

# 有限領域に拘束された軸対称多層弾性体の解析

渡辺正平\*

半無限多層弾性体が表面に垂直荷重を受けた場合の応力や変位の解析は、Burmisterの問題として舗装の力学解析に広く利用されている。本論文は、有限領域に拘束された軸対称多層弾性体の解法を示した。これは、Fourier-Bessel展開と、無限級数を用いて応力関数法で解くもので、有限要素法による解析や、土層での載荷試験に有用と考えられる。なお、3種類の分布荷重を与え、拘束領域や荷重分布の違いが応力や表面変位に与える影響を、数値計算例によって調べた。

**Keywords :** elastic, axis-symmetric, layered, pavement, Fourier-Bessel expansion, finite region

## 1. ま え が き

半無限体の表面に垂直荷重を受ける一様弾性体に生じる応力や変位の解析は、周知の Boussinesq の問題である。水平方向に無限の広がりをもつが、有限の深さで変位が拘束された弾性体の解析例も公表されている<sup>1)~3)</sup>。さらに、半無限多層弾性体の解析法も知られており<sup>4)~12)</sup>、これは今日では Burmister の問題と称されて、舗装の力学解析のために広く利用されている。いずれの問題も弾性体は等方・等質材料との仮定のもとに線形解析するもので、軸対称問題では Love の応力関数式<sup>13)</sup>を利用して、無限積分を行う方法で解析される。

有限要素法によってもこの種の問題が取り扱われているが、その場合は非線形解析も可能とはいえ、やはり線形解析が基礎である。ところが、有限要素法では解析の領域が有限であるから、半無限領域を前提とする解析と有限要素法によるものとは正確には条件が一致しない。したがって、両者の解の対応性に問題が生じる。有限要素法では十分に大きな領域を定めれば良いとはいえ、大きい領域を対象とすれば時間的にも経済的にも負担であり、逆に領域が過小ならば解析の精度が問題となる。このことから、有限領域を対象とした解析解が存在すれば、有限要素法による解析に有用な参考資料となり得る。さらに、土層での実験に対しても、有限領域を対象とした解析解は実験結果の解釈の助けとなり、小規模な実験を行うことの有用性も増すと考えられる。

そこでここでは、有限の深さに刚性底面をもち、しかも側方にも変位拘束面をもつ軸対称多層弾性体の解析法を示す。これは Love の式を用い、Fourier-Bessel 展開による荷重強度分布と、無限級数による応力関数を与えるものである。そして、単層と2層系・3層系の問

題についての若干の例題をとりあげて数値計算し、拘束領域の大きさや荷重強度分布の違いが弾性体内の応力分布や表面たわみ分布などに与える影響を、従来から知られている有限の深さに底面をもつが側面が存在しない問題や、半無限体の問題に対する計算結果と比較して考察した。なお、与えた荷重強度分布は、等分布荷重と単層半無限体の円形載荷面のたわみを一樣とする荷重、それに放物線荷重の3種類である。

## 2. 問題の設定と解析法

Fig.1 に示す半径  $L$ 、深さ  $H$  の円筒領域内の  $n$  層系の弾性体が、半径  $a$  の表面円に  $z$  方向の分布荷重を受けているものとする。各層は等方等質の弾性体で構成され、第  $i$  層の弾性係数とポアソン比をそれぞれ  $E_i, \nu_i$  とする。円筒座標  $(r, z)$  の原点を Fig.1 に示す位置に定め、領域境界面における境界条件は、 $z$  方向の垂直応力  $\sigma_z$  と  $rz$  面のせん断応力  $\tau_{rz}$ 、および  $r$  方向変位  $u$ 、 $z$  方向変位  $w$  に対して次式で表されるものとする。

$$z=0 \quad \text{で} \quad \sigma_z = q(r), \quad \tau_{rz} = 0 \quad \dots \dots \dots (1-a)$$

$$z=H \quad \text{で} \quad w = 0, \quad u = 0 \quad \dots \dots \dots (1-b)$$

または、

$$z=H \quad \text{で} \quad w = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \dots \dots \dots (1-c)$$

$$r=L \quad \text{で} \quad u = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \dots \dots \dots (1-d)$$

ここで、自重を無視し、応力関数  $\phi_i$  を用いると、第  $i$  層における応力と変位は次式で表せる<sup>13)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zi} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-\nu_i) \nabla^2 \phi_i - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \right\} \\ \sigma_{ri} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu_i \nabla^2 \phi_i - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} \right\} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu_i \nabla^2 \phi_i - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right\} \\ \tau_{rzi} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-\nu_i) \nabla^2 \phi_i - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

\* 正会員 農博 鳥取大学助教授 農林総合科学科  
(〒680 鳥取市湖山町南 4-101)

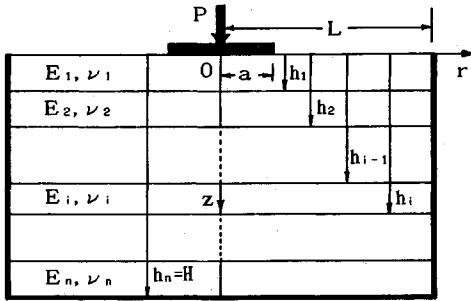


Fig.1 Definition sketch of the layered system.

