

微視クラックのテンソル表現による 解析とその応用

仲沢武志*・岸野佑次**・佐武正雄***

本文は、コンクリートや岩石のような脆性材料におけるプロセスゾーンの力学モデルを提案するものである。プロセスゾーンのうちの微視クラックの力学的効果を楕円体介在物法による固有ひずみで評価し、これと微視的クラックの空間分布を表現するクラックテンソルとの対応づけを行い、微視クラックの影響を考慮した構成則を求めている。さらに、周辺の研究である損傷力学との関係について記述している。

Keywords: eigenstrain, constitutive relation, microcracks

1. はじめに

コンクリートや岩石等の脆性材料に破壊力学を適用する研究が近年数多くなされている。このような脆性材料に対して破壊力学を適用する際には、巨視的クラック先端近傍の微視クラック集積領域、いわゆるプロセスゾーンのモデル化が問題となる。このような、プロセスゾーンのモデル化に、Hillerborg は金属材料に対して材料の塑性を考慮できる Dugdale-Barrenblatt 型のモデルを用い、Fictitious crack model を提案した。ここでは、プロセスゾーンの構成則として、引張軟化則が用いられている。現在なされているこのような研究の多くは、この Fictitious crack model によるものであろう¹⁾。

一方、粒状体や微視クラックを多数含むような材料に対して、テンソル量を導入し、比較的微視的な観点から考察する研究がなされている。このうち、微視クラックを多数含むような材料では、特に、不連続性岩盤を対象として、損傷力学²⁾やクラックテンソル³⁾による研究がなされている。

先に記述したように、プロセスゾーンが、微視クラックの集積領域と考えられることから、このような手法を用いてプロセスゾーンを微視的にモデル化することもできると思われる。

よって、本論では、プロセスゾーンのような微視クラックによる微視構造を定量化するためにクラックテンソル³⁾を導入し、微視構造を構成する個々の微視クラックの力学的影響を Eshelby の楕円体介在物法による固有ひずみで表現する。さらに、これらに対応づけることによって、微視クラックの影響を考慮した弾性的な構成則

を誘導する。そのような構成則を誘導する際には、議論を一般的にするために歪弾性理論を参考とする。

従来、このような方法で得られている構成則では、簡単のため、クラック間の力学的相互作用は考慮されていない。微視構造を考慮した構成則をより詳細に考察するためには、クラック間の力学的相互作用を考慮する必要がある。そこで、このようにして得られる構成則を、クラック間の力学的相互作用を考慮できるように拡張する。

さらに、提案する構成則の適用性を若干の例題を通して考察する。なお、ここでの議論は、二次元平面応力状態に対するものとする。

2. 微視クラックの影響を考慮した弾性的構成則

微視クラックによる微視構造を考慮した弾性的な構成則を誘導するために、微視クラックによる微視構造の定量化としてクラックテンソルを定義し、微視クラックの力学的影響を Eshelby の楕円体介在物法による固有ひずみで表現する。

さらに、両者に対応づけることによって、弾性的な構成則を誘導するが、その際、歪弾性理論を参考とする。

(1) クラックテンソルの定義³⁾

微視クラックによる微視構造を定量化するために、小田によって提案されているクラックテンソルを用いる。

クラックテンソルを定義するためには、①クラック密度、②クラックの長さ、③クラックの方向分布を考慮する必要があるが、ここでは、2階のクラックテンソル F_{ij} を用いることとし、特に、二次元の場合、クラック面法線ベクトルのダイアド積に基づき、次式のように定義する。

$$F_{ij} = 2\pi\rho \langle a^2 \rangle \langle n_i n_j \rangle \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 ρ は単位面積当たりのクラック密度であり、 $\langle a^2 \rangle$ 、 $\langle n_i n_j \rangle$ はそれぞれ次式で与えられる。

* 正会員 工博 (株)フジタ技術研究所土木研究部
(〒223 横浜市港北区大圃町74)
** 正会員 工博 東北大学工学部土木工学科
*** 正会員 工博 東北学院大学工学部土木工学科

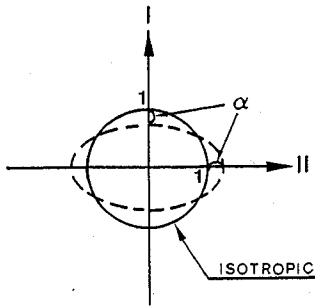


図-1 異方性パラメーター α の説明

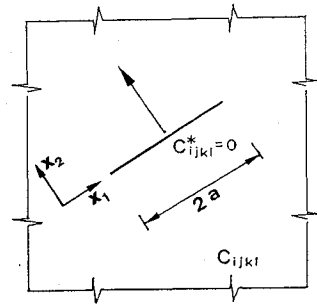


図-2 二次元スリット状クラック

$$\langle a^2 \rangle = \int a^2 f(a) da \dots \dots \dots (2)$$

$$\langle n_i n_j \rangle = \int n_i n_j g(\mathbf{n}) d\Omega \dots \dots \dots (3)$$

