

# ケーブル・はりモデルを用いた斜張橋の内部共振に関する実験と解析

藤野陽三\*・Pennung WARNITCHAI  
• Benito M. PACHECO

斜張橋の動特性を相似させた、ケーブル・片持ちばりモデルを用いてその振動特性を検討した。局部振動モード・全体振動モードの概念を用いてケーブル・はり系の3自由度モデルをケーブルの幾何学的非線形性を考慮して定式化した。ケーブルとはりの線形連成、2次非線形項によるオートパラメトリック連成に注目した実験を鉛直/水平調和加振のもとで行い、実験値と解析値との整合性がきわめて高いことを示した。

**Keywords** : cable-stayed bridge, dynamics, experiment, internal resonance, global mode, local mode, nonlinear analysis

## 1. はじめに

斜張橋の上部構造の振動モードは物理的には、ケーブルが単に伸び材として働き桁、塔、ケーブル全体が振動する全体振動モード(global modes)と、実質的にはケーブルのみが振動する局部振動モード(local modes)に分けられる<sup>1)</sup>。

両者の固有振動数が大きく離れているなど、連成がないあるいは小さい場合には、動的応答において両者は互いに影響を及ぼさず、別々に考えてもよい。

しかし、マルチケーブル斜張橋などでは、往々にしてある全体振動モードの固有振動数とケーブルの固有振動数との比が1もしくは整数倍(たとえば2倍)に近い状態が生じる。前者の場合には、全体振動と局部ケーブル振動の間には線形連成が、後者の場合にはケーブルの有限変位に起因する非線形連成が生じ、あるモードを励振したときエネルギーが他のモードに流れる、いわゆる内部共振を起こす原因となる。その結果として、桁あるいは塔の振動が大振幅のケーブル振動を励起することになる。

このようなことは実際の斜張橋で十分起こり得ることである。斜張橋の桁の加振実験、あるいは走行荷重による桁の振動によるケーブル振動の励起[たとえば文献2), 3)]は桁とケーブルとの線形連成による内部共振であることが多い。また、ある斜張橋では桁の鉛直2次モード、水平1次モード、そして何本かのケーブルの1次モードの固有振動数の比がたまたま2:1:1となっており、そのために内部共振と思われる振動がケーブル、桁に生じていた<sup>3)</sup>。この振動が、斜張橋の内部共振に着目した本研究を行うきっかけとなっている。

本論では斜張橋モデル(図-1(a))としては最も単純なケーブル・はり系(図-1(b))をとりあげる。しかし、振動数比を上述のような2:1:1とすることにより斜張橋としては最も基本的かつ重要な内部共振である線形内部共振とオートパラメトリック非線形内部共振を有した系とする。なお、内部共振としてはほかにも高調和共振、分数調和共振、結合共振<sup>5)</sup>などがあるが、ここでは扱わない。

本研究の目的は、このような系を対象に、①ケーブルの非線形性を考慮した連成運動方程式を一般化座標として全体振動モード、局部振動モードを用いて定式化し、②小型模型を用いて内部共振に着目した実験を行い、その定量的な検証をすることにある。

ケーブルで支持されたはりの連成振動についてはすでにいくつかの研究がなされている<sup>6)~9)</sup>。しかし、いずれも主として線形の範囲にとどまっている。非線形性に起因した内部共振の定式化、その実験的検証についての研究が行われていない。

なお、本論文の一部は、文献10)にすでに発表したが、実験模型にやや不備などところがあり、解析値と実験値との定量的な一致については満足はいかない点もあった。そこで、模型ならびに実験方法を改善したうえで、実験を再度やり直した。その結果、実験と理論とにより高い整合性を得ることができた(文献11)にて口頭発表)ので、より詳しい説明をつけ加えた形で改めてここに発表する次第である。

## 2. ケーブル・はり系の解析モデル

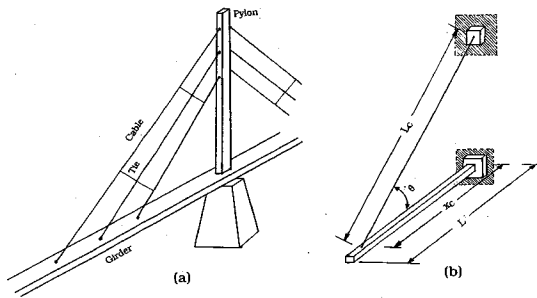
### (1) 非線形運動方程式

はりの水平変位を $u(x,t)$ 、鉛直変位を $v(x,t)$ 、ケーブルの水平変位を $u(s,t)$ 、鉛直変位を $v(s,t)$ とする。一般化座標として局部ケーブル振動モード $\phi_\nu$ と、ケーブルを伸び材(トラス材)として扱われる全体振

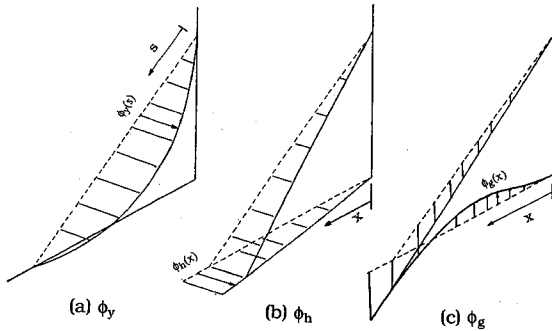
\* 正会員 Ph.D. 東京大学教授 工学部土木工学科  
(〒113 文京区本郷7-3-1)

