

有限要素-境界要素結合解析法による 反応を伴う移流拡散問題の解析

岡本直孝*・川原睦人**

1次化学反応を伴う移流拡散問題に対する数値解析は、海の赤潮等の解析において重要である。解析領域は多くの場合無限の広がりを持つ。数値解析において、常に問題となるのは無限領域としての境界条件(放射条件)を正確に満足させられないことである。そこで本論文では、有限要素法と境界要素法とを結合する方法を開発した。数値解と解析解との比較検討を行った結果、きわめて良い一致が得られた。

Keywords: convective diffusion, chemical reaction, coupling method, combined method, finite element method

1. ま え が き

1次化学反応を伴うあるいは反応を伴わない移流拡散問題を解析することは水質汚濁、大気汚染、海の赤潮等の取扱いにおいて重要なことである。これらの問題は多くの場合、解析領域が無限に広がっていることで特徴づけられる。これらの問題を解析するために有限要素法や差分法が広く用いられている。しかしながらこれらの数値解析法は、通常は領域を有限域で打ち切って近似を行うため、実際の系を適切に近似することは困難である。言い換えれば、無限領域と接続する境界(この境界をここでは仮想境界と呼ぶ)の境界条件を正確に与えられないことである。

数値解析において境界条件は、通常第1~3種境界条件によって決定される。すなわち、①濃度、②濃度勾配、③質量流束のいずれかを選択しなければならない。その場合適当な濃度勾配や濃度を定めることは不可能である。そのため問題によっては、仮想境界にいずれの境界条件を選んでも実際の現象とよく合う計算結果を得ることは困難である。このことは多くの計算結果が示すところである。この困難な問題を克服するため、仮想境界の処理を工夫しなくてはならない。この処理の仕方として無限要素や境界要素を仮想境界に用いることが考えられる。

この論文では境界要素法を用いて仮想境界の処理を行う。なぜなら、この方法を用いることにより非理論的な濃度分布を仮定したりする必要がなく、境界要素法の基本解の性質から、流速が一定であれば無限領域としての境界条件を満足しているからである。言い換えれば、境界要素法は流速場が変動するような複雑な問題(非線形

問題や準線形問題)には適していない。そこで有限要素法と境界要素法の両者の長所を生かすため、解析領域を流速が場所的に変化する内部領域(閉領域)と流速がほぼ一定とみなせる外部領域(開領域)に分割し、前者には有限要素法を後者には境界要素法の適用を試みる。なお、本解析手法は外部領域の流速がほぼ一定の場合に特に有効であり、外部領域の流速が一定とみなせない場合には境界要素領域(外部領域)の分割を行う必要が生じる¹⁾。提出した解析法の妥当性を検討するために、仮想境界を伴う計算例題を用いて解析解との比較検討を行う。応用例として埋立地等の小領域から無限空間へ拡散が起こる場合の計算例を示す。なお、ここで必要な1次反応を伴う定常移流拡散方程式に対する境界要素法は文献²⁾に基づく。

2. 基礎方程式

有限要素領域 $\Omega^{(F)}$ と境界要素領域 $\Omega^{(B)}$ より構成される無限領域 Ω において、1次化学反応を伴う定常移流拡散方程式は次式で与えられる。

$$L[C_A] \equiv -D\nabla^2 C_A + v \cdot \nabla C_A + kC_A = 0$$

$$\text{in } \Omega = \Omega^{(F)} + \Omega^{(B)} \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $L[\cdot]$ は線形演算子、 $C_A = C_A(P)$ はA成分濃度であり、一次元では座標 $P = x$ 、二次元では座標 $P = (x, y)$ の関数である。 ∇ はs次元の微分演算子、 $v = v(P)$ は流速である。また、 D は拡散係数、 $k(>0)$ は反応速度定数であり、領域 Ω 内で均一であるとする。

境界条件は Γ_1 上で濃度が、 Γ_2 上で質量流束が与えられているものとする。

$$\left. \begin{aligned} C_A(P) &= \bar{C}_A(P) && \text{on } \Gamma_1 \\ q_A(P) &= D\delta C_A / \delta n = \bar{q}_A(P) && \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 n は外向き単位法線ベクトルであり、上付きは既知を表す。

* 正会員 岡山理科大学助教授 工学部応用化学科 (〒700 岡山市理大町1-1)
** 正会員 中央大学教授 理工学部土木工学科

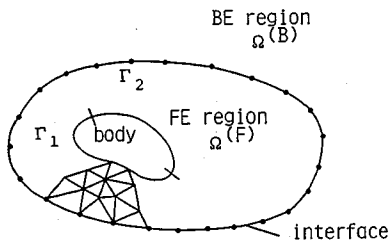


Fig.1 Internal (finite elements) and external regions.