ただし、 $f(a)$ 、 $g(\mathbf{n})$ はそれぞれ、クラックの長さおよびクラック面法線ベクトルの方向分布に対する確率密度関数であり、 Ω は立体角である。

式 (1) は、確率密度関数に対する積分形であるが、離散型のデータが与えられた場合には、次式のような。

$$F_{ij} = 2\pi \sum_k a^{(k)2} n_i^{(k)} n_j^{(k)} / A \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 A は微視構造を平均化する領域の面積である。

さらに、異方性の主軸上、すなわち、クラックテンソルの主軸において、行列表示すれば、異方性を表すパラメーター α を導入することによって、クラックテンソルの成分を次式のようにも表すことができる。

$$(F_{ij}) = \pi \rho \langle a^2 \rangle \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1+\alpha \end{pmatrix} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 α は $-1 \sim 1$ で定義されるパラメーターである。このような表示では、微視クラックは図-1 に示するような微視構造を構成する。すなわち、 $\alpha = -1$ の場合、微視構造は、I 軸を主軸とする直交異方性を呈し、 $\alpha = 1$ の場合には、II 軸を主軸とする直交異方性を呈する。また、 $\alpha = 0$ の場合には、微視クラックを含んだ形で等方性を呈し、それ以外の場合には、一般的な微視構造となる。

このような表示は、必ずしも一般的ではないが、後述する構成則の適用性の考察で用いるものである。

(2) 固有ひずみによる微視クラックの力学的表現¹⁾

微視クラックの力学的影響を Eshelby の楕円体介在物法による固有ひずみで表現する。楕円体介在物法とは、「弾性係数 C_{ijkl}^* をもつ楕円体介在物の力学的効果を、母材の弾性係数 C_{ijkl} と固有ひずみ ε_{ij}^* で表現する方法」である。この解析方法によって、さまざまな計算がなされているが、ここでは、母材の等方性を前提とする。この楕円体介在物法を図-2 に示すような二次元スリット状クラックに適用することによって、微視クラックの力

学的影響を表現する。これは、平面応力状態に対して次式のように求められる。

$$\varepsilon_{11}^* = 0, \varepsilon_{22}^* = \frac{2\pi\rho a^2}{AE} \sigma_{22}, \varepsilon_{12}^* = \frac{\pi\rho a^2}{AE} \sigma_{12} \dots \dots \dots (6)$$

次に、クラックテンソルと固有ひずみを対応づけることによって、微視クラックの影響を考慮した弾性的な構成則を誘導する。

3. 微視クラックの影響を考慮した弾性構成則の誘導

微視クラックの影響を考慮した構成則を誘導するために非弾性理論における定式化を参考とする。非弾性では、応力増分やひずみ増分が、応力やひずみに依存するものと考え、次式のような構成則を用いている。

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(\sigma_{mn}) \dot{\varepsilon}_{kl} \\ \dot{\varepsilon}_{ij} = D_{ijkl}(\varepsilon_{mn}) \dot{\sigma}_{kl} \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 C_{ijkl} 、 D_{ijkl} はそれぞれ応力やひずみを引数として等方テンソル値展開されるものである。たとえば、式 (7) の第 1 式の展開は、一般に Cayley-Hamilton の定理から次式のように展開される。

$$C_{ijkl}(\sigma_{mn}) = a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + a_2 (\sigma_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ij} \sigma_{kl}) \\ + a_3 (\delta_{ij} \sigma_{kl} + \delta_{kl} \sigma_{ij}) + a_4 \sigma_{ij} \sigma_{kl} \\ + a_5 (\sigma_{ij} \sigma_{kl} + \sigma_{is} \sigma_{sj} \sigma_{kl}) + a_6 \sigma_{is} \sigma_{sj} \sigma_{kl} \\ + a_7 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ + a_8 (\sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{jk} \delta_{il} + \sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jl} \delta_{ik}) \\ + a_9 (\sigma_{ir} \sigma_{rk} \delta_{ij} + \sigma_{kr} \sigma_{rj} \delta_{il} \\ + \sigma_{ir} \sigma_{rj} \delta_{kl} + \sigma_{kr} \sigma_{rj} \delta_{ik}) \dots \dots \dots (8)$$

係数 $a_1 \sim a_9$ は応力テンソルのスカラー不変量に依存する定数である。

本文では、このような考え方にに基づき応力やひずみが、内部変数に依存する弾性体を考える。内部変数として、式 (1) で定義されるクラックテンソルを用いるものとし、次式のような構成則を考える²⁾。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(F_{mn}) \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = D_{ijkl}(F_{mn}) \sigma_{kl} \dots \dots \dots (9)$$