\*\* 工博 ノースウェスタン大学研究員(元・東大大学院)

\*\*\* 正会員 工博 Ammann & Whitney 社技師(元・東京大学助教授)



図一 斜張橋 (a) とケーブルに支えられたはりモデル (b)



図二 局部振動と全体振動：(a) ケーブルの水平振動  $\phi_h$ , (b) はりの水平振動  $\phi_h$ , (c) はりの鉛直振動  $\phi_g$

動モード  $\phi_h, \phi_g$  (図二) の 3 自由度を考える。おののに対する一般化変位を  $y, h, g$  として、ケーブル・はり系の運動を表すと

$$u(x, t) = \phi_h(x) h(t) \dots\dots\dots (1)$$

$$v(x, t) = \phi_g(x) g(t) \dots\dots\dots (2)$$

$$u(s, t) = \phi_v(s) y(t) + \phi_h(x_c) h(t) s/L_c \dots\dots\dots (3)$$

$$v(s, t) = \phi_g(x_c) g(t) s/L_c \dots\dots\dots (4)$$

ここで  $\phi_h(x), \phi_g(x)$  は  $\phi_h(L)=1, \phi_g(L)=1$  の条件で正規化したものである。局部振動  $\phi_v(s)$  は一様な弦の面外 1 次振動モードとする。すなわち

$$\phi_v(s) = \sin(\pi s/L_c) \dots\dots\dots (5)$$

式 (1)~(5) に用いられた  $L, L_c, x_c, \theta$  は図一 (b) に、座標  $x, s$  は図二にその定義を示す。また、ここで  $y$  はケーブルスパン中央点での局部振動モードの変位、 $h, g$  は全体振動モードにおけるはりの端部での水平、鉛直変位である。

斜張橋ケーブルは死荷重による張力が自重に比べ格段に大きく、サグが小さい。したがって弦として扱っても差し支えない<sup>11)</sup>。また、伸び剛性  $E_c A_c$  も高く、軸方向モードの 1 次固有振動数は面外のそれより少なくとも 1 オーダーは大きい<sup>12)</sup> ので、局部振動モードにおけるケーブル軸方向の変位は無視できる。なお、ここではケーブルの面内振動は考慮していない。後述の模型実験においても

面内 1 次振動が出ないようにケーブルに拘束を与えている。ケーブルの面内振動を許すと、いわゆる局部振動であるケーブルの面内振動と面外振動との連成により swirling が生じ、現象が複雑になる<sup>12)</sup>。もちろんその定式化も可能である<sup>12)</sup> が、本論文では局部振動と全体振動との内部共振に着目し、あえて局部振動どうしの内部共振が生じない状態とした。

a) ラグランジェによる定式化

ケーブルとはりはともに線形弾性体とする。このとき、ひずみエネルギーの静的つり合い位置からの増分は、静的張力による効果<sup>13)</sup>を考慮して

$$U = U_{\text{cable}} + U_{\text{beam}} \dots\dots\dots (6)$$

$$U_{\text{cable}} = \frac{1}{2} \frac{u_0 E_c A_c}{L_c} \int_0^{L_c} \left\{ \left( \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial v(s, t)}{\partial s} \right)^2 \right\} ds + \frac{1}{2} E_c A_c L_c e^2(t) \dots\dots\dots (7)$$

$$e(t) = \frac{1}{L_c} \left[ \frac{1}{2} \int_0^{L_c} \left\{ \left( \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial v(s, t)}{\partial s} \right)^2 \right\} ds + \phi_g(x_c) g(t) \sin \theta \right] \dots\dots\dots (8)$$

$$U_{\text{beam}} = \frac{1}{2} h^2(t) \int_0^L EI_h \left( \frac{d^2 \phi_h}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} g^2(t) \int_0^L EI_g \left( \frac{d^2 \phi_g}{dx^2} \right)^2 dx \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる<sup>12)</sup>。式 (7) の  $u_0$  は静的つり合い位置におけるケーブルの自然長からの伸び、 $E_c A_c$  は伸び剛性である。なお、式 (7) の右辺の第 1 項は静的初期張力が動ひずみ  $e(t)$  のもとでなす仕事であり、第 2 項は動ひずみ  $e(t)$  そのものによる仕事である。ケーブルの動ひずみ  $e(t)$  はケーブル支点の鉛直変位  $\phi_g(x_c)$  を考慮した式 (8) で与えられる。なお、ケーブルの軸方向慣性力は前述のように無視できるので、ケーブルの動ひずみはケーブル軸方向にわたり一定で、時間のみ関数となる。斜張橋においては一般に桁の静的軸圧縮力の動特性への効果は小さい。静的軸圧縮力を無視して水平、鉛直変位に伴うはりのひずみエネルギーを求めたのが式 (9) である。 $EI_h, EI_g$  は水平、鉛直方向の曲げ剛性である。

一方、運動エネルギーは

$$T = T_{\text{cable}} + T_{\text{beam}} \dots\dots\dots (10)$$

$$T_{\text{cable}} = \frac{1}{2} \mu_c \int_0^{L_c} \left\{ \left( \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} \right)^2 \right\} ds \dots\dots\dots (11)$$

$$T_{\text{beam}} = \frac{1}{2} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 \int_0^L \mu(x) \phi_h^2(x) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{dg}{dt} \right)^2 \int_0^L \mu(x) \phi_g^2(x) dx \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。ここで  $\mu_c, \mu(x)$  はおののケーブル、はりの単位長さ当たりの質量である。

