)} = -\kappa^2 \left(\frac{512}{15\ 015} \frac{h'^3}{h} - \frac{16}{1\ 001} h'' h + \frac{16}{15\ 015} h''' h\right)$$

$$A_{10}^{(1)} = A_{12}^{(1)} = \dots = 0$$

$$A_2^{(2)} = 0$$

$$A_4^{(2)} = -\frac{8\ 128}{675\ 675} \frac{h'^2}{h} + \frac{85\ 504}{23\ 648\ 625} \frac{h'^4}{h} \kappa^2 + \frac{3\ 616}{675\ 675} h''$$

$$+ \frac{311\ 968}{23\ 648\ 625} h'' h'^2 \kappa^2 - \frac{32}{4\ 125} h''^2 h \kappa^2$$

$$- \frac{15\ 584}{2\ 149\ 875} h''' h' h \kappa^2 + \frac{3\ 424}{1\ 489\ 175} h^{IV} h^2 \kappa^2$$

$$A_6^{(2)} = -\left(-\frac{2\ 816}{429\ 975} \frac{h'^2}{h} - \frac{85\ 504}{7\ 309\ 575} \frac{h'^4}{h} \kappa^2 + \frac{992}{429\ 975} h''$$

$$+ \frac{155\ 648}{7\ 309\ 575} h'' h'^2 \kappa^2 - \frac{160\ 448}{36\ 547\ 875} h''^2 h \kappa^2$$

$$- \frac{172\ 672}{36\ 547\ 875} h''' h' h \kappa^2 + \frac{26\ 816}{109\ 643\ 625} h^{IV} h^2 \kappa^2\right)$$

$$A_8^{(2)} = -\frac{1\ 184}{765\ 765} \frac{h'^2}{h} - \frac{1\ 408}{181\ 545} \frac{h'^4}{h} \kappa^2 + \frac{128}{255\ 255} h''$$

$$+ \frac{45\ 312}{5\ 143\ 775} h'' h'^2 \kappa^2 - \frac{649\ 312}{509\ 233\ 725} h''^2 h \kappa^2$$

$$- \frac{1\ 999\ 136}{1\ 527\ 701\ 175} h''' h' h \kappa^2 + \frac{102\ 016}{1\ 527\ 701\ 175} h^{IV} h^2 \kappa^2$$

$$A_{10}^{(2)} = -\left(-\frac{128}{1\ 640\ 925} \frac{h'^2}{h} - \frac{51\ 776}{23\ 648\ 625} \frac{h'^4}{h} \kappa^2$$

$$+ \frac{64}{2\ 297\ 295} h'' + \frac{109\ 568}{57\ 432\ 375} h'' h'^2 \kappa^2$$

$$- \frac{1\ 376}{6\ 185\ 025} h''^2 h \kappa^2 - \frac{259\ 552}{1\ 206\ 079\ 875} h''' h' h \kappa^2$$

$$+ \frac{64}{5\ 360\ 355} h^{IV} h^2 \kappa^2\right)$$

$$A_{12}^{(2)} = \kappa^2 \left(-\frac{192\ 512}{1\ 527\ 701\ 175} \frac{h'^4}{h} + \frac{22\ 816}{218\ 243\ 025} h'' h'^2$$

$$- \frac{1\ 504}{117\ 515\ 475} h''^2 h - \frac{48\ 544}{4\ 583\ 103\ 525} h''' h' h$$

$$+ \frac{3\ 424}{4\ 583\ 103\ 525} h^{IV} h^2\right)$$

$$A_{14}^{(2)} = A_{16}^{(2)} = \dots = 0$$

が得られる。よって式 (B-5) より κ^2 , ε^2 の項まで、 $A_{2n}(\xi)$ を求めると以下ようになる。

$$A_2 = \frac{2}{h}$$

$$A_4 = \{4 \times (4\ 280 h^{IV} h^3 \varepsilon^2 \kappa^2 - 128\ 568 h''' h' h^2 \varepsilon^2 \kappa^2$$

$$- 117\ 390 h'' h^2 \varepsilon \kappa^2 - 137\ 592 h''^2 h^2 \varepsilon^2 \kappa^2$$

$$+ 233\ 976 h'' h'^2 h \varepsilon^2 \kappa^2 + 2\ 031\ 120 h'' h' h \varepsilon \kappa^2$$

$$+ 94\ 920 h'' h \varepsilon^2 + 14\ 189\ 175 h'' h \kappa^2$$

$$+ 64\ 128 h'^4 \varepsilon^2 \kappa^2 + 597\ 870 h'^3 \varepsilon \kappa^2$$

$$- 213\ 360 h'^2 \varepsilon^2 - 56\ 756\ 700 h'^2 \kappa^2$$

$$- 3\ 153\ 150 h' \varepsilon)\} / (70\ 945\ 875 h)$$

$$A_6 = -\{8\varepsilon(3\ 352 h^{IV} h^3 \varepsilon \kappa^2 - 64\ 752 h''' h' h^2 \varepsilon \kappa^2$$