無限遠における境界条件は次式で表せるものとする。
 $C_A(P) \rightarrow 0; \quad P \rightarrow \infty \dots\dots\dots (3)$

解析領域を Fig.1 に示す。解析領域を内部領域と外部領域に分割し、前者には有限要素法を後者には境界要素法の適用を行う。

3. 有限要素法

ガレルキン法により有限要素方程式を導く。
 式 (1) のガレルキン方程式は次式により表される。

$$\int_{\Omega} W(-D\nabla^2 C_A + v \cdot \nabla C_A + k C_A) d\Omega = 0 \dots\dots\dots (4)$$

2階の微分項について部分積分を行う。 C_A と v に一次元解析の場合には1次要素(ラグランジュ属1次要素)を用いて、二次元の場合には三角形1次要素を用いる。重み関数 W にも同様の関数を用い、各要素の離散化方程式を得る。これらを重ね合わせると全体行列方程式

$$Y u = q_v \dots\dots\dots (5)$$

が得られる。ここで、 $Y = (Y_{ij})$, $u = (u_i)^T = (u_1, \dots, u_N)^T$ および $q_v = (q_{vi})^T$ を表す。 N は有限要素領域の節点総数である。なお、 q_v は境界積分より生ずる。行列表示においては簡単化のため $C_A = u$ および $D\partial C_A / \partial n = q_v$ と表示している。ここで、 q_v は節点体積フラックスベクトルである³⁾。

一次元の場合の要素行列方程式は次式となる。

$$\left\{ \frac{D}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2v_1 - v_2 & 2v_1 + v_2 \\ -v_1 - 2v_2 & v_1 + 2v_2 \end{bmatrix} + \frac{kh}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} C_{A1} \\ C_{A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

4. 境界要素法

式 (1) に対するグリーンの第2公式は次式で表される。

$$\int_{\Omega} C_A^* L[C_A] - C_A L^*[C_A^*] d\Omega = \int_{\Gamma} \{ (D\nabla C_A^*) \cdot n - C_A^* (D\nabla C_A) + v \cdot \nabla C_A^* C_A \} \cdot n d\Gamma = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 n は境界 Γ 上の外向き単位法線ベクトル、 $L^*[\cdot]$ は $L[\cdot]$ の随伴演算子および C_A^* は C_A の随伴ポテンシャルである。また Γ_j は有限要素と境界要素の境界面を示す。基本解は次式を満たしている。

$$L^*[C^*] \equiv -D\nabla^2 C^* - v \cdot \nabla C^* + k C^* = \delta(P_i - P) \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 P_i はソース点、 P は観測点であり $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数である。

一次元に対する基本解 C_1^* は次式により与えられる。

$$C_1^* = (1/2\mu D) \exp[-v(x-\xi)/2D - |\mu| \cdot |x-\xi|] \dots (9)$$

ここで、

$$\mu^2 = (|v|/2D)^2 + k/D \dots\dots\dots (10)$$

であり、 $P_i = x$, $P = \xi$ である。

二次元に対する基本解 C_2^* は次式により与えられる。

$$C_2^* = (1/2\pi D) \exp[-(v \cdot r)/2D] K_0^{(2)} (|\mu| \cdot |R|) \dots (11)$$