式(1)~(5)を式(6)~(10)に代入しLagrangeの方程式を適用すると、 $y, h, g$ を一般化変位とする非線形運動方程式が導かれる。

b) 無次元化

運動方程式において各項の大きさが比較できるように次に示す無次元化を行う。

$$\bar{y} = \frac{y}{u_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{u_0}, \quad \bar{g} = \frac{g}{u_0} \dots\dots\dots(13), (14), (15)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi^2 u_0 E_c A_c}{L_c^2 \mu_c}} t \dots\dots\dots(16)$$

$$(\quad)'' = \frac{d^2(\quad)}{d\tau^2} = \frac{\pi^2 u_0 E_c A_c}{L_c^2 \mu_c} \frac{d^2(\quad)}{dt^2} \dots\dots\dots(17)$$

一般に斜張橋では、①ケーブルとはり(桁)との連成による振動が問題となるとき、ケーブルの振幅ははりの振幅よりも1オーダー大きい、②ケーブルの静的状態における自由長からの伸び  $u_0$  はケーブル長  $L_c$  に比べ圧倒的に小さい、③ケーブルの局部振動モードの一般化質量は全体振動モードに比べ、2オーダー小さい、としてよい。すなわち

$$\bar{g}, \bar{h} \ll \bar{y}, \quad u_0 \ll L_c, \quad M_y \ll M_h, M_g$$

ここで

$$M_y = \frac{1}{2} \mu_c L_c \dots\dots\dots(18)$$

$$M_h = \int_0^L \mu(x) \phi_h^2(x) dx + \frac{2}{3} M_g \phi_h^2(x_c) \dots\dots\dots(19)$$

$$M_g = \int_0^L \mu(x) \phi_g^2(x) dx + \frac{2}{3} M_g \phi_g^2(x_c) \dots\dots\dots(20)$$

上述の条件①, ②, ③のもとで、得られた運動方程式の中の高次微小項を落とすと

$$\bar{y}'' + 2\bar{\nu}_y \bar{y}' + \bar{y} + \bar{\zeta}_h \bar{h}'' + 2\bar{\eta}_g \bar{g}' + \bar{\xi} \bar{y}^3 = 0 \dots\dots\dots(21)$$

$$\bar{h}'' + 2\bar{\nu}_h \frac{f_h}{f_y} \bar{h}' + \frac{f_h^2}{f_y^2} \bar{h} + \bar{\zeta}_y \bar{y}' = \bar{P}_h(\tau) \dots\dots\dots(22)$$

$$\bar{g}'' + 2\bar{\nu}_g \frac{f_g}{f_y} \bar{g}' + \frac{f_g^2}{f_y^2} \bar{g} + \bar{\eta}_y \bar{y}' = \bar{P}_g(\tau) \dots\dots\dots(23)$$

ここで

$$\bar{\zeta}_h = \frac{2}{\pi} \phi_h(x_c), \quad \bar{\eta}_g = \frac{1}{2} \phi_g(x_c) \sin \theta \dots\dots\dots(24), (25)$$

$$\bar{\xi} = \frac{\pi^2}{4} \frac{u_0}{L_c}, \quad \bar{\zeta}_y = \frac{2}{\pi} \frac{M_y}{M_h} \phi_h(x_c) \dots\dots\dots(26), (27)$$

$$\bar{\eta}_y = \frac{1}{2} \frac{M_y}{M_g} \phi_g(x_c) \sin \theta, \quad f_y^2 = \frac{u_0 E_c A_c}{4 L_c^2 \mu_c} \dots\dots\dots(28), (29)$$

$$f_h^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\int_0^L EI_h \left( \frac{d^2 \phi_h}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{u_0 E_c A_c}{L_c^2} \phi_h^2(x_c)}{M_h} \dots\dots\dots(30)$$

$$f_g^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\int_0^L EI_g \left( \frac{d^2 \phi_g}{dx^2} \right)^2 dx + \left( \frac{u_0 E_c A_c}{L_c^2} + \frac{E_c A_c}{L_c} \right) \phi_g^2(x_c)}{M_g} \dots\dots\dots(31)$$

となる。ここで  $P_h, P_g$  は一般化水平外力、一般化鉛直外力である。また、式(21)~(23)にはケーブル局部振動モード、はりを中心とする全体振動モードに対するモード粘性減衰定数  $\nu_y, \nu_h, \nu_g$  を加えてある。

式(21)の  $\bar{h}$  と式(22)の  $\bar{y}$  の項ははりの水平振動とケーブルの水平振動との線形連成項であり、両者の固有振動数がほぼ等しい ( $\omega_h \approx \omega_y$ ) のとき、重要な意味をもってくる。式(21)の  $\bar{g}\bar{y}$  と式(23)の  $\bar{y}^2$  の項はオートパラメトリック(非線形)連成項と呼ばれるもので、 $\omega_g \approx 2\omega_y$  のときに特に重要な意味をもつ。式(21)の  $y$  の3乗項はケーブルの有限変位によるものである。 $\bar{g}^2 \bar{y}$  など他の3次項を落としたのは先に述べた条件  $\bar{g}, \bar{h} \ll \bar{y}$  による。