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_i E_i}{1+\nu_i} &= \left\{ 2(1-\nu_i) \nabla^2 \phi_i - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \right\} \\ \frac{u_i E_i}{1+\nu_i} &= -\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r \partial z} \end{aligned} \right\}$$

ここに、 $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  はそれぞれ半径方向、円周方向の垂直応力であり、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dots (3)$$

である。そして、 $\phi_i$  は次の関係を満たす関数である。

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi_i = 0 \dots (4)$$

式(4)は適合条件式であると同時につり合い条件式を満たすのに必要な式である。いま、平均荷重強度を  $q_0$  とし、また、 $r=L\rho$ ,  $z=L\eta$ ,  $H=L\kappa$  と置き換え、境界条件を考慮して関数  $\phi_i$  として次式を与える。

$$\phi_i = q_0 L^3 \left[ A_{0i} \frac{\eta^3}{6} + B_{0i} \frac{\eta^2}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s^3} J_0(\lambda_s \rho) \{ A_{si} e^{zP} - B_{si} e^{zM} \} \right. \\ \left. + C_{si} \lambda_s \eta e^{zP} - D_{si} \lambda_s \eta e^{zM} \right] \dots (5)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} ZP &= -\lambda_s(\eta_i - \eta) \\ ZM &= -\lambda_s(\eta - \eta_{i-1}) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

である。なお、 $J_0$ ,  $J_1$  はそれぞれ第1種0次、1次のBessel関数、 $\lambda_s$  は  $J_1(x)$  の第  $s$  番目の零点である。

式(5)を式(2)に代入すれば、第  $i$  層の応力と変位は次式で与えられる。

$$\sigma_{zi}/q_0 = A_{0i}(1-\nu_i) + \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\lambda_s \rho) \\ \times \{ -A_{si} e^{zP} - B_{si} e^{zM} + C_{si}(P_i - \lambda_s \eta) e^{zP} \\ - D_{si}(P_i + \lambda_s \eta) e^{zM} \}$$

$$\sigma_{ri}/q_0 = A_{0i} \nu_i + \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\lambda_s \rho) \\ \times \{ A_{si} e^{zP} + B_{si} e^{zM} + C_{si}(Q_i + \lambda_s \eta) e^{zP} \\ - D_{si}(Q_i - \lambda_s \eta) e^{zM} \} \\ + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_s \rho)}{\lambda_s \rho} \{ -A_{si} e^{zP} - B_{si} e^{zM} \}$$

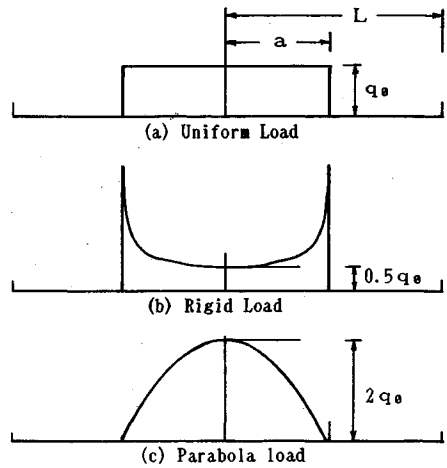


Fig.2 Load intensity distributions.

$$-C_{si}(1+\lambda_s \eta) e^{zP} + D_{si}(1-\lambda_s \eta) e^{zM}$$

$$\sigma_{ti}/q_0 = A_{0i} \nu_i + \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\lambda_s \rho) \\ \times \{ C_{si}(2\nu_i) e^{zP} - D_{si}(2\nu_i) e^{zM} \} \\ + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_s \rho)}{\lambda_s \rho} \{ A_{si} e^{zP} + B_{si} e^{zM} \\ + C_{si}(1+\lambda_s \eta) e^{zP} - D_{si}(1-\lambda_s \eta) e^{zM} \}$$

$$\tau_{rzi}/q_0 = \sum_{s=1}^{\infty} J_1(\lambda_s \rho) \{ A_{si} e^{zP} - B_{si} e^{zM} \\ + C_{si}(2\nu_i + \lambda_s \eta) e^{zP} + D_{si}(2\nu_i - \lambda_s \eta) e^{zM} \}$$

$$\frac{w_i E_i}{1+\nu_i} / (q_0 L) = (1-2\nu_i) (A_{0i} \eta + B_{0i}) \\ + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s} J_0(\lambda_s \rho) \{ -A_{si} e^{zP} + B_{si} e^{zM} \\ + C_{si}(2P_i - \lambda_s \eta) e^{zP} \\ + D_{si}(2P_i + \lambda_s \eta) e^{zM} \}$$

$$\frac{u_i E_i}{1+\nu_i} / (q_0 L) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s} J_1(\lambda_s \rho) \\ \times \{ A_{si} e^{zP} + B_{si} e^{zM} + C_{si}(1+\lambda_s \eta) e^{zP} \\ - D_{si}(1-\lambda_s \eta) e^{zM} \} \dots (7)$$

ここに、

$$P_i = 1 - 2\nu_i, \quad Q_i = 1 + 2\nu_i \dots (8)$$

である。ここで、 $A_{0i}$ ,  $B_{0i}$ ,  $A_{si}$ ,  $B_{si}$ ,  $C_{si}$ ,  $D_{si}$  は境界条件から定まる定数である。境界条件は式(1)のほかに、第  $i$  層と第  $i+1$  層の境界面において完全に粗と仮定すれば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zi} &= \sigma_{zi+1}, \quad \tau_{rzi} = \tau_{rzi+1} \\ w_i &= w_{i+1}, \quad u_i = u_{i+1} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

また、表面の荷重強度分布は Fourier-Bessel 展開に

よって次式で与える.

$$q(r) = q_0 \left\{ a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s J_0 \left( \lambda_s \frac{r}{L} \right) \right\} \dots\dots\dots(10)$$

ここで与えた荷重強度分布はFig.2に示す3種類であり,  $a_s$  は次のようになる. 等分布荷重ならば,

$$a_s = \frac{2a}{L \{J_0(\lambda_s)\}^2 \lambda_s} J_1 \left( \lambda_s \frac{a}{L} \right) \dots\dots\dots(11)$$

であり, 式(12)の分布をもつ関数ならば  $a_s$  は, 式(13)となる.