ここでは、考察の第 1 段階として、式 (9) の第 2 式で

考察を進めることとする。式(9)の第2式におけるコンプライアンス D_{ijkl} は、式(8)と同様に、クラックテンソルを引数として等方テンソル値展開されるものである。この展開は、一般に、Cayley-Hamiltonの定理等を用いて、クラックテンソルの高次の項までを考慮した式として展開されるが、ここでは、簡単のために、考察の第1段階としてクラックテンソルの1次の項までを考慮するものとし、2次以降の項を省略する。これより、コンプライアンスは、次式のように得られる。

$$D_{ijkl}(F_{mn}) = (a_1 + a_2 F_{rr}) \delta_{ij} \delta_{kl} + a_3 (F_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ij} F_{kl}) + (a_4 + a_5 F_{rr}) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + a_6 (F_{ik} \delta_{jl} + F_{jk} \delta_{il} + F_{il} \delta_{jk} + F_{jl} \delta_{ik}) \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 $a_1 \sim a_6$ は材料定数である。ここで、次のような仮定を設ける。

(仮定)

1. 母材の力学的性質は等方であるものとし、微視クラックによる微視構造に伴う異方性等は、クラックテンソルで表現するものとする。
2. クラック間の力学的相互作用は考慮しない。

先に記述したように、ここでは、Eshelbyの楕円体介在物法において、母材の等方性を前提として考察していることから、このような仮定を設けることによって、材料定数の決定に、楕円体介在物法をそのままの形で適用できる。以下に、固有ひずみを考慮できるように、材料定数を求める。クラックテンソルが恒等的にゼロテンソルの場合、すなわち、物体中にクラックを含まないような場合には、上述の仮定より、式(10)は、等方な母材のコンプライアンスとなり、これを D^e_{ijkl} と表す。すなわち、

$$D^e_{ijkl} = a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + a_4 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) \dots \dots \dots (11)$$

ここに、材料定数 a_1, a_4 は次式である。

$$a_1 = -\nu/E, a_4 = (1+\nu)/(2E) \dots \dots \dots (12)$$

これより、材料定数 a_2, a_3, a_5, a_6 で固有ひずみを表現することとなる。

二次元スリット状クラックを表す固有ひずみは式(6)である。材料定数 a_2, a_3, a_5, a_6 で固有ひずみを表現するが、考察を簡単にするために、考える座標系をクラックテンソルの主軸とし、その主値を次式のように表す。

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (13)$$

さらに、その座標系における応力テンソルの成分にプライム (') をつけて表す。このように扱っても一般性を損なうことはない。式(6)、式(10)および式(12)より、固有ひずみは次式のように得られる。

$$\epsilon^*_{11} = (a_2 + 2a_3 + 2a_5 + 4a_6) F_1 \sigma'_{11} + (a_2 + a_3) F_1 \sigma'_{22} + (a_2 + 2a_5) F_2 \sigma'_{11} + (a_2 + a_3) F_2 \sigma'_{22} = F_1 \sigma'_{11} / E$$

$$\epsilon^*_{22} = (a_2 + a_3) F_1 \sigma'_{11} + (a_2 + 2a_5) F_1 \sigma'_{22} + (a_2 + a_3) F_2 \sigma'_{11} + (a_2 + 2a_3 + 2a_5 + 4a_6) F_2 \sigma'_{22} = F_2 \sigma'_{22} / E$$

$$\epsilon^*_{12} = (2a_5 + 2a_6) F_{11} \sigma'_{12} + (2a_5 + 2a_6) F_{22} \sigma'_{12} = (F_{11} + F_{22}) \sigma'_{12} / E \dots \dots \dots (14)$$

式(14)より、材料定数の間の関係は次式ようになる。

$$a_2 + 2a_3 + 2a_5 + 4a_6 = 1/E, a_2 + a_3 = 0, a_2 + 2a_5 = 0, 2(a_5 + a_6) = 1/(2E) \dots \dots \dots (15)$$

よって、材料定数 a_2, a_3, a_5, a_6 は次式のように求められる。

$$a_2 = 0, a_3 = 0, a_5 = 0, a_6 = 1/(4E) \dots \dots \dots (16)$$

したがって、微視クラックの影響を考慮した弾性的な構成則として、次式を得る。

$$\epsilon_{ij} = \{-\nu/E \delta_{ij} \delta_{kl} + (1+\nu)/E \delta_{ik} \delta_{jl}\} \sigma_{kl} + 1/(4E) \{F_{ik} \delta_{jl} + F_{jk} \delta_{il} + F_{il} \delta_{jk} + F_{jl} \delta_{ik}\} \sigma_{kl} \dots \dots \dots (17)$$