式(21)~(23)は非比例減衰 ( $\nu_y, \nu_h, \nu_g$ ) を仮定した一般化変位表示であり、非線形多自由度系の扱いとしては線形連成項を残しているという意味で通常の方法とやや異なる。式(21)~(23)の線形連成項を線形変換により消し、比例モード減衰を仮定する定式化<sup>5)</sup>が一般的である。しかし、局部振動モードと全体振動モードを一般化座標とする定式化(式(21)~(23))には、これらの間の連成効果を直接的、そして物理的にみることができるという利点がある。

(2) マルティプルタイムスケールを用いた摂動法による定常応答解

式(21)~(23)の連成運動方程式において、減衰項、連成項、外力項は小さいとし、 $\varepsilon$  を付し、そのオーダーを示す。すなわち

$$\bar{y}'' + 2\varepsilon \bar{\nu}_y \omega_y \bar{y}' + \omega_y^2 \bar{y} + \varepsilon \bar{\zeta}_h \bar{h}'' + 2\varepsilon \bar{\eta}_g \bar{g}' + \varepsilon \bar{\xi} \bar{y}^3 = 0 \dots\dots\dots(32)$$

$$\bar{h}'' + 2\varepsilon \bar{\nu}_h \omega_h \bar{h}' + \omega_h^2 \bar{h} + \varepsilon \bar{\zeta}_y \bar{y}' = \varepsilon P_h(\tau) \dots\dots\dots(33)$$

$$\bar{g}'' + 2\varepsilon \bar{\nu}_g \omega_g \bar{g}' + \omega_g^2 \bar{g} + \varepsilon \bar{\eta}_y \bar{y}' = \varepsilon P_g(\tau) \dots\dots\dots(34)$$

ここで

$$\omega_y = f_y / f_y = 1, \quad \omega_h = f_h / f_y, \quad \omega_g = f_g / f_y \dots\dots\dots(35) \sim (37)$$

本論では内部共振が起こりやすい、固有振動数比  $\omega_g : \omega_h : \omega_y \approx 2 : 1 : 1$  の状態を考える。そこで同調のレベルを示すパラメーター  $\sigma_a, \sigma_b$  を次のように定義する。

$$\omega_g = 2\omega_y + \varepsilon \sigma_a \dots\dots\dots(38)$$

$$\omega_h = 2\omega_h + \varepsilon \sigma_b \dots\dots\dots(39)$$

外力としては次の調和外力を考える。

$$P_h(\tau) = F_h \cos(\Omega_h \tau) \dots\dots\dots(40)$$

$$P_g(\tau) = F_g \cos(\Omega_g \tau) \dots\dots\dots(41)$$

$$\Omega_h = \omega_h + \varepsilon \sigma_h \dots\dots\dots(42)$$

$$\Omega_g = \omega_g + \varepsilon \sigma_g \dots\dots\dots(43)$$

式(32)~(34)に対する  $y, h, g$  の応答として、マルティプルタイムスケール  $t_0, t_1 \dots$  を用いて次の摂動解

$$\bar{y}(t) = \bar{y}_0(t_0, t_1) + \varepsilon \bar{y}_1(t_0, t_1) + \varepsilon^2 (\quad) + \dots\dots\dots(44)$$

$$\bar{h}(t) = \bar{h}_0(t_0, t_1) + \varepsilon \bar{h}_1(t_0, t_1) + \varepsilon^2 (\quad) + \dots\dots\dots(45)$$

$$\tilde{g}(t) = \tilde{g}_0(t_0, t_1) + \varepsilon \tilde{g}_1(t_0, t_1) + \varepsilon^2(\dots) + \dots \quad (46)$$

を考える。タイムスケールは

$$t_0 = \tau, \quad t_1 = \varepsilon \tau \quad (47), (48)$$

さらに微分演算子の記号として

$$D_0 \equiv \frac{\partial(\dots)}{\partial t_0}, \quad D_1 \equiv \frac{\partial(\dots)}{\partial t_1} \quad (49), (50)$$

を導入する。これらを式 (21)~(23) に代入して、 $\varepsilon$  のオーダーで式を分離してかくと

$\varepsilon^0$  のオーダー

$$D_0^2 \tilde{y}_0 + \tilde{y}_0 = 0 \quad (51)$$

$$D_0^2 \tilde{h}_0 + \omega_h^2 \tilde{h}_0 = 0 \quad (52)$$

$$D_0^2 \tilde{g}_0 + \omega_g^2 \tilde{g}_0 = 0 \quad (53)$$

$\varepsilon^1$  のオーダー

$$D_0^2 \tilde{y}_1 + \tilde{y}_1 = -2D_0 D_1 \tilde{y}_0 - 2\tilde{\nu}_y D_0 \tilde{y}_0 - \tilde{\xi} \tilde{y}_0^3 - 2\tilde{\eta}_y \tilde{g}_0 \tilde{y}_0 - \tilde{\zeta}_h D_0^2 \tilde{h}_0 \quad (54)$$

$$D_0^2 \tilde{h}_1 + \omega_h^2 \tilde{h}_1 = -2D_0 D_1 \tilde{h}_0 - 2\tilde{\nu}_h \omega_h D_0 \tilde{h}_0 - \tilde{\zeta}_y D_0^2 \tilde{y}_0 + F_h \cos(\omega_h t_0 + \sigma_h t_1) \quad (55)$$

$$D_0^2 \tilde{g}_1 + \omega_g^2 \tilde{g}_1 = -2D_0 D_1 \tilde{g}_0 - 2\tilde{\nu}_g \omega_g D_0 \tilde{g}_0 - \tilde{\eta}_y \tilde{y}_0^3 + F_g \cos(\omega_g t_0 + \sigma_g t_1) \quad (56)$$