$$q(r) = \frac{q_0}{2\sqrt{1-(r/a)^2}} \dots\dots\dots(12)$$

$$a_s = \frac{a}{L \{J_0(\lambda_s)\}^2 \lambda_s} \sin \left( \lambda_s \frac{a}{L} \right) \dots\dots\dots(13)$$

式(12)による分布荷重を受けると, 半無限一様弾性体の円形載荷面の表面たわみ ( $w$ ) は一定となる<sup>14)</sup>. 以下ではこれを剛性分布荷重と称する. さらに, 放物線荷重ならば  $a_s$  は次式となる.

$$a_s = \frac{8}{\{\lambda_s J_0(\lambda_s)\}^2} J_2 \left( \lambda_s \frac{a}{L} \right) \dots\dots\dots(14)$$

タイヤによる接地圧分布は, 空気圧によっては放物線に近いとの報告もみられる<sup>15),16)</sup>. なお, 上記の3種類いずれの荷重強度分布でも,  $a_0$  は次式となる.

$$a_0 = (a/L)^2 \dots\dots\dots(15)$$

さて, 式(7)は式(1-d)の両式を満足している. いま,  $n$ 層系に対して  $s=m$ までの級数和を求めようとすれば,  $n$ 個ずつの  $A_{0i}$  と  $B_{0i}$  および  $m$ 個ずつの  $A_{si}$ ,  $B_{si}$ ,  $C_{si}$ ,  $D_{si}$ の未知定数の値を決定しなければならない. それらは式(7)を式(1-a)と式(1-b)または(1-c)および式(9)に代入し, さらに式(10)を用いて  $2n$ 元の連立一次方程式1個と  $4n$ 元の連立方程式を  $m$ 個解くことによって求められる. 得られた定数を式(7)に代入することによって応力と変位を求めることができる. このとき,  $s$ の増加に応じ定数と級数和は周期的な変動を示す. そこで, 級数和の1周期ごとの平均値を解とみなし, その解が所定の精度(0.00001)で収束すれば計算を終了する方法で計算した. 計算に使用した  $m$ の値は  $L, a, H$ の値に応じて異なるが, 最大800とした. なお, 計算はすべて倍精度で行った. そして, 京都大学大型計算機センターのFACOMを利用し, そのサブルーチンSSL II と NUMPAC を使用した.

### 3. 数値計算例

以下では, 単層と2層・3層系について, 拘束領域の大きさと荷重強度分布の差異が, 応力と表面たわみに及ぼす影響を, 深さが有限で側面がないものや半無限体における計算結果と対比しながら考察した. なお, 例題の選定にあたっては, できるだけ文献を参考にした.

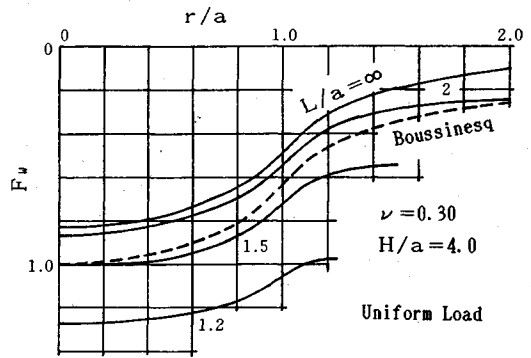


Fig.3 Effect of the side wall on the distribution of surface deflection (Uniform load,  $n=1$ ).

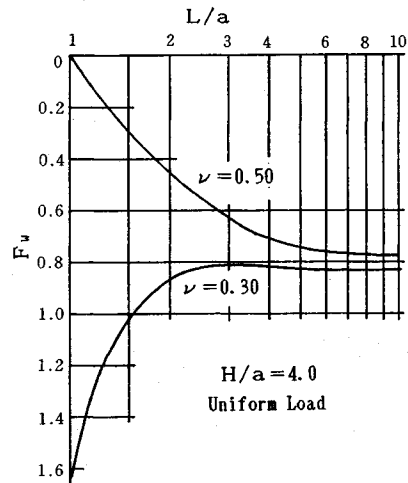


Fig.4 Relationship between side wall position and deflection at center (Uniform load,  $n=1$ ).

#### (1) 単層の表面たわみに及ぼす側面の影響

底面を有するが側面が存在しない ( $L=\infty$ ) 一様弾性体の解析の一例<sup>2)</sup>を参考にして, 側面の位置が表面たわみに及ぼす影響を調べた. いま,  $H/a=4$ のところに底面をもつ一様弾性体が等分布荷重を受けるとき, 側面の位置が  $L/a=1.2 \sim \infty$ と変化したことによる  $0 \leq r/a \leq 2$ の範囲における表面たわみの分布を Fig.3に示す. ここでは  $z=H$ において  $u=0$ (完全に粗)で,  $\nu=0.30$ とした. Fig.3における,  $L/a \geq 3$ のときの表面たわみは,  $L=\infty$ の場合との差異が微小となって図示しにくくなった. なお, ここに示した  $F_w$ とは, 表面たわみを, 等分布荷重を受けた半無限体の載荷中心における表面たわみで除した次式で求めた値である.

$$F_w = \frac{w}{w_0} = \frac{w}{-2(1-\nu^2)aq_0/E} \dots\dots\dots(16)$$

ところで,  $L/a$ の最小極限値は1であるが, このときは式(11)より  $a_s=0$ であり,  $A_s, B_s, C_s, D_s$ もいずれも零となって, すべての応力は一様となる. そして, 表