式(17)は小田らが提案している構成則と同様なものである⁷⁾。

先に設けた仮定から、式(17)で表される構成則は、クラック間の力学的相互作用は考慮されていない。しかしながら、微視クラックの影響を考慮した構成則をより詳細に考察するためには、クラック間の力学的相互作用を考慮する必要がある。そこで、次にクラック間の力学的相互作用に対する考察をする。

4. クラック間の力学的相互作用を考慮した構成則

3. で導いた微視クラックの影響を考慮した構成則式(17)をクラック間の力学的相互作用を考慮できるように拡張する。

従来、クラック間の力学的相互作用の研究には、セルフコンシステント法⁸⁾や、弾性論を応用した解法⁹⁾が用いられている。しかしながら、セルフコンシステント法による解法は、一般的な微視構造には適用できない。さらに、弾性論による解法では、単純な微視構造に対しては厳密解を得ることができるが、一般的な微視構造の場合には、計算が複雑となる。そこで、ここでは、一般的な微視構造に対しても比較的容易にクラック間の力学的相互作用を考慮できるような1つの近似手法を提案する。

堀井らによる弾性論に基づいた解析では、クラック間の力学的相互作用の影響を表現するために、擬似応力を提案している⁹⁾。ここでは、擬似応力の考え方を導入し、クラック間の力学的相互作用を考慮した構成則を誘導する。

(1) クラック面上における応力条件

クラック間の力学的相互作用を考慮しない場合、ク

クラック面上の応力条件は m 番目のクラックにおいて、次式ようになる。

$$n^{(m)}_i(\sigma_{ij} + \sigma^*_{ij}) = 0 \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 σ^*_{ij} はクラック面上における内部応力であり、2. における固有ひずみ ε^*_{ij} に対応したものである。

ここで、クラック間の力学的相互作用を表現するために、擬似応力を考慮する。ここに、擬似応力は、着目しているクラック面上に、近接するクラックの影響によって生じる付加的な応力テンソルである。

擬似応力を考慮したクラック面上の応力条件は m 番目のクラックに対して、次式のように表せる。

$$n^{(m)}_i(\sigma_{ij} + \sigma^*_{ij} + \sigma^{(m)}_{ij}) = 0 \dots\dots\dots(19)$$

ここに、 $\sigma^{(m)}_{ij}$ における m は m 番目のクラックにおける擬似応力を表す。なお、擬似応力は、考える領域内部に存在するおのおのクラック面上に生じることから、領域内部における全体的な擬似応力 σ_{ij} は、 m 番目のクラック面上における擬似応力 $\sigma^{(m)}_{ij}$ の加算として、次式のように計算できるものとする。

$$\sigma_{ij} = \sum_m \sigma^{(m)}_{ij} \dots\dots\dots(20)$$

堀井らは、この擬似応力を、弾性論に基づいて求めているが、そこでの解法は、特別なクラックの配置については、厳密な解を得ることはできる。しかしながら、一般的な微視構造に適用した場合、計算が複雑となる。そこで、一般的な微視構造に対しても比較的容易に擬似応力を算出できる1つの近似方法を提案する。

(2) 擬似応力の算出方法

堀井らによる弾性論に基づいた擬似応力の算出方法では、それが、①クラックの近接状態(クラック密度)、②クラックの方向分布、③クラック間の距離、④外力の級数表示による関数で得られている。このうち、クラック密度とクラックの方向分布はクラックテンソルで表現できる。よって、ここでは、擬似応力を次式のように、クラックテンソル、外力およびクラック間の距離を表すパラメーター ζ の関数として得られるものとした考察を試みる。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(F_{kl}, \sigma_{mn}, \zeta) \dots\dots\dots(21)$$

Cayley-Hamilton の定理から、式 (21) で計算される擬似応力は、クラックテンソルと外力のおのおの2次の項まで考慮される等方テンソル値関数で展開されるものであるが、ここでは、考察の第1段階として、擬似応力が外力の1次の項で得られるものとする。すなわち、

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(F_{mn}, \zeta) \sigma_{kl} \dots\dots\dots(22)$$

さらに、式 (22) における係数テンソル E_{ijkl} において、クラックテンソルの1次の項を考慮し、2次以降を省略するものとするれば、これは、次式のように展開される。

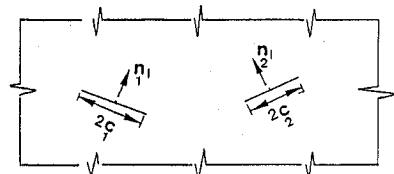


図-3 物体中の2本のクラック

$$E_{ijkl}(F_{mn}, \zeta) = (e_1 + e_2 F_{rr}) \delta_{ij} \delta_{kl} + e_3 (F_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ij} F_{kl}) + (e_4 + e_5 F_{rr}) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + e_6 (F_{ik} \delta_{jl} + F_{jk} \delta_{il} + F_{il} \delta_{jk} + F_{jl} \delta_{ik}) \dots\dots\dots(23)$$