ここで、

$$|R| = |P_i - P| = [(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2]^{1/2} \dots\dots\dots (12-a)$$

$$(v \cdot r) = v_x(x-\xi) + v_y(y-\zeta) \dots\dots\dots (12-b)$$

$$\mu^2 = (|v_x|/2D)^2 + (|v_y|/2D)^2 + k/D \dots\dots\dots (12-c)$$

であり、 π は円周率、 $K_0^{(2)}$ は第2種変形ベッセル関数、 $P_i = (x, y)$, $P = (\xi, \zeta)$ である。

式 (7) の C_A^* を基本解 $C^* (= C_S^*)$ に置換し、式 (1) を用いると境界積分方程式

$$a(P_i) C_A(P_i) + \int_{\Gamma} D(\partial C^*(P_i, P) / \partial n) C_A(P) d\Gamma + \int_{\Gamma} C^*(P_i, P) [-D(\partial C_A(P) / \partial n) + v_n C_A(P)] d\Gamma = 0 \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。ここで、 n は境界界面 Γ_j 上の(境界要素領域に対して)外向き単位法線ベクトル、 $a(P_i)$ は P_i が Γ_j 上るとき、一次元では1/2、二次元では、

$$a(P_i) = \theta(P_i) / 2\pi \dots\dots\dots (14)$$

である。ここで、 $\theta(P_i)$ は外部領域として境界要素法を用いる場合は、内部領域に対して外側の角度である。

式 (13) を M 個の境界要素(接合要素) Γ_j ($j=1, 2, \dots, M$) に分割し、1次要素を用いて離散化を行うと次の行列方程式を得る。

$$H u_i = G q_i \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 $H = (H_{ij})$ および $G = (G_{ij})$ である。なお、行列表示においては簡単化のため $C_A = u$, $D\partial C_A / \partial n = q$ および $\Gamma_j = I$ としている。

ここで注意を要するのは、式 (1) は1次化学反応を伴う場合の方程式であるから、一般的な保存則は成立しない。すなわち対角成分 H_{ii} は

$$H_{ii} \neq - \sum_{j=1}^M H_{ij} \quad (i \neq j) \dots\dots\dots (16)$$

であり、さらに等濃度曲線と Γ_{ii} が直交しないので、

H_{ii} も独自に計算しなければならない (なぜなら, H_{ii} は通常の境界要素解析では二次元で $\theta(P_i)/2\pi$ であるが, ここでは $\theta(P_i)/2\pi$ ではない).

一次元の場合には解析的に式 (15) の行列方程式が得られる.

式 (13) より, ソース点 $P_i = x^1 (=0)$ のとき,

$$C_A(x^1) + D \frac{dC^*(x^2, x^1)}{dx} C_A(x^2) - D \frac{dC^*(x^1, x^1)}{dx} C_A(x^1) + C^*(x^2, x^1) Q(x^2) - C^*(x^1, x^1) Q(x^1) = 0 \dots (17-a)$$

$P_i = x^2 (=L)$ のとき

$$C_A(x^2) + D \frac{dC^*(x^2, x^2)}{dx} C_A(x^2) - D \frac{dC^*(x^1, x^2)}{dx} C_A(x^1) + C^*(x^2, x^2) Q(x^2) - C^*(x^1, x^2) Q(x^1) = 0 \dots (17-b)$$

ここで, 一次元の基本解より

$$D \frac{dC^*(x^2, x^1)}{dx} C_A(x^2) = -\frac{1}{2}(m+1)e^{-(A+|\mu|)L} C_A(L) \dots (18-a)$$

$$C^*(x^2, x^1) Q(x^2) = B e^{-(A+|\mu|)L} Q(L) \dots (18-b)$$

$$D \frac{dC^*(x^1, x^2)}{dx} C_A(x^1) = -\frac{1}{2}(m+1)e^{-(A-|\mu|)L} C_A(0) \dots (18-c)$$

$$C^*(x^1, x^2) Q(x^1) = B e^{-(A-|\mu|)L} Q(0) \dots (18-d)$$

が得られる. ただし,

$$Q = -D \partial C_A / \partial x + v C_A(x) \dots (19-a)$$

$$m = v/2D|\mu|, A = v/2D, B = 1/2D|\mu| \dots (19-b)$$

である. 以上の式を用い, またソース点においては極限操作を行うと, 次の行列方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(m+1) & -\frac{1}{2}(m+1)e^{-(A+|\mu|)L} \\ \frac{1}{2}(m-1)e^{-(A-|\mu|)L} & -\frac{1}{2}(m-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A(0) \\ C_A(L) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} -1 & e^{-(A-|\mu|)L} \\ -e^{-(A+|\mu|)L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(L) \end{bmatrix} = 0 \dots (20)$$