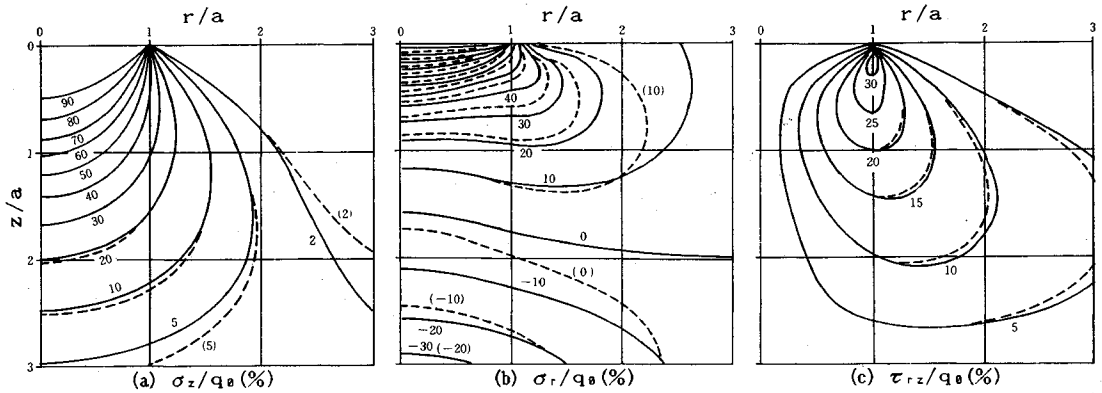


Fig.5 Contours of stresses in upper layer of two layered system. Solid line and broken line represent results for infinite body and finite body ( $H/a=10, L/a=6$ ) respectively (Uniform load,  $h_1/a=3, E_1/E_2=10, \nu_1=\nu_2=0.50$ ).

面たわみも同様で、次式となる。

$$w = \frac{-(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \kappa a q_0 \dots (17)$$

この関係は、別の方法で求められたもの<sup>17)</sup>と一致し、

$$F_w = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)^2} \kappa \dots (18)$$

となる。上記の例題では  $\kappa=4, \nu=0.30$  であるから、 $F_w=1.63$  となる。もし、非圧縮性弾性体、つまり  $\nu=0.50$  ならば  $L/a=1$  のときに  $F_w=0$  となる。いま、 $H/a=4$  として、 $\nu=0.30$  と  $\nu=0.50$  の場合の中心点の  $F_w$  と  $L/a$  の関係を求めると Fig.4 に示すとおりとなった。後に示すように、 $L/a$  の値が十分に大きい場合の  $F_w$  の値は  $L=\infty$  の場合の極限值よりも小さく、 $L$  の増加とともに漸増する。しかし、逆に摩擦がない側面が載荷円に極端に接近すれば、 $F_w$  は  $L/a=1$  のときのもう一方の極限值に急激に接近する。この例で  $\nu=0.30$  の場合は、 $L/a=3$  のときに  $F_w$  は最小となっている。

なお、ここに示した  $L=\infty$  の場合および半無限体に関する計算は上記の無限級数による方法ではなく、無限積分による式について行ったものである<sup>18)</sup>。そのとき用いた応力関数  $\phi_i$  は式 (5) とほぼ同様であるが、 $A_0=B_0=0$  で、 $\lambda_i$  が積分変数に代わるものである。そして、境界条件は式 (1) から式 (1-d) が削除され、 $n$  層系に底面が存在する場合には各積分点ごとに  $4n$  元の線形連立一次方程式を解いて未知係数を求めるが、半無限体の  $n$  層系ならば、 $A_{sn}=C_{sn}=0$  であり、連立方程式は  $(4n-2)$  元となる。後述の 2 層系・3 層系の場合も、 $L=\infty$  のものはこのプログラムで計算した。

(2) 2 層系の応力に及ぼす底面と側面の影響

例題として、 $H/a=3, E_1/E_2=10, \nu_1=\nu_2=0.50$  の 2 層弾性体の表面に等分布荷重を受けたものを考えた。半無限体のこの例題は Heukelom ら<sup>9)</sup> によって示され、三浦ら<sup>12)</sup> によって追試されている。このモデルで、 $H/a$

Table 1 Value of  $\sigma_{r1}/q_0$  at lower face of two layered system.

H/a	L/a		
	6	10	$\infty$
5	-0.214	-0.227	-0.234
10	-0.231	-0.304	-0.316
15	-0.231	-0.306	-0.330
20	-0.231	-0.306	-0.333
$\infty$	-	-	-0.334

$h_1/a=3, E_1/E_2=10, \nu_1=\nu_2=0.50$

$=10, L/a=6$  の場合と、半無限体の場合における第 1 層の  $0 \leq r/a \leq 3$  の範囲について応力分布を調べた。

Fig.5(a)~(c) に、256 個の等間隔の格子点と、 $r=a, z=0$  付近での補足点における計算値から描いた 3 種類の応力と平均荷重強度との比つまり相対応力 (%) のコンターを示す。実線が半無限体、破線が有限領域のものである。Fig.5(a) によると、 $\sigma_z$  が比較的大きい部分は拘束面の影響を認めにくい。このことは、 $\sigma_z$  が大きな部分は応力境界面に近いことによるものである。Fig.5(c) の  $\tau_{rz}$  の場合は、応力が同じであっても、応力境界面から遠ざかるにつれて変位拘束面の影響がより顕著に現れている。Fig.5(b) に示された  $\sigma_r$  をみると、やはり応力境界面付近の応力は変位拘束面の影響を受けにくい。そこから遠ざかるにつれて有限領域のものと半無限体のものとの差が大きくなっている。この例では、半無限体での 30% のコンターと有限領域での 20% のものが偶然一致している。応力分布としては、 $\sigma_r$  のものもあるが、これは  $\sigma_r$  のものと似たものであった。ここではそれを省略する。

舗装の解析においては、層下面中央での水平方向の引張応力あるいは引張ひずみにしばしば注目される。この例での上層下面中央の  $\sigma_{r1}/q_0$  の値は、半無限体では -0.334、有限領域ではその 69% の -0.231 である。さらに底面と側面の位置を変えてこの点の相対応力を算定すると、Table 1 に示すとおりとなった。これによる

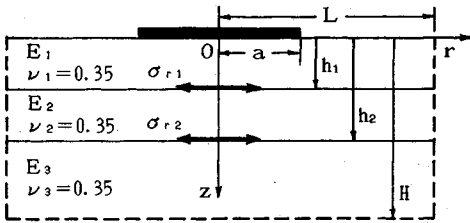


Fig. 6 Model of three layered system.