ここに、係数 $e_1 \sim e_6$ は定数であり、パラメーター ζ に依存するものである。前述したように、擬似応力は、クラックによる微視構造の幾何学的特性や外力の級数表示による関数で得られるものであるが、ここでは、一般的な微視構造にも比較的容易に適用できる擬似応力の算出方法を提案するために、以下のような仮定を設ける。

(仮定) 擬似応力は、着目している m 番目のクラック面上の外力によって生じる応力ベクトル $\sigma_{ij} n^{(m)}_j$ に比例する。ただし、その比例定数をクラック相互の距離を表すパラメーター $f(\zeta)$ とする。

このような仮定から、図-3のような m 番目のクラック面上の擬似応力は次式のように得ることができる¹⁾。

$$\sigma^{(m)}_{ij} n^{(m)}_j = T^{(m)}_i = f(\zeta) T^{(m)}_i = f(\zeta) \sigma_{ik} n^{(m)}_k \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 $T^{(m)}_i$ は m 番目のクラック面上の擬似応力ベクトルである。なお、擬似応力は、着目しているクラック以外からの影響として現れる表面力の和として得られる。したがって、考慮するクラックについて総和を計算する必要があるが、その影響はパラメーター $f(\zeta)$ で計算することとする。

式 (24) における擬似応力ベクトルから、それと等価な擬似応力テンソルを次式により求める。

$$\sigma_{ij} = \sum_m \sigma^{(m)}_{ij} = \sum_m T^{(m)}_i n^{(m)}_j = \frac{1}{2} \zeta^2 \sum_m (\delta_{ij} n^{(m)}_k n^{(m)}_j + \delta_{ik} n^{(m)}_j n^{(m)}_i) \sigma_{kl} \dots\dots\dots(25)$$

なお、式 (25) から求められる擬似応力テンソルは、異方性の主軸と応力テンソルの主軸が一致しない場合、一般に対称テンソルとはならない。そこで、ここでは、第

注1) 弾性論に基づいた堀井らによるクラック間の力学的相互作用の解析では、2重周期配置構造における擬似応力ベクトルを次式のように算出している⁹⁾。

$$\sigma^{(m)}_{ij} n^{(m)}_j = T^{(m)}_i = C_{ij} T^{(m)}_j = C_{ij} \sigma_{jk} n^{(m)}_k$$

ここに、 C_{ij} は m 番目のクラックから近接するクラック間の距離、およびそのクラック相互のなす角度で展開されるものであり、その詳細については文献12)を参照されたい。

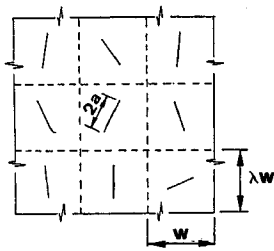


図-4 クラック長さとかラックの配置

1次近似として、固有ひずみに対応する擬似応力は、その対称成分であるものとする。

次に、クラック間の距離を表すパラメーターについて考察する。

(3) クラック間の距離に対するパラメーター

擬似応力は、着目しているクラック面上に、近接するクラックの内力によって生じる付加的な応力である。よって、これは、クラック間の距離やクラック長さに依存するものと考えられる。

そこで、クラック間の距離を表すパラメーター $f(\zeta)$ を ζ^2 とし、それを、第1次近似として次式で与えられるものとする¹⁰⁾。

$$\zeta^2 = (a/d)^2 \dots \dots \dots (26)$$

なお、式 (26) は、堀井らの弾性論に基づいた解析において、クラック間の距離を表すパラメーターと同様のものである。また、 d はクラック相互の距離を表す。

式 (26) で得られるパラメーター ζ を具体的に求めるために、図-4 のようにクラックが配置するものを考える。この場合には、クラック相互の距離を表すパラメーターは物体中のクラック全体を考慮すれば、次式のように求められる。

$$\zeta^2 = \lim_{RQ \rightarrow \infty} a^2 \left[\frac{1}{(\lambda w)^2} \sum_{m=1}^R \frac{1}{m^2} + \frac{1}{w^2} \sum_{n=1}^Q \frac{1}{n^2} + 2 \sum_{m=1}^R \sum_{n=1}^Q \frac{1}{(\lambda w m)^2 + (w n)^2} \right] \dots \dots \dots (27)$$

また、クラック間の力学的相互作用は、着目しているクラックの周囲に位置するクラックの影響は大きく、それに比べて、遠方のクラックによる影響は小さいものと考えられる。そこで、第1次近似として、着目しているクラックの周囲に位置するクラックの影響を考慮する。すなわち、式 (27) において、 $m=n=1$ の項を考える。この場合、式 (27) は次式となる。

$$\zeta^2 = \frac{a^2}{\lambda w^2} \left[\frac{\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \right] \dots \dots \dots (28)$$