$$- 105\ 315 h'' h^2 \kappa^2 - 60\ 168 h''^2 h^2 \varepsilon \kappa^2$$

$$+ 291\ 840 h'' h'^2 h \varepsilon \kappa^2 + 1\ 788\ 570 h'' h' h \kappa^2$$

$$+ 31\ 620 h'' h \varepsilon - 160\ 320 h'^4 \varepsilon \kappa^2$$

$$- 2\ 929\ 185 h'^3 \kappa^2 - 89\ 760 h'^2 \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
 & -348\,075h^3) / (109\,643\,625h) \\
 A_8 = & \{16\varepsilon(6\,376h''h^3\varepsilon\kappa^2 - 124\,946h''h'h^2\varepsilon\kappa^2 \\
 & - 101\,745h''h^2\kappa^2 - 121\,746h''h^2\varepsilon\kappa^2 \\
 & + 841\,104h''h^2h\varepsilon\kappa^2 + 1\,526\,175h''h'h\kappa^2 \\
 & + 47\,880h''h\varepsilon - 740\,520h^4\varepsilon\kappa^2 \\
 & - 3\,255\,840h^3\kappa^2 - 147\,630h^2\varepsilon)\} \\
 & / (1\,527\,701\,175h) \\
 A_{10} = & -\{32\varepsilon^2(450h''h^3\kappa^2 - 8\,111h''h'h^2\kappa^2 \\
 & + 8\,385h''h^2\kappa^2 - 71\,904h''h'h\kappa^2 \\
 & + 1\,050h''h - 82\,518h^4\kappa^2 \\
 & - 2\,940h^2)\} / (1\,206\,079\,875h) \\
 A_{12} = & \{32\varepsilon^2\kappa^2(107h''h^3 - 1\,517h''h'h^2 - 1\,833h''h^2 \\
 & + 14\,973h''h^2h - 18\,048h^4)\} \\
 & / (4\,583\,103\,525h) \\
 A_{14} = & A_{16} = \dots = 0 \\
 & \dots \dots \dots (B-6)
 \end{aligned}$$

上記式 (B-6) の $A_{2n}(\xi)$ を本文式 (4) に代入することにより、任意の境界形状 $h(\xi)$ に対して ε の 2 乗, κ の 2 乗までの精度での流れ関数 ψ を求めることができる。

謝 辞：本研究は、文部省科学研究費・重点領域研究 (1) および一般研究 C (代表：山田 正) の補助のもとに行われている。ここに記して深甚なる謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) Kennedy, J.F. : The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channel, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.16, pp.521~544, 1963.
- 2) Hayashi, T. : Formation of dunes and antidunes in open channels, *Proc. ASCE*, Vol.96, Hy 2, pp.357~366, 1970.

- 3) 山田 正・池内正幸・植松正伸：小規模河床波の発生発達に関する研究，第 31 回水理講演会論文集，pp. 665~670, 1987.
- 4) 山田 正・竹本典道：空気流によるサンドリップルの発生発達に関する研究，第 32 回水理講演会論文集，pp. 479~484, 1988.
- 5) Miles, J.W. : On the generation of surface waves by shear flows, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.3, pp.185~204, 1957.
- 6) Benjamin, T.B. : Shearing flow over a wavy boundary, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.6, pp.161~205, 1950.
- 7) Stewart, R.H. : Laboratory studies of the velocity field over deep-water waves, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.42, pp.733~754, 1970.
- 8) Davis, R.E. : On the turbulent flow over a wavy boundary, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.42, pp.721~731, 1970.
- 9) Davis, R.E. : On prediction of the turbulent flow over a wavy boundary, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.52, pp.287~306, 1972.
- 10) Hsu, S.T. and Kennedy, J.F. : Turbulent flow in wavy pipes, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.47, pp.481~502, 1971.
- 11) 日野幹雄・宮永洋一：波状境界をもつ二次元管路流の解析，土木学会論文報告集，第 264 号，pp. 63~75, 1977.
- 12) Iwasa, Y. and Kennedy, J.F. : Free surface shear flow over a wavy bed, *Proc. ASCE*, Vol.94, Hy 2, pp.431~454, 1968.
- 13) Lee, J.S. and Fung, Y.C. : Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers, *Jour. of Applied Mech.*, Vol.37, pp.9~16, 1970.
- 14) 松信八十男：ゆるやかに断面の変化するみぞの中の粘性流体の流れ，慶応義塾大学日吉論文集，pp. 48~86, 1977.
- 15) 大前智敬：ゆるやかな境界形状をもつ層流に関する解析的研究，北海道大学土木工学科卒業論文，1988.
- 16) Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (eds.) : *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publ. Inc. New York, 1972. (1990. 4. 23 受付)

STUDY ON THE WALL SHEAR STRESS IN LAMINAR FLOW OVER WAVY BOUNDARY WITH MILD CURVATURE

Tadashi YAMADA and Satoyuki OOMAE

We analytically investigated the two-dimensional, steady laminar flow over wavy boundary with mild curvature with the aid of algebraic language (REDUCE). The adopted mathematical method are the series expansion of Navier-Stokes equation by the orthogonal function (Gegenbauer or ultraspherical) polynomials and the double perturbation expansion by two small parameters. In the present paper, the phase lag between the wall shear stress and the shape of the boundary is focussed on, and especially the behavior of the wall shear stress for the magnitude of relative steepness of boundary is discussed. The obtained results are ; (1) The smaller wave height is, the larger the phase lag is. When the wave height is further small, the phase lag approaches to a certain limiting value. (2) In the case of dune-like boundaries, the discernible phase lag can not be found. (3) The phase lag takes the maximum value for a value of wave number of the boundaries. The larger the Reynolds number is, the larger its peak is.