Table 2 Parameters of three layered models.

Model	A	B	C(a)	C(b)	C(c)	C(d)	C(e)
a (cm)	15	15	17	17	17	17	17
h1 (cm)	5	5	10	10	10	10	10
h2 (cm)	25	25	45	45	45	45	45
H (cm)			∞	245	245	245	245
L (cm)			∞	∞	510	340	170
E1/E2	5	10	4	4	4	4	4
E2/E3	5	10	5	5	5	5	5

$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.35$

と、 $L/a=6$ でも $10$ でも $H/a \geq 10$ であれば、 $H$ の値が変化しても $\sigma_n/q_0$ の値は一定で底面の深さの影響はみられない。ここで、 $L/a=10$ のときは、 $H/a=10$ でも $\sigma_n/q_0$ の値は半無限体のものの91%であり、さらに $L=\infty$ ならば95%となって $\sigma_n$ に及ぼす側面の影響が $L/a=6$ の場合よりも小さくなっている。

なお、上記の256点における4種の応力を計算するための時間は、半無限体のときは490s、有限領域のときは16sであった。級数のプログラムならばいったん求めた定数の値を各点での各応力の計算のために保存できるが、積分の場合はそれがやりにくい。

(3) 3層系における応力

いま、3層モデルとしてFig.6に示すものを考え、その寸法と弾性係数比をTable 2のように与えた。ここでモデルAとモデルBについては、 $H/a$ と $L/a$ の値を4~10と $\infty$ に変えて与えた。また、底面における境界条件は、 $u=0$ とした。まず、半無限体の3層モデルAとBが3種類の分布荷重を受けた場合の、第1層と第2層の下面中央( $r=0$ )における $\sigma_{r1}/q_0$ と $\sigma_{r2}/q_0$ の値をTable 3に示す。これによると、荷重強度分布が異なると $\sigma_{r1}$ はA、Bいずれのモデルでも大きく異なるが、 $\sigma_{r2}$ は応力境界面から離れているから、荷重強度分布差の影響を受ける程度が第1層よりも小さくなっている。なお、 $\sigma_r/q_0$ が負ならば $\sigma_r$ は引張である。

次に、拘束領域の大きさが $\sigma_{r1}$ と $\sigma_{r2}$ に及ぼす影響を、モデルAが等分布荷重を受ける場合について示すとTable 4のとおりとなった。これによると、 $H \geq L$ となれば、 $\sigma_{r1}$ と $\sigma_{r2}$ の値は $H$ の値にほとんど依存しない結果となっている。また、同じ $H$ では、 $L$ を大きくすることによって $\sigma_{r2}$ の値が $L=\infty$ のときの値に近づいている。Table 4の $L=\infty$ 、 $H=\infty$ のものは半無限体である。

Table 3 Radial stresses at lower face of layers in three layered models.

Model	Load	$\sigma_{r1}/q_0$	$\sigma_{r2}/q_0$
A	Uniform	-0.343	-0.415
	Rigid	+0.123	-0.370
	Parabola	-1.251	-0.464
B	Uniform	-1.662	-0.574
	Rigid	-0.664	-0.526
	Parabola	-3.273	-0.625

$L=\infty, H=\infty$

Table 4 Radial stresses in three layered model A (Uniform load).

(a)  $\sigma_{r1}/q_0$

H/a	L/a				
	4	6	8	10	$\infty$
4	-0.467	-0.438	-0.445	-0.452	-0.458
6	-0.463	-0.411	-0.399	-0.403	-0.414
8	-0.463	-0.407	-0.385	-0.381	-0.392
10	-0.463	-0.407	-0.382	-0.373	-0.379
$\infty$	-	-	-	-	-0.343

(b)  $\sigma_{r2}/q_0$

H/a	L/a				
	4	6	8	10	$\infty$
4	-0.324	-0.372	-0.374	-0.374	-0.375
6	-0.326	-0.389	-0.402	-0.403	-0.403
8	-0.326	-0.390	-0.407	-0.410	-0.411
10	-0.326	-0.390	-0.407	-0.412	-0.414
$\infty$	-	-	-	-	-0.415

Table 5 Difference of radial stresses for infinite body and for finite body.

(a) Three layered model A (Uniform load)

H/a	$E_{r1(L,L)}$			
	$E_{r1(L,L)}$	$E_{r1(L,\infty)}$	$E_{r2(L,L)}$	$E_{r2(L,\infty)}$
4	0.124	0.115	-0.091	-0.040
6	0.068	0.071	-0.026	-0.012
8	0.042	0.049	-0.008	-0.004
10	0.030	0.036	-0.003	-0.001

(b) Three layered model B (Uniform load)

H/a	$E_{r1(L,L)}$			
	$E_{r1(L,L)}$	$E_{r1(L,\infty)}$	$E_{r2(L,L)}$	$E_{r2(L,\infty)}$
4	-0.116	-0.114	-0.178	-0.073
6	-0.092	-0.085	-0.070	-0.031
8	-0.063	-0.064	-0.029	-0.015
10	-0.045	-0.050	-0.013	-0.008