式 (28) を式 (24) あるいは式 (25) に代入し、式 (23) を考慮すれば、クラック間の力学的相互作用を考慮するための係数テンソルを次式のように得ることができる。

$$\sigma_p^{(ij)} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \right] \times (F_{ik}\delta_{jl} + F_{il}\delta_{jk} + F_{kj}\delta_{li} + F_{lj}\delta_{ik}) \sigma_{kl} \dots \dots \dots (29)$$

これより、図-4 のようにクラックが配置する場合、式 (23) の定数を次式のように得ることができる。

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = 0, e_6 = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \right] \dots \dots (30)$$

よって、係数テンソル E_{ijkl} は次式のようになる。

$$E_{ijkl} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \right] \times (F_{ik}\delta_{jl} + F_{il}\delta_{jk} + F_{jl}\delta_{ik} + F_{jk}\delta_{li}) \dots \dots \dots (31)$$

これより、擬似応力によって生じる固有ひずみ ϵ_p^{*ij} は次式のように求められる。

$$\epsilon_p^{*ij} = \frac{1}{8E\pi} \left[\frac{\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \right] \times (F_{im}F_{mk}\delta_{jl} + F_{jm}F_{mk}\delta_{li} + F_{il}F_{jk} + F_{jl}F_{ik}) \sigma_{kl} \dots \dots \dots (32)$$

式 (17) に式 (32) で得られる擬似応力により生じる固有ひずみを加算すれば、クラック間の力学的相互作用を考慮した構成則を得ることができる。

次に、ここで提案した微視クラックの影響を考慮した構成則の適用性について考察する。

5. 提案した構成則の適用

3. および 4. で導いた微視構造を考慮した構成則の適用性について考察する。

ここでは、簡単のため、前述したように、クラックテンソルの主軸上で考察する。主軸上におけるクラックテンソルは、異方性を表すパラメーター α を導入すれば、式 (5) のように表される。これと、式 (17)、式 (32) を用いて、コンプライアンスの形で表される微視クラックの影響を考慮した構成則の行列表示は、次式のようになる。

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 + F_1 + \kappa F_1^2, & -\nu, & 0 \\ -\nu, & 1 + F_2 + \kappa F_2^2, & 0 \\ 0, & 0, & 2(1 + \nu) + (F_1 + F_2) + \kappa(F_1^2 + F_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (33)$$

ここに、 F_1, F_2, κ は次式である。

$$F_1 = \pi\rho \langle a^2 \rangle (1 - \alpha), F_2 = \pi\rho \langle a^2 \rangle (1 + \alpha)$$

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \right] \dots \dots \dots (34)$$

式 (33) は、クラック間の力学的相互作用を考慮した場合に対するものであるが、係数 κ をゼロとおけば、式 (17) に対するクラック間の力学的相互作用を考慮しない構成則に帰着する。

異方性の主軸上において、微視クラックの影響を考慮

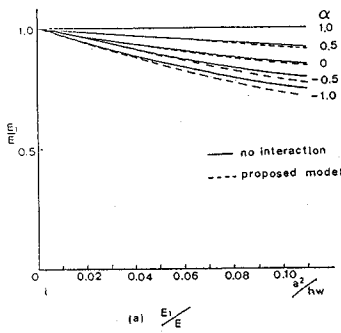


図-5 クラック密度とヤング率の関係

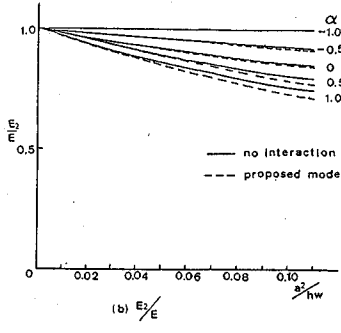


図-6 異方性パラメーターαとヤング率の関係

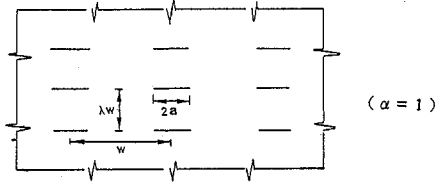


図-7 規則的に配置するクラック

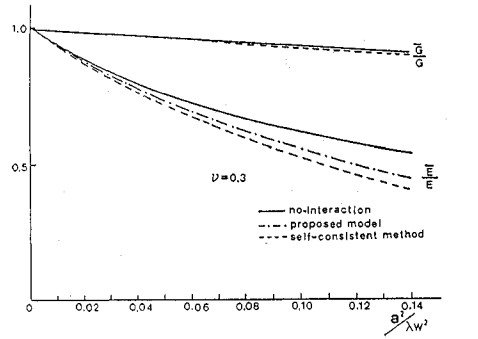


図-8 規則的に配置するクラックに対するクラック密度と弾性係数の関係

した巨視的な弾性係数と母材の弾性係数の比として式 (33) を表すと次式のようになる。

$$\frac{E_1}{E} = \frac{1}{1 + F_1 + \kappa F_1^2} \dots (35)$$

$$\frac{E_2}{E} = \frac{1}{1 + F_2 + \kappa F_2^2} \dots (36)$$

$$\frac{G_{xy}}{G} = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{G}{E}\right)(F_1 + F_2) + \kappa\left(\frac{G}{E}\right)(F_1^2 + F_2^2)} \dots (37)$$

式 (35) は F_1 軸方向に対するヤング率の比であり、式 (36) は F_2 軸方向に対するヤング率の比である。

また、式 (37) はせん断弾性係数の比であるが、これは、座標軸に依存しないように求められる。

式 (35)~(37) は、クラック密度 ρ 、異方性を表すパラメーター α を変数として表される。弾性係数の比とクラック密度の関係を α をパラメーターとして表したものが図-5 である。また、弾性係数の比と α の関係をクラック密度をパラメーターとして表したものが、図-6 である。このうち、異方性の最も極端なものとして、 α を 1 とした場合は、図-7 に示すような規則的に配置するクラック構造である。この場合のクラックテンソルは次式で表される。

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\pi a^2 / (\lambda w^2) \end{pmatrix} \dots (38)$$

また、この場合の微視クラックの影響を考慮した弾性係数と母材の弾性係数との比は次式である。

$$\frac{E_2}{E} = \frac{1}{1 + F_2 + \kappa F_2^2}$$

$$\frac{G_{xy}}{G} = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{G}{E}\right)F_2 + \kappa\left(\frac{G}{E}\right)F_2^2} \dots (39)$$

なお、このような微視構造では、 F_1 軸方向のヤング率は母材の弾性係数と同様である。

また、このような微視構造は、弾性論やセルフコンシステント法によって堀井らが解析している⁹⁾。そこでは、式 (39) に対応するものは、次式のようなものである。

$$\frac{E_2}{E} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi a^2}{\lambda w^2} \left(1 + \frac{\pi a^2}{\lambda w^2} \frac{3}{2\pi}\right)}$$

$$\frac{G_{xy}}{G} = \frac{1}{1 + 2\frac{\pi a^2}{\lambda w^2} \left(\frac{G}{E}\right) \left\{1 + \frac{\pi a^2}{\lambda w^2} \frac{\pi}{2}\right\}} \dots (40)$$

式 (39) と式 (40) を示したものが、図-8 である。

ここで提案した構成則と比較すれば、クラック間の力学的相互作用を考慮しない場合には、弾性論による解法とここで提案した構成則は一致する。さらに、クラック間の力学的相互作用を考慮した場合には、 $\kappa=1$ の場合、セルフコンシステント法による解に比較的良好に一致し

ていると思われる。

しかしながら、一般的な微視構造においては、解析的に得られる解との比較については、さらに検討する必要があるものと思われる。

6. 誘導した構成則と損傷力学との関係

3. において、微視クラックによる微視構造をクラックテンソルで定量化し、固有ひずみと対応づけることによって、微視クラックの影響を考慮した構成則を誘導したが、これと類似する方法で、微視構造を考慮したモデルに損傷力学がある。これらは、いずれも、材料内部の微視構造をテンソル量を用いて定量化し、それらを力学的に考察するという考え方に基づいている。そこで、これらの間にどのような関係があるかを考察する。

損傷力学では、微視構造の定量化として、次式のような損傷テンソルを定義している。

$$\Omega_{ij} = \sum_{N=1}^N \omega_N n_i n_j \dots\dots\dots(41)$$

ここに、 n_i は座標系の基底ベクトル、 ω は各基底方向の単位体積（二次元の場合は単位面積）当たりの損傷密度である。ただし、式(41)の加算は損傷テンソルの主軸でなされる。京谷らは、ステレオロジーを使って、岩盤における損傷密度の求め方を考察している²⁾。

損傷力学では、式(41)で定義される損傷テンソルを用いて、「材料中の微視クラックによって、外力を支え得る断面積が減少することにより、母材に生じる実質的な応力が上昇する」と考え、次式のように実質応力を計算している¹¹⁾。

$$\sigma^*_{ij} = \sigma_{ik} \Psi_{kj} \dots\dots\dots(42)$$

ここに、

$$\Psi_{ij}(\delta_{kj} - \Omega_{kj}) = \delta_{ij}$$

である。

ところで、実質応力 σ^*_{ij} は、損傷テンソルの主軸と応力の主軸が一致しない場合、一般に対称テンソルとはならない。そこで、対称な実質応力を計算する最も簡単な方法として、次式を考える。

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma^*_{ij} + \sigma^*_{ji}) \dots\dots\dots(43)$$