ここでは、水平調和加振 ( $F_h \neq 0, F_g = 0$ ) と鉛直調和加振 ( $F_h = 0, F_g \neq 0$ ) の2つのケースについて定常応答を求める。

a) 水平調和加振

$$\text{外力 } P_h(\tau) = F_h \cos(\Omega_h \tau) \text{ に対する定常応答}$$

$$\tilde{y}_0 = \tilde{a}_y \cos(\Omega_h \tau - \gamma_{fh} - \gamma_{hy}) \quad (57)$$

$$\tilde{h}_0 = \tilde{a}_h \cos(\Omega_h \tau - \gamma_{fh}) \quad (58)$$

$$\tilde{g}_0 = \tilde{a}_g \cos 2(\Omega_h \tau - \gamma_{fh} - \gamma_{hy} + \frac{1}{2} \gamma_{gy}) \quad (59)$$

と表す。振幅  $\tilde{a}_y, \tilde{a}_h, \tilde{a}_g$  ならびに位相  $\gamma_{fh}, \gamma_{hy}, \gamma_{gy}$  は、 $\varepsilon^1$  のオーダーの式における発散項 (secular terms) がゼロにならなければならないという条件から決定される。すなわちそれは

$$\tilde{\nu}_y \omega_g \tilde{a}_g - \frac{\tilde{\eta}_y}{4\omega_g} \tilde{a}_y^3 \sin \gamma_{gy} = 0 \quad (60)$$

$$(\sigma_y - 2\sigma_h) \tilde{a}_g + \frac{\tilde{\eta}_y}{4\omega_g} \tilde{a}_y^3 \cos \gamma_{gy} = 0 \quad (61)$$

$$\tilde{\nu}_h \omega_h \tilde{a}_h + \frac{\tilde{\zeta}_y}{2\omega_h} \tilde{a}_y \sin \gamma_{hy} - \frac{F_h}{2\omega_h} \sin \gamma_{fh} = 0 \quad (62)$$

$$-\sigma_h \tilde{a}_h - \frac{\tilde{\zeta}_y}{2\omega_h} \tilde{a}_y \cos \gamma_{hy} - \frac{F_h}{2\omega_h} \cos \gamma_{fh} = 0 \quad (63)$$

$$-2\tilde{\nu}_y \tilde{a}_y - \tilde{\eta}_y \tilde{a}_g \tilde{a}_y \sin \gamma_{gy} + \tilde{\zeta}_h \omega_h^2 \tilde{a}_h \sin \gamma_{hy} = 0 \quad (64)$$

$$(\sigma_y - 2\sigma_h - \sigma_a) \tilde{a}_y + \tilde{\eta}_y \tilde{a}_g \tilde{a}_y \cos \gamma_{gy} - \tilde{\zeta}_h \omega_h^2 \tilde{a}_h \cos \gamma_{hy} + \frac{3}{4} \tilde{\xi} \tilde{a}_y^3 = 0 \quad (65)$$

であり、これを解くことにより振幅、位相が求まる。求

まった解に対しては線形化複素固有値解析<sup>5)</sup>を適用して、その解 (応答) の安定、不安定を調べればよい。

b) 鉛直調和加振

$P_g(\tau) = F_g \cos(\Omega_g \tau)$  に対する定常応答として

$$\tilde{y}_0 = \tilde{a}_y \cos \frac{1}{2}(\Omega_g \tau - \gamma_{fg} + \gamma_{gy}) \quad (66)$$

$$\tilde{h}_0 = \tilde{a}_h \cos \frac{1}{2}(\Omega_g \tau - \gamma_{fg} + \gamma_{gy} - 2\gamma_{yh}) \quad (67)$$

$$\tilde{g}_0 = \tilde{a}_g \cos(\Omega_g \tau - \gamma_{fg}) \quad (68)$$

を考え、水平加振の場合と同じように  $\varepsilon^1$  のオーダーの式の発散項がゼロとなる条件より振幅、位相に関する式が求まる。すなわち、

$$\tilde{\nu}_y \omega_g \tilde{a}_g + \frac{\tilde{\eta}_y}{4\omega_g} \tilde{a}_y^3 \sin \gamma_{gy} - \frac{F_g}{2\omega_g} \sin \gamma_{fg} = 0 \quad (69)$$

$$-\sigma_g \tilde{a}_g + \frac{\tilde{\eta}_y}{4\omega_g} \tilde{a}_y^3 \cos \gamma_{gy} - \frac{F_g}{2\omega_g} \cos \gamma_{fg} = 0 \quad (70)$$

$$2\tilde{\nu}_h \omega_h \tilde{a}_h - \frac{\tilde{\zeta}_y}{\omega_h} \tilde{a}_y \sin \gamma_{yh} = 0 \quad (71)$$

$$-(\sigma_g + \sigma_h) \tilde{a}_h - \frac{\tilde{\zeta}_y}{\omega_h} \tilde{a}_y \cos \gamma_{yh} = 0 \quad (72)$$

$$2\tilde{\nu}_y \tilde{a}_y - \tilde{\eta}_y \tilde{a}_g \tilde{a}_y \sin \gamma_{gy} + \tilde{\zeta}_h \omega_h^2 \tilde{a}_h \sin \gamma_{yh} = 0 \quad (73)$$

$$(\sigma_g + \sigma_a) \tilde{a}_y - \tilde{\eta}_y \tilde{a}_g \tilde{a}_y \cos \gamma_{gy} + \tilde{\zeta}_h \omega_h^2 \tilde{a}_h \cos \gamma_{yh} - \frac{3}{4} \tilde{\xi} \tilde{a}_y^3 = 0 \quad (74)$$