$E_{r1(L,L)} = \sigma_{r1(L,L)}/q_0 - \sigma_{r1(L,L)}/q_0$   
 $E_{r1(L,\infty)} = \sigma_{r1(L,\infty)}/q_0 - \sigma_{r1(L,\infty)}/q_0$   
 $E_{r2(L,L)} = \sigma_{r2(L,L)}/q_0 - \sigma_{r2(L,L)}/q_0$   
 $E_{r2(L,\infty)} = \sigma_{r2(L,\infty)}/q_0 - \sigma_{r2(L,\infty)}/q_0$   
 $\sigma_r(L,L) : \sigma_r$  for  $L=H$   
 $\sigma_r(L,\infty) : \sigma_r$  for  $L=\infty$   
 $\sigma_r(\infty,\infty) : \sigma_r$  for  $L=\infty$  and  $H=\infty$

そこで、この場合の $\sigma_{r1}/q_0$ の値と $L=H$ の場合の値との差、および $L=\infty$ の場合の値との差を、モデルBのものを含めて求めると、Table 5に示すとおりとなる。これによると、拘束領域の拡大に伴って $\sigma_{r1}$ も $\sigma_{r2}$ も半無限体のときの値に近づいている。

ところで、Table 5に示されたような絶対誤差を剛性分布荷重と放物線荷重についても算定すると、Table 5の値と小数3桁目が $\pm 1$ 異なるのみであった。したがって、Table 3には半無限体が3種類の分布荷重を受けた場合の $\sigma_{r1}/q_0$ と $\sigma_{r2}/q_0$ の値が与えられているから、この表の値と、等分布荷重に関するTable 5の値から、他

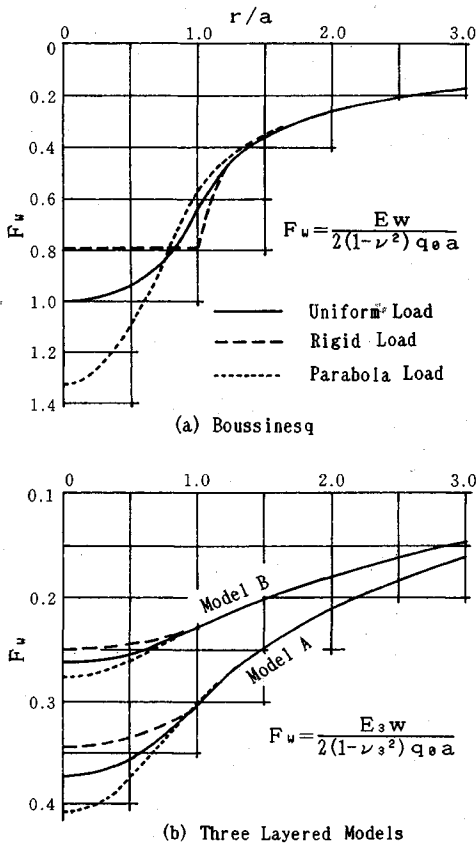


Fig.7 Distributions of surface deflection.

の2種の分布荷重を受けた底面を有する3層モデルの、 $L/a=H/a=4, 6, 8, 10$  および  $L=\infty$  のときの  $\sigma_{r1}/q_0$  と  $\sigma_{r2}/q_0$  の値を計算できる。

(4) 表面たわみの分布

舗装の合理的設計を目指して実施される平板載荷試験や Benkelman Beam 試験, Falling Weight Deflectometer などによる試験で得られた表面たわみのデータを、軸対称多層弾性体の式に適用して種々の解析が行われている。その際の荷重分布としては、ほとんどの場合に等分布荷重が用いられている。ところが、単層の半無限体では、等分布荷重によって生じる載荷中心のたわみと載荷円周のたわみの比は  $\pi/2$  であり<sup>14)</sup>、載荷円周のたわみは、中心点のその64%程度である。このことから、単層半無限体に対する載荷試験での表面たわみデータに、等分布荷重による式を適用することは問題があるかとも思われる。いま、単層半無限体が3種類の分布荷重を受けたときの表面たわみ分布を、 $0 \leq r/a \leq 3$  の範囲について示すと Fig.7(a) のようになる。載荷半径の約1.5倍以内ならば、荷重強度分布が異なることによって表面たわみも異なるが、それより外側では、どの分布荷重を受けても表面たわみはほぼ同じとなっている。

Table 6 Ratio of deflection at loading edge and that at center ( $w_{edge}/w_0$ ).

Load	Model	L	H/a				
			4	6	8	10	$\infty$
Uniform	1 Layer	H	0.55	0.58	0.60	0.61	-
		$\infty$	0.56	0.59	0.60	0.61	0.64
	Model A	H	0.59	0.68	0.72	0.74	-
		$\infty$	0.71	0.74	0.76	0.77	0.81
	Model B	H	0.61	0.71	0.77	0.79	-
		$\infty$	0.77	0.81	0.82	0.83	0.87
Rigid	1 Layer	H	0.98	0.97	0.97	0.98	-
		$\infty$	1.00	0.99	0.99	0.99	0.99
	Model A	H	0.74	0.80	0.83	0.84	-
		$\infty$	0.82	0.85	0.86	0.87	0.89
	Model B	H	0.71	0.79	0.83	0.86	-
		$\infty$	0.84	0.87	0.88	0.88	0.91
Parabola	1 Layer	H	0.33	0.36	0.38	0.39	-
		$\infty$	0.34	0.37	0.38	0.39	0.42
	Model A	H	0.47	0.57	0.60	0.65	-
		$\infty$	0.60	0.65	0.67	0.69	0.73
	Model B	H	0.52	0.64	0.70	0.73	-
		$\infty$	0.70	0.75	0.77	0.78	0.83