5. 有限要素領域と境界要素領域の結合

式 (15) の両辺に G^{-1} を掛ければ次式を得る.

$$G^{-1} H u^{(B)} = q^{(B)} \dots (21)$$

なお, 上添字 (B) は境界要素法領域を表す. 有限要素法により得られた行列方程式 (5) を境界 I と境界を含まない内部 R に分離して表せば, 次の行列方程式を得る.

$$\begin{bmatrix} Y_{RR} & Y_{RI} \\ Y_{IR} & Y_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R^{(F)} \\ u_I^{(F)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{V,R}^{(F)} \\ q_{V,I}^{(F)} \end{bmatrix} \dots (22)$$

なお, 上添字 (F) は有限要素法領域を表す.

式 (21) と式 (22) の結合を行う際 1 つの困難を生ずる. なぜなら, 有限要素法における q_V は節点体積フラッ

クスベクトルであり, 境界要素法における q は節点フラックスであるため直接結合することができない. そこで, 有限要素領域と境界要素領域の要素境界を通過する全エネルギー流の連続性を考慮し, その変換マトリックス (分布マトリックス) を A とすると, 形式的に次式の関係式が得られる³⁾.

$$q^{(F)} = A q^{(B)} \dots (23)$$

また, $u^{(F)} = u^{(B)}$ であるから, 式 (21)~(23) より

$$\begin{bmatrix} Y_{RR} & Y_{RI} \\ Y_{IR} & Y_{II} - A G^{-1} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R \\ u_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{V,R} \\ 0 \end{bmatrix} \dots (24)$$

が得られる. この式が境界要素を有限要素に組み入れた行列方程式である.

変換マトリックス A はエネルギー流の連続性を考えれば各要素境界 Γ_e において次の関係が成立する.

$$\int_{\Gamma_e} u^{(F)} q^{(F)} d\Gamma_e = \int_{\Gamma_e} u^{(B)} q^{(B)} d\Gamma_e \dots (25)$$

境界上の節点に対応する形状関数をそれぞれ N_1, N_2 として離散化表示を行うと,

$$\begin{aligned} [u_1^{(F)} u_2^{(F)}] [q_1^{(F)} q_2^{(F)}]^T &= [u_1^{(F)} u_2^{(F)}] \left[\int_{\Gamma_e} [N_1 N_2]^T q^{(F)} d\Gamma_e \right] \\ &= [u_1^{(B)} u_2^{(B)}] \left[\int_{\Gamma_e} [N_1 N_2]^T [N_1 N_2] d\Gamma_e \right] [q_1^{(B)} q_2^{(B)}]^T \dots (26) \end{aligned}$$

$[u_1^{(F)} u_2^{(F)}] = [u_1^{(B)} u_2^{(B)}]$ であるから, $q^{(F)}$ と $q^{(B)}$ に対し次式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(F)} &= \int_{\Gamma_e} q^{(F)} N_1 d\Gamma = l_i \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} [q_1^{(B)} q_2^{(B)}]^T \\ q_2^{(F)} &= \int_{\Gamma_e} q^{(F)} N_2 d\Gamma = l_i \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} [q_1^{(B)} q_2^{(B)}]^T \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

ここで l_i は結合された各要素長である. ゆえに, 変換マトリックス A の全体行列は次式となる.

$$A = \begin{bmatrix} a_2(l_M + l_1) & a_1 l_1 & 0 & & a_1 l_M \\ a_1 l_1 & a_2(l_1 + l_2) & a_1 l_2 & & 0 \\ 0 & a_1 l_2 & a_2(l_2 + l_3) & a_1 l_3 & \\ & & & & \\ 0 & a_1 l_{i-1} & a_2(l_{i-1} + l_i) & a_1 l_i & \\ & & & & \\ a_1 l_M & & & a_1 l_{M-1} & a_2(l_{M-1} + l_M) \end{bmatrix} \dots (28)$$

ここで, $a_1 = 1/6, a_2 = 1/3$ である.