式 (69)~(74) の解の1つには、 $\tilde{a}_y = 0, \tilde{a}_h = 0$  ( $\gamma_{gy}, \gamma_{yh}$ : 不定) で鉛直全体振動モード  $\phi_g$  のみ、すなわち  $\tilde{a}_g \neq 0$  で振動する線形応答解がある。

$$\tilde{a}_y = \frac{F_g}{2\omega_y} \frac{1}{\sqrt{(\sigma_y^2 + \tilde{\nu}_y^2 \omega_y^2)}} \quad (75)$$

$$\gamma_{fg} = \arctan\left(-\frac{\tilde{\nu}_y \omega_y}{\sigma_y}\right) \quad (76)$$

この線形応答の安定性 (stability) は、 $\varepsilon^1$  のオーダーの振動運動方程式を解のまわりに線形化し、method of strained parameters<sup>5)</sup>を適用して調べることができる。

外力レベルが低いときには式 (75), (76) の線形応答が唯一の解となるが、外力振幅レベルが高くなると、式 (69)~(74) は  $\tilde{a}_y \neq 0, \tilde{a}_h \neq 0, \tilde{a}_g \neq 0$  なるもう一つの解を与えることになる。これがオートパラメトリック連成項による非線形応答である。

### 3. 実験

2. で示した全体振動/局部振動アプローチによるケーブル・はり系の定式化ならびにその振動解を検証する目的で小型模型による振動実験を行った。

#### (1) 模型と実験方法

図-3 に示す長さ 2 m のはりを 1 本のケーブルで支えた小型模型を用いた。基本的には図-1 (b) のと同じである。はりは II 形開断面の鋼製チャンネルであり、

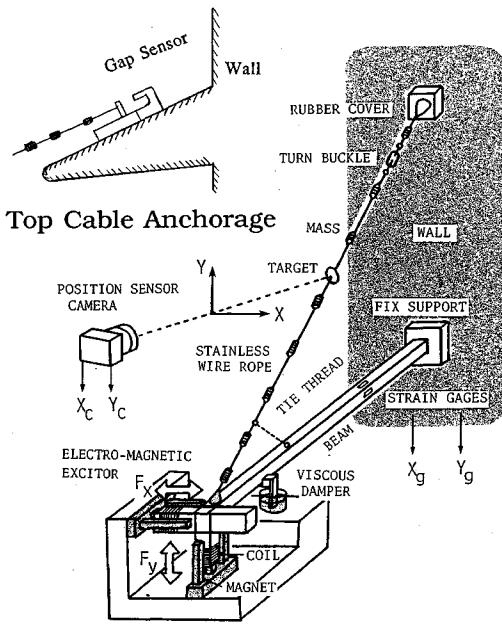
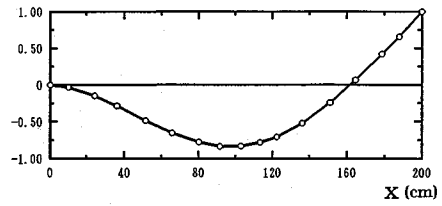
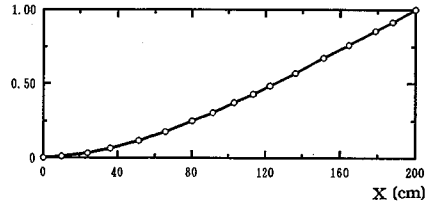


図-3 長さ2mのはりを用いたケーブル・はり模型



(a) 鉛直モード  $\phi_v$  (2次モード)



(b) 水平モード  $\phi_h$  (1次モード)

図-4 全体振動モード  $\phi_v$  と  $\phi_h$  (測定値) (はり端部で変位振幅が1.0となるように正規化してある)

剛な壁に固定してある。ケーブルはステンレスワイヤロープを用いた。

実際の斜張橋の動特性に相似するよう極力努め、また内部共振が起こりやすいように、固有振動数比を  $\omega_v : \omega_h : \omega_g \approx 2 : 1 : 1$  に調整してある。

質量相似のために、ケーブルにはコイルを、はりには鋼ブロックを適当な間隔で付加している。なお、はりでは質量中心がせん断中心に一致するよう、また加振力もせん断中心に作用するようにした。先の実験(文献10)ではこの点について十分な注意を払っていなかったため、桁の横たわみ変形にねじれ変形が連成してしまっていた。今回はこの点について改善を加えている。

ケーブルにはアンカーのところをゴムで巻きつけ、桁にはオイルダンパーをつけて、現実的な構造減衰の値となるようにした。なお、オイルダンパーの特性は日数がたつと若干変化することが判明したので、実験のたびにその特性を測定した。加振は、この実験のために製作したコイル式の手製電磁加振器を用いている。

ケーブルの振動はケーブル中点にターゲットをつけ光学式変位計(ヤーマン製)で測定し、一方はりの鉛直、水平振動の測定にははりに貼りつけた4枚ひずみゲージ(図-3)を用いた。全体振動モード  $\phi_v$ ,  $\phi_h$  におけるひずみ値とはり端部での変位の関係はキャリブレーションにより求めた。