次に、半無限体の2つの3層モデルがそれぞれ3種類の分布荷重を受けたときの表面たわみ分布を Fig.7(b) に示す。3層系での  $F_w$  は、式(16)の  $E$  と  $\nu$  を  $E_3$ ,  $\nu_3$  としたものである。また、 $L=H$  と  $L=\infty$  および半無限体の載荷円周における表面たわみ ( $w_{edge}$ ) と載荷中心でのそれ ( $w_0$ ) との比を Table 6 に示す。これらによると、3層モデルでは、半無限体のときほどは荷重強度分布の差異が表面たわみ分布の差異に現れていない。等分布荷重を受けた場合の3層モデルAの載荷円周の表面たわみは中心のもの81%、3層モデルBでは87%となっており、単層の場合よりは、載荷面のたわみが大きく均平化している。放物線荷重でも、3層系は単層よりも載荷面のたわみが均平化している。荷重強度分布の違いが中心点の表面たわみに及ぼす影響も、単層よりも3層モデルの方が小さい。単層では剛性分布荷重と放物線荷重による中心点の表面たわみは、それぞれ等分布荷重の場合の0.79倍と1.33倍であるが、モデルAでは0.92倍と1.10倍、それよりも弾性係数比が大きいモデルBでは0.95倍と1.06倍となっており、単層よりは3層モデルの方が荷重分布の違いによる中心点の表面たわみの差も小さくなっている。さらに、単層では荷重強度分布が異なれば載荷円周のたわみも明確に異なっているが、2つの3層モデルでは、この点のたわみはどの荷重を受けてもほぼ等しいものとなっている。

また、Table 6 によると、載荷面のたわみ比は単層では  $L=H$  でも  $L=\infty$  でもほぼ等しいが、3層系では  $L=H$  のときよりも  $L=\infty$  のときの方が大きい。つまり、3層系では側面の存在が載荷面のたわみの均平度を小さくしている。ただし、底面の深さ  $H$  が大きい方が載荷面たわみ比が大きくなって、たわみが均平化している。

近年は表面たわみ分布から舗装各層の弾性係数を求める試みがしばしば行われている。そこで、著者のプログ

Table 7 Surface deflections of three layered models-C (mm).

Model	Load	r (mm)				
		0	200	400	900	1500
C(a)	CHEVRON <sup>19)</sup>	0.460	0.356	0.259	0.155	0.097
	Uniform	0.460	0.356	0.259	0.155	0.097
	Rigid	0.428	0.357	0.259	0.155	0.097
	Parabola	0.503	0.356	0.259	0.155	0.097
C(b)	CHEVRON <sup>19)</sup>	0.386	0.282	0.186	0.085	0.032
	Uniform	0.386	0.282	0.186	0.085	0.032
C(c)	Uniform	0.378	0.274	0.178	0.077	0.024
C(d)	Uniform	0.367	0.263	0.167	0.066	0.012
C(e)	Uniform	0.303	0.200	0.104	0.009	-0.029

$E_3=1000\text{kgf/cm}^2$  (98GPa),  $P=5\text{tf}$  (49kN)

ラムの検定を兼ねて、Table 2 に示した 3 層モデル C についてさらに計算を行った。モデル C (a) は半無限体であり、モデル C (b~e) は第 3 層の層厚が有限である。モデル C (c~e) は側面の位置をそれぞれ  $L/a=30, 20, 10$  としたものである。モデル C (a) と C (b) については CHEVRON のプログラムを用いた松井ら<sup>19)</sup> による計算値が示されている。ただし、その場合のモデル C (b) は、 $E_3/E_4=0.001$  とした 4 層系で、第 4 層を剛性層とみなした疑似 3 層系である。このような方法で計算された例はほかにも報告されている<sup>20), 21)</sup>。

いま、Table 7 に、3 層モデル C が  $P=5\text{tf}$  (49 kN) の荷重を受けたときの表面たわみの分布を示す。これによると、半無限体のモデル C (a) では、載荷中心の表面たわみは荷重強度分布の違いによる影響を受けるが、それ以外の点の表面たわみにはその影響はみられない。各種の載荷試験での荷重強度分布を正確に求めることは容易でないが、測定たわみ分布と荷重強度分布との関係において特に問題となるのは、載荷中心の表面たわみのみであるといえる。さらに、側面の位置が異なることによって表面たわみが異なっている。モデル C (c) では 0.008 mm、モデル C (d) では 0.019 mm それぞれ  $L=\infty$  のときに比べて表面たわみがほぼ一様に小さくなっている。モデル C (e) のように  $L=10a$  と狭ければ、載荷中心のたわみは  $L=\infty$  のときのその 78 % 程度であり、しかも  $r=150\text{ cm}$  においては負のたわみとなっている。

なお、ここで Fig.4 と同様に、載荷中心点の  $F_w$  と  $L/a$  の関係を求めてみた。その結果、 $L/a=1$  において極限值  $F_w=0.256$  で、 $L/a$  の値の増加に伴って  $F_w$  の値は減少するが、 $L/a=2.6$  のときに  $F_w=0.109$  で最小となり、その後また増加して Table 7 に示した  $w=0.386\text{ mm}$  に相当する  $F_w=0.235$  に漸近した。

#### 4. 結 論

本論文では、底面と側面で変位が拘束された有限領域における軸対称多層弾性体が、鉛直荷重を受けるときの応力と変位の解析法を示した。そして、半無限体におけるものを含めた若干の計算例から、拘束領域の大きさと

荷重強度分布の違いが応力と表面たわみに及ぼす影響について考察した。以下に、結果を要約する。

(1) 表面の円形面に作用する荷重強度分布を Fourier-Bessel 展開によって与え、Love の応力関数式に無限級数を使用して解析した。与えた荷重強度分布は、等分布荷重と単層半無限体の載荷面のたわみを一樣とする荷重 (剛性分布荷重)、それに放物線荷重の 3 種類である。有限領域に対する計算時間は、無限積分による半無限体に対する計算時間よりも格段に短いものであった。