一方, 一次元の場合には変換マトリックス A は [1] であり, $q^{(B)}$ は式 (20) より得ることができる. すなわち,

$$(q^{(F)} = q^{(B)} =) D dC_A / dx = D \mu (1 - m) C_A \dots (29)$$

ここで,

$$\mu^2 = (|v|/2D)^2 + k/D, m = v/2D|\mu| \dots (30)$$

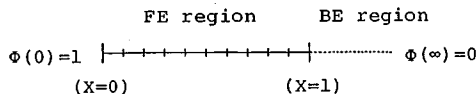


Fig.2 Model 1 (one-dimension).

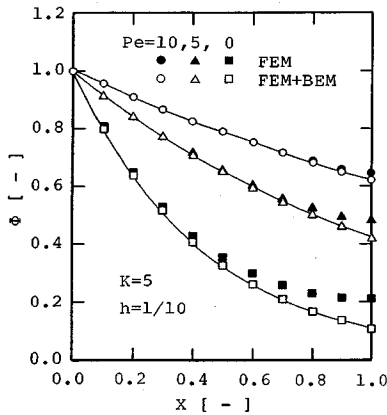


Fig.3 Solutions of the model 1 (one-dimension).

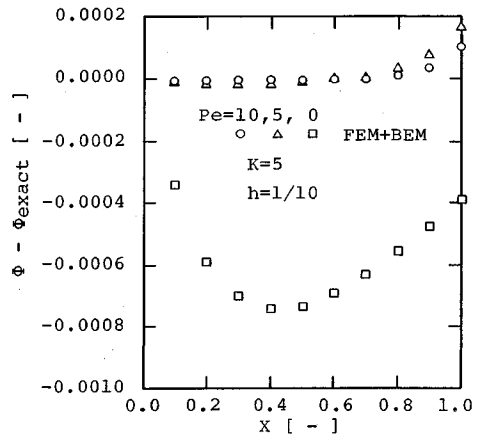


Fig.4 Errors of the solutions of the model 1 (one-dimension).

である。

6. 解析手法の検証

解析手法の妥当性を示すために、一次元モデル (計算例題 1) と二次元モデル (計算例題 2~4) の場合について数値解析を行う。なおここでは、無次元距離 $X=x/b, Y=y/b$, 無次元濃度 $\phi=C_A/C_{A1}$, 無次元速度 $V_x=v_x b/D, V_y=v_y b/D$ および無次元反応速度 $K=kb^2/D$ を用いて無次元化している。ここで C_{A1} は代表濃度, b は代表長である。また, V_x はペクレ数 Pe と呼ばれる。

○計算例題 1 (一次元)

境界条件が

$$\left. \begin{array}{l} \text{B. C. 1 } \phi(0)=1.0 \\ \text{B. C. 2 } \phi(\infty)=0.0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

の場合の数値解析を行う。

有限要素領域 ($0 \leq X \leq 1$) を 10 等分する (Fig.2)。B. C. 2 を満たすために $X=1$ で境界要素と結合する。

この計算例題の計算結果を Fig.3 に示す。なお、実線は解析解を示す。この図には結合解析法 (FEM+BEM) を用いないで、有限要素法 (FEM) だけで解析した解析結果を併記している。なお、有限要素法だけの解析で用いた流れ出口での境界条件としては、通常近似的によく用いられるノイマン条件 $\partial\phi(1)/\partial x=0$ を用いている。結合解析法で解析した場合の誤差を Fig.4 に示す。結合解析法を用いることにより解析解と良く一致する数値解が得られることを示している。ここで使用した解析解を次式に示す。

$$\phi = \exp[(X/2)\{V - (V^2 + 4K)^{1/2}\}] \dots\dots\dots(32)$$

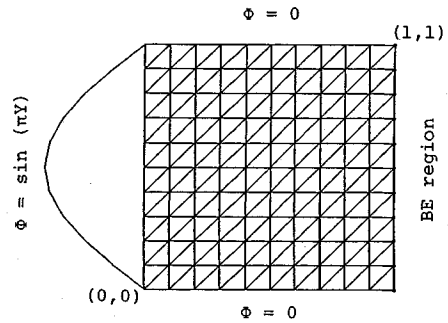


Fig.5 Model 2 (two-dimensions).