(2) 模型のパラメーター同定

解析解と実験値との比較を行うためには、解析に用いる模型のパラメーター値を正確に把握しておくことが不可欠である。

幾何学量である  $L$ ,  $L_c$ ,  $X_c$ ,  $\theta$  は直接測定した。ケーブルの等価分布質量  $\mu_c$ , はりの等価分布質量  $\mu$  は、付加したおもりの質量とその位置から、計算により求めた。式(21)~(23) (あるいは式(32)~(34)) にでてるパラメーターは上記のもの以外すべて、模型において動的な実験を別途行い同定した。

まず、ケーブルの伸び剛性  $E_c A_c$  の値は、はりを固定した状態でのケーブルの水平振動から決定した。すなわち、ケーブル端部の位置を少しケーブル軸方向に移動させることによりケーブルの張力を変え(ケーブル端部の位置変化はギャップセンサーにより測定(図-3)), その水平一次モードの自由振動から固有振動数を求め、張力  $T$  を逆算した。張力を変化させた実験を計8ケース行い、ケーブル端部の変位量  $w$  とケーブル張力値  $T$  の傾き  $E_c A_c / L_c$  を求め、それより  $E_c A_c$  を決定した。

鉛直、水平方向の全体振動モード  $\phi_v$ ,  $\phi_h$  の固有振動数、減衰定数は、ケーブルの張力を意図的に変更し、局部振動  $\phi_v$  と全体振動が連成しないようにしたうえで、加振器により共振状態にさせたあとの自由振動波形から求めた。モード形については、加振器により共振状態にさせたままで、若干はりの上を小型加速度計(20g重)を移動させ15か所で測定した。ただし、加速度計の質量の影響が若干であるので、はりのひずみゲージによるひずみ値が同じになるよう加振力をその都度微妙に調整した。このようにして求めたモード形  $\phi_h$ ,  $\phi_v$  (図-4)を式(19), (20) に示す  $M_h$ ,  $M_v$  の計算に用いた。用いた  $\phi_v$  は全体振動のいわゆる鉛直2次モードである。

局部振動であるケーブル振動については、はりをケーブル取付け点のところで固定し、その水平自由振動から固有振動数、減衰を求めた。なお、ケーブルの減衰には振幅が大きくなるにつれ値が幾分増すという弱い振幅依

表—1 ケーブル・はり模型のパラメーター (同定値)

	Horizontal excitation	Vertical excitation
$f_y$	9.63 Hz	9.63 Hz
$f_h$	9.38 Hz	9.38 Hz
$f_g$	19.82 Hz	19.81 Hz
$\tilde{v}_y$	0.20 %	0.16 %
$\tilde{v}_h$	0.35 %	0.35 %
$\tilde{v}_g$	0.14 %	0.15 %
$\mu_c$	0.07 kg/m	0.07 kg/m
$M_h$	5.401 kg	5.401 kg
$M_g$	6.200 kg	6.200 kg
$E_c A_c$	35,077.6 N	35,077.6 N
$L_c$	2.08 m	2.08 m
$L$	2.00 m	2.00 m
$x_c$	1.99 m	1.99 m
$\theta$	29.0 deg	29.0 deg
$\phi_h(x_c)$	0.993	0.993
$\phi_g(x_c)$	0.971	0.971

表—2 動的相似パラメーター [模型と実橋 (参考文献 10)] との比較]

	Present model	Example bridge
$f_y / f_h$	1.03	0.85 - 1.27
$f_g / f_h$	2.11	2.17
$\tilde{v}_y$	0.16 - 0.20 %	0.10 - 0.20 %
$\tilde{v}_h$	0.35 %	0.30 %
$\tilde{v}_g$	0.14 - 0.15 %	0.30 %
$\mu_c L_c / M_h$	0.027	0.006 - 0.016
$\mu_c L_c / M_g$	0.023	0.004 - 0.012
$u_0 / L_c$	0.0032	0.0007 - 0.0025

存性が認められた。解析には小振幅域での減衰値を用いることにした。これは、パラメトリック (端部の変位を 1.0 として正規化してある) 励振によるケーブルの振動発生限界は小振幅域でのケーブルの減衰に大きく依存するからである。

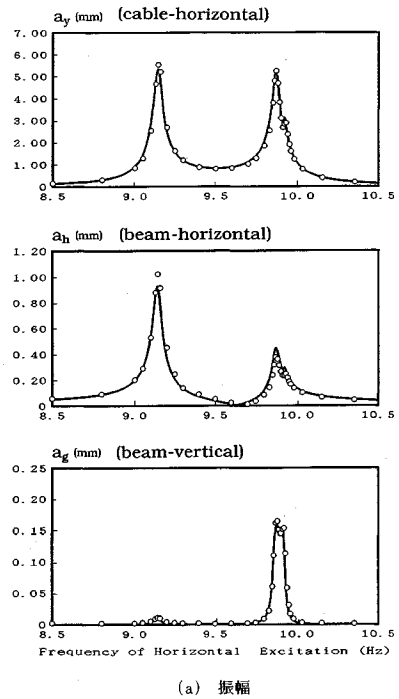
このようにして求めたパラメーターの値を表—1 に示してある。水平加振のときと鉛直加振のときでパラメーター特に減衰の値に若干の差があるが、これは実験が長期間にわたり、動特性に微妙な変化が生じたためである。