ここで、京谷にならい、損傷を伴う材料の構成則は、ひずみの等価性の仮定を用いて、次式で与えられるものとする。

$$S_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \dots\dots\dots(44)$$

あるいは、

$$\epsilon_{ij} = D_{ijkl} S_{kl} \dots\dots\dots(45)$$

ここに、 C_{ijkl} は母材の弾性係数マトリックス、 D_{ijkl} は母材のコンプライアンスマトリックスである。

ここでは、コンプライアンスの形で得られる式(45)で考察を進めることとする。

式(45)に式(43)で得られる対称化実質応力 S_{ij} を代入し整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} = & \{-\nu/E\delta_{ij}\delta_{kl} + (1+\nu)/E\delta_{ik}\delta_{jl}\}\sigma_{kl} \\ & + 1/(2E)\{(1+\nu)(M_{ik}\delta_{jl} + M_{jk}\delta_{il}) - 2\nu\delta_{ij}M_{kl}\}\sigma_{kl} \\ & \dots\dots\dots(46) \end{aligned}$$

ここに、 M_{ij} は次式である。

$$M_{ij} = \Psi_{ij} - \delta_{ij} \dots\dots\dots(47)$$

応力テンソル、クラックテンソルさらに損傷テンソルの対称性に注意して、式(46)と式(17)を比較すれば、ポアソン比がゼロである場合には両者は形式的に一致する。よって、クラック問題に対するポアソン効果については、さらに考察する必要があるものと思われる。

7. あとがき

微視クラックによる微視構造をクラックテンソルで定量化し、固有ひずみと対応づけることによって、微視構造を考慮した弾性的な構成則を導いた。さらに、擬似応力の考え方を導入することによって、クラック間の力学的相互作用も考慮できるように拡張した。

同様な研究は、小田によってなされているが、ここでは、亜弾性理論の考え方をを用いているため、より一般的な議論となっていると思われる。

また、ここでの考察と類似する方法である損傷力学による定式化との比較を行った。クラック間の力学的相互作用を考慮しない場合には、ポアソン比がゼロの場合、両者は形式的に同様な構成則を与えることとなる。

参考文献

- 1) Proc. Int. Workshop on Fracture Toughness and Fracture Energy—Test Methods for Concrete and Rock—, H. Mihashi et al. (eds.), Tohoku Univ., Sendai Japan.
- 2) 京谷孝史・市川康明・川本勝夫；岩盤の力学評価における損傷テンソルの適用について，土木学会論文集，No. 358/Ⅲ-3, 1985.
- 3) 小田匡寛：不連続性岩盤の力学へのアプローチ，土と基礎，35-3, 1987.
- 4) Mura, T.: Micromechanics of Defects in Solids, 2nd ed., Martinus Nijhoff, 1987.
- 5) Cowin, S.C.: The Relationship between the Elasticity Tensor and the Fabric Tensor, Mechanics of Materials, 4, 1985.
- 6) 仲沢武志・佐武正雄：クラックテンソルによる微視クラックの解析とその応用，第22回岩盤力学シンポジウム講演論文集，1990.
- 7) Oda, M., Suzuki, K. and Maeshibu, T.: Elastic Compliance for Rock-like Materials with Random Cracks, Soils and Foundation, Vol.24, No.3, 1984.
- 8) Horii, H. and Nemat-Nasser, S.: Overall Moduli of Solids with Microcracks load-induced Anisotropy, J. Mech. Phy. Solids, Vol.31, No.2, 1983.
- 9) Sahasakmontri, K., Horii, H., Hasegawa, A. and Nishino,

- F. : Mechanical Properties of Solids Containing a Doubly Periodic Rectangular Array of Cracks, Structural Eng./ Proc. of JSCE, Vol.4, No.1, 1987.
- 10) 仲沢武志・佐武正雄・岸野佑次：分布微視クラックを内在する材料の力学特性のモデル化，土木学会東北支部技術研究発表会講演要項集，1990.
- 11) 村上澄男：損傷力学と最近の発達，日本機械学会論文集（A編），51巻，467号，1985.
- 12) Horii, H. and Nemat-Nasser, S. : Elastic Fields of Interacting Inhomogeneities, Int. J. Solids Struct., Vol.21, No.7, pp.731~745, 1985.

(1990.10.23 受付)

TREATMENT OF MICROCRACKS IN TENSOR FORM AND ITS APPLICATION

Takeshi NAKAZAWA, Yuji KISHINO
and Masao SATAKE

This study is for the mechanical property of the brittle materials such as concrete and rocks. It is fundamentally important to consider the microstructure due to microcracks and its effect on the overall mechanical property. In this study, the mechanical effects of microcracks are studied using the eigenstrain calculated by ellipsoidal inclusion method and microstructure due to microcracks is expressed by crack tensor. The relations between the eigenstrain and the crack tensor is considered to propose the elastic constitutive equations.