○計算例題 2 (二次元)

境界条件が

$$\left. \begin{array}{l} \text{B. C. 1 } \phi(0, Y) = \sin \pi Y \\ \text{B. C. 2 } \phi(X, 0) = \phi(X, 1) = 0.0 \\ \text{B. C. 3 } \phi(1, Y) \text{ is open} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

の場合の数値解析を行う。

有限要素領域 ($0 \leq X, Y \leq 1$) を縦横 10 等分の三角形格子を用いて離散化する (Fig.5)。B. C. 3 を満たすために $X=1$ で境界要素と結合する。流速 V は $V_x = \text{constant}, V_y = 0$ とする。

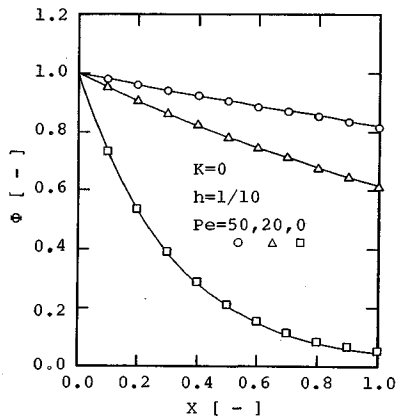
この境界条件の解析解を得ることができないので、B. C. 3 を

$$\text{B. C. 3 } \phi(\infty, Y) = 0.0 \dots\dots\dots(34)$$

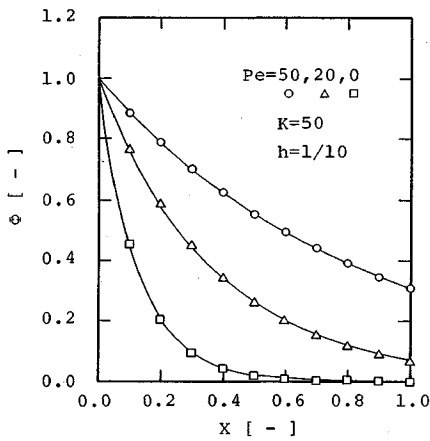
と変更して解析解を求め数値解との比較を行う。中心軸上では流速の増加につれて、両者が一致してくるはずであるから、このことより数値解の評価を行う。ここで用いた解析解を次式に示す。

$$\phi = \{\sin(\pi Y)\}^2 \exp[(X/2)\{V_x - (V_x^2 + 4\pi^2 + 4K)^{1/2}\}] \dots\dots\dots(35)$$

計算結果を Fig.6 (a), (b) に示す。二次元の解は厳密な意味での解析解との比較ではないが、ペクレ数や無



(a) two-dimensions, non-reaction



(b) two-dimensions

Fig.6 Solutions of the model 2.

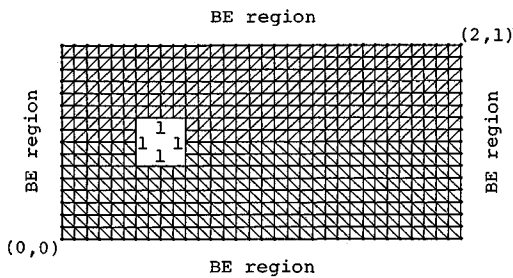


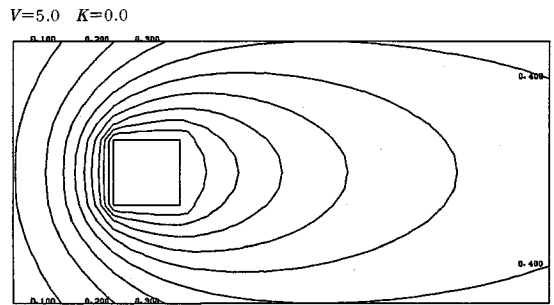
Fig.7 Model 3 (two-dimensions).

次元反応速度定数が大きくなるにつれて解析解とのよい一致がみられる。

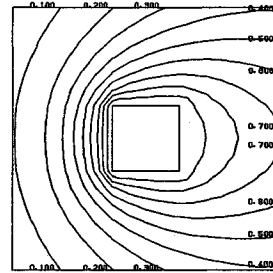
この例題は出口が開かれたダクトの問題であり、このようなダクトの問題を数値解析で取り扱うことはかなり困難であるが、結合解析法を用いることにより比較的容易にこの問題を取り扱うことができる。

○計算例題 3 (二次元)

1つの正方形の小領域から無限空間への拡散が起こる



(a)



(b)

Fig.8 Concentration distribution for the solution of the model 3 (non-reaction).

ものとする (Fig.7). 流速 V は正方形周辺が 0 で他の領域は $V_x = \text{constant}$, $V_y = 0$ とする. 有限要素領域は縦 16 等分, 横 32 等分の三角形格子を用いる.

なお, 境界要素係数行列の対角成分 \bar{H}_{ii} , G_{ii} は 20 点のガウス積分を用い, 非対角成分 H_{ij} , G_{ij} ($i \neq j$) は 8 点のガウス積分を用いて算出する.

反応を伴わない場合の計算結果を Fig.8 (a) に示す. 本解析法は, 外部領域の流速が一定とみなせる範囲まで解析領域を縮小しても, 縮小しない場合とほとんど同じ解析結果が得られる, このことを Fig.8 (b) に示す.

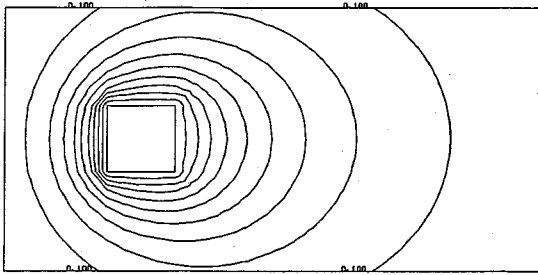
反応を伴う場合の計算結果を Fig.9 (a), (b) に示す. これらの結果は無限領域に広がる拡散現象を良く表していると考えられる.

計算例題 3 を有限要素法のみで解析することは境界条件の設定において非常な困難を伴うが, 結合解析法を用いることによりその問題をたやすく解決することができる. 有限要素法だけを用いた (境界条件は $\partial\phi/\partial n = 0$ を使用した. なお, この境界条件で Fig.8 を解析することはできない) 計算結果を Fig.10 に示す. この簡便法によって得られた濃度分布は明らかに不自然と考えられる.

○計算例題 4 (二次元)

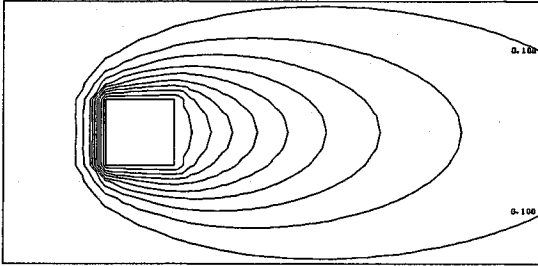
2つの正方形の小領域から無限空間への拡散が起こるものとする (Fig.11). 他は計算例題 3 と同様である. 反応を伴わない場合の計算結果を Fig.12 に, 反応を伴う場合の計算結果を Fig.13 に示す. これらの計算結果

V=5.0 K=10.0



(a)

V=20.0 K=20.0



(b)

Fig.9 Concentration distribution for the solutions of the model 3.

V=5.0 K=10.0

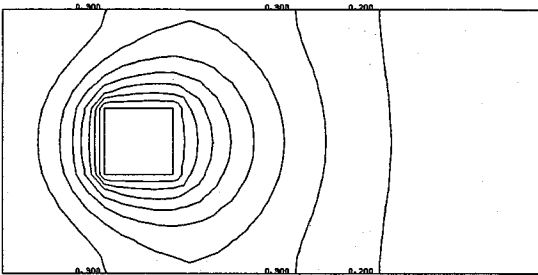


Fig.10 Concentration distribution using the conventional finite element method.

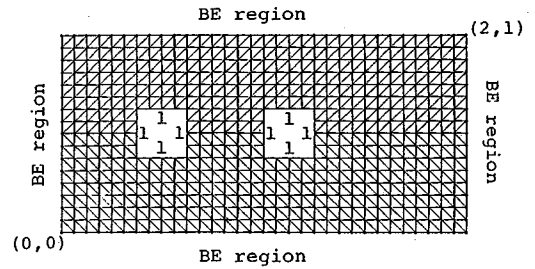


Fig.11 Model 4 (two-dimensions).

V=5.0 K=0.0

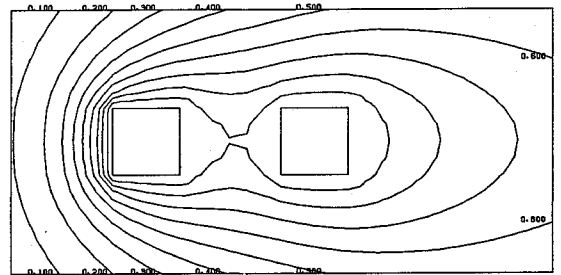


Fig.12 Concentration distribution for the solution of the model 4 (non-reaction).

V=5.0 K=30.0

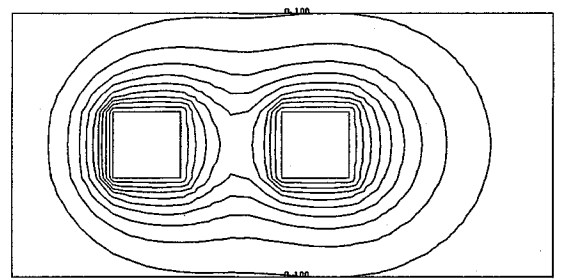


Fig.13 Concentration distribution for the solution of the model 4.

は結合解析法を用いることにより、無限領域に広がる拡散現象であるにもかかわらず、有限の限定された解析領域を用いて数値解析ができることをよく示している。

計算例題3および4からわかるように、結合解析法を用いることにより自然な濃度分布が得られる。これらの結果から流速が一定とみなせる仮想境界には境界要素を結合することが優れていると考えられる。すなわち本手法を用いることにより、反応速度については完全に考慮される点において優れており、流速に関しては外部領域の流速が一定の場合には完全に考慮され、流速が一定でない場合には平均的な値を使用しなければならないが、全く考慮しない方法より優れていると考えられる。

本論文では、解析手法の検証のために簡単なモデルに

ついでの計算例を示した。もちろん、内部領域に対しては有限要素法を用いているので、より複雑な地形（湾口に結合解析法を用いる等）の場合にも適用が可能である。

7. まとめ

この論文では、無限領域において1次反応を伴う移流拡散問題を解析する一つの解析法を提案した。この解析法は有限要素法に境界要素法を結合する手法に基づいている。この解析法を用いることにより、外部領域での流速を一定に近似できる場合には、無限領域と接続される境界の境界条件を基本解の性質から無条件に満足している。

計算例題1および2では、結合解析法による数値解が

解析解とよく一致することを示した。計算例題3および4では、無限領域に広がる拡散現象の解析に結合解析法を用いることにより自然な濃度分布が得られることを示した。これらの結果から、明らかにこの論文で提案した結合解析法が優れた手法であることが示された。

参 考 文 献

- 1) Kagawa, Y., Yamabuchi, T. and Kitagami, S. : The Infinite Boundary Element Method and Its Application to a Combined Finite Boundary element Technique for

- Unbounded Field Problems, COMPEL- the International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering Vol.2, pp.179~193, 1983.
- 2) Okamoto, N. : Analysis of Convective Diffusion Problem with First-Order Chemical Reaction by Boundary Element Method, Int. J.Num. Meth. Fluids, Vol.8, pp.55~64, 1987.
 - 3) 加川幸雄：開領域問題のための有限/境界要素法，サイエンス社，東京，135-165，1983.

(1990.6.11 受付)

NUMERICAL ANALYSIS BY COUPLING OF FINITE AND BOUNDARY ELEMENT METHODS FOR CONVECTION-DIFFUSION-REACTION PROBLEM

Naotaka OKAMOTO and Mutsuto KAWAHARA

A numerical method is presented to analyze a steady convection-diffusion-reaction problem defined on an infinite region. The present method is based on the coupling of finite and boundary element methods. The finite element method is applied to a region where the flow is not uniform and the boundary element method is applied to a region where the flow is uniform. The numerical solutions by present method are in good agreement with the exact solutions. Using the present method, the infinite boundary condition can be satisfied unconditionally because of the property of the fundamental solution.