今回の模型の動的相似パラメーターをある実斜張橋のと比較したものを表—2 に示しておく。式 (26) が示すように、ケーブルの非線形性は  $u_0/L_c$  に依存する。本模型においては  $u_0 \approx 6 \text{ mm}$  で、 $u_0/L_c$  は実橋のと同じオーダーになるようにしてある。

(3) 解析解との比較

一定調和加振下でのスイープ実験を行い、実験値と解析解との比較をいろいろな応答量を通じて行った。スイープ実験は、基本的には振動数を徐々に増加させて行った。ただし、個々の振動では、互いに大きく異なる 2 つの初期条件を与え、安定な応答が 2 つ以上ないかどうかチェックした。以下の図—5, 8, 9 において、○、△印は実験値であり、実線、点線は、表—1 に示した諸元を用いて求めた解析解である。実線、ならびに○印が安定な定常応答、点線ならびに△印は不安定な定常応答の意味である。

a) 水平調和加振



図—5 水平加振による定常応答 (外力=0.15 N, ○印: 実験値, 実線: 解析値)

0.15 N の一定な水平調和外力による定常応答振幅を図—5 (a) に示す。図—5 (b) は 9.6~10.2 Hz のところを拡大したものである。ケーブルの振動数  $f_y$  と全体水平振動の  $f_h$  が近接しているため、2 か所 (9.20 Hz, 9.88 Hz) で線形内部共振が生じている。非線形性 (式 (23) の  $\tilde{y}^2$  項) のために外力振動数の 2 倍の振動数のはりの鉛直振動が外力振動数 9.88 Hz 付近で励起されている。なお、9.88 Hz の 2 倍がほぼ鉛直振動の固有振動数 19.81 Hz に対応している。この鉛直振動が発生するために、はり、ケーブルの水平振動の振幅がかなりおさえられている (もしはりの鉛直振動が生じないようにするとその水平振動の振幅は 10 mm をこえた)。

図—6 (a) は 9.20 Hz 付近の振動形を示したもので、これはケーブルと桁の水平振動が線形連成した状態である。図—6 (b) は 9.9 Hz 付近の振動形である。これは 3 者が連成した状態であり、桁の鉛直振動は加振振動数の 2 倍の振動数となっている。

図—5 (a), (b) に示したように解析解と実験値との振幅の整合性は、非線形性に起因する振動の部分を含めてきわめて高い。図—5 (c), (d) には位相関係を示すが、位相においてもよく一致している。

b) 鉛直加振

式 (21)~(23) からわかるように、鉛直加振の場合は、オートパラメトリック非線形項、 $2\tilde{y}\tilde{y}$  のために、ケーブルさらにははりの水平振動が生じる可能性がある。

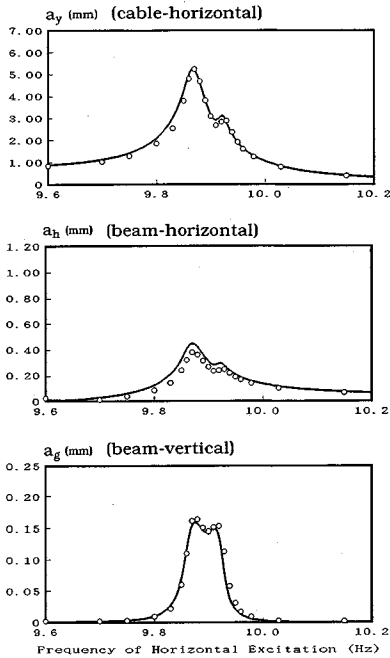


図-5 (つづき) (b) 振幅 ((a) 図の 9.6~10.2 Hz 域を拡大)

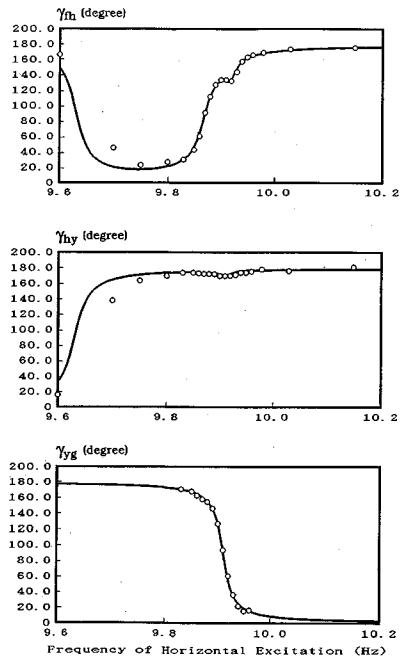


図-5 (つづき) (d) 位相 ((c) 図の 9.6~10.2 Hz 域を拡大)

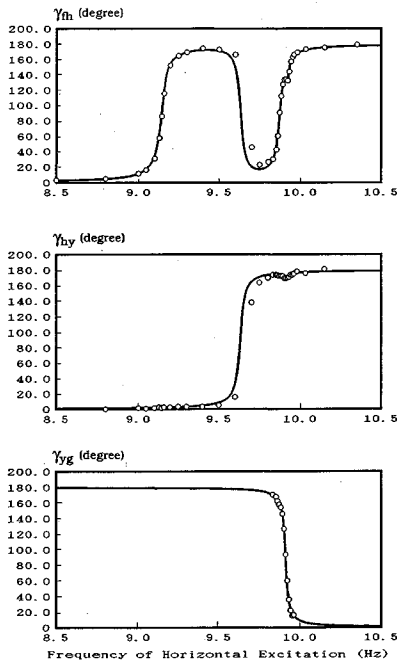


図-5