(2) 有限領域の弾性体が荷重を受けると、応力境界面である表面付近の応力は半無限体のものとの差が小さいが、そこから遠くなればその差が次第に大きくなる。

(3) 3 層モデルの第 1 層の下面中心における水平方向応力  $\sigma_{r1}$  は荷重強度分布の差異の影響を大きく受けるが、第 2 層の同様の応力  $\sigma_{r2}$  はその影響の度合いが小さい。また、半無限体のときに生じるこれらの  $\sigma_{r1}$  と  $\sigma_{r2}$  の値と有限領域のときに生じるものとの絶対誤差は、荷重強度分布の差異にほとんど依存しない。

(4) 荷重強度分布が異なれば、単層半無限体の載荷面たわみが大きく異なるが、3 層系ならばその違いが緩和される。有限領域に拘束されると、半無限体よりも載荷中心と載荷円周での表面たわみの差が大きくなる。

(5) 例題による 3 層モデルでは、荷重強度の分布が異なれば載荷中心の表面たわみが異なるが、載荷半径より遠くの点の表面たわみはどの分布荷重を受けてもほぼ同じである。側面が載荷面から十分に離れて存在しているときの表面たわみは半無限体のものより小さくなり、両者の差は遠方でも解消しない。

なお、種々の載荷試験の際に生じる接地圧応力の分布を求めることは容易ではないが、広く利用されている半無限体のプログラムである BISAR や CHEVRON では、等分布荷重が前提とされているようである。これらのプログラムに若干の修正を加えれば、少なくともこの論文に示したあと 2 つの分布荷重での計算も可能と思える。舗装面に作用する荷重強度分布の違いが諸種の解析に無視し得るかどうか、今後の検討課題ではないかとも考えている。

#### 参 考 文 献

- 1) 松村孫治：弾性地盤に於ける基礎の沈下に関する理論的研究，土木学会誌，Vol. 17, No. 9, pp. 813~869, 1931.
- 2) Poulos, H.G. and Davis, E.H. : Elastic Solutions of Soil and Rock Mechanics, John Wiley & Sons, Inc., pp.111~113, 1974.
- 3) Harr, M.E. : Foundation of Theoretical Soil Mechanics, Kogakusha, pp.96~102, 1966.
- 4) 松村孫治：弾性率の深さと共に変化する地盤に於ける基礎の沈下，土木学会誌，Vol. 17, No. 11, pp. 1121~1130, 1931.

- 5) Burmister, D.M. : The theory of stresses and displacements in layered systems and application to the design of airport runways, Proc. Highway Res. Bd., Vol.23, pp.126~148, 1943.
- 6) Burmister, D.M. : The general theory of stresses and displacements in layered systems I, II, III, J. Applied Physics, Vol.16, pp.89~94, 126~127, 296~302, 1945.
- 7) Mehta, M.R. and Veletsos, A.S. : Stresses and displacements in layered systems, Project NR 064-183 (Structural Research Series, 178), Univ. of Illinois, 1959.
- 8) Michelow, J. : Analysis of stresses and displacements in an  $n$ -layered elastic system under a load uniformly distributed on a circular area, California Research Corporation, (Unpublished), 1963.
- 9) Heukelom, W. and Klomp, A.J.G. : Consideration of calculated strains at various depths in connection with the stability of asphalt pavements, Proc. 2nd. Int. Conf. on the Structural Design of Asphalt Pavements, pp.155~168, 1967.
- 10) Ueshita, K. and Meyerhof, G.G. : Deflection of multilayer soil systems, Proc. of ASCE, Vol.93, No.SM5, pp.257~282, 1967.
- 11) Huang, Y.H. : Chart for determining equivalent single-wheel loads, Proc. of ASCE, Vol.94, No.HW2, pp.115~128, 1968.
- 12) 三浦裕二・巻内勝彦：多層地盤の応力・変形解析と東名高速道路動態調査結果の検討，土と基礎，Vol.17, No.1, pp.15~22, 1969.
- 13) Love, A.E.H. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (Fourth Edition), Dover Publications, pp.274~276, 1944.
- 14) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. : Theory of Elasticity (Third Edition), Kogakusha, pp.403~409, 1970.
- 15) Lister, N.W. and Jones, R. : The behavior of flexible pavements under moving wheel loads, Proc. 2nd. Int. Conf. on the Structural Design of Asphalt Pavements, pp.1021~1035, 1967.
- 16) Behr, H. : Fatigue tests on pavements by pulse generators, Proc. 3rd. Int. Conf. on the Structural Design of Asphalt Pavements, pp.187~199, 1972.
- 17) 村上敬宣：弾性力学，養賢堂，pp.43~44, 1989.
- 18) 渡辺正平：多層系弾性論による舗装最上層の亀裂解析，農業土木学会論文集，No.116, pp.59~66, 1985.
- 19) 松井邦人・井上武美・三瓶辰之：舗装各層の弾性係数を表面たわみから推定する一手法，土木学会論文集，第420号/V-13, pp.107~114, 1990.
- 20) Hoffman, M.S. and Thompson, M.R. : Backcalculating nonlinear resilient moduli from deflection data, Transportation Res. Record, No.852, pp.42~51, 1982.
- 21) 住友栄吉・川島義昭：セメント安定処理路盤の荷重分散効果(アスファルト舗装)について，土木学会論文報告集，第355号/VI-2, pp.73~80, 1985.

(1991.1.29 受付)

## ELASTIC ANALYSIS OF THE LAYERED AXI-SYMMETRIC BODY RESTRAINED IN A FINITE REGION

Shouhei WATANABE

Elastic analysis of a half infinite body subjected to normal load at the surface is well known Boussinesq's problem. The analysis of layered half infinite body is so called Burmister's problem, and is widely used for the structural design of pavements. In addition to these, the analysis of the layered axi-symmetric body restrained in a finite region was presented in this paper. Three shapes of load intensity distributions were given by Fourier-Bessel expansions, and stresses and displacements were represented by infinite series. The effects of restraining size and load intensity distribution on the stresses and the surface deflections were investigated by the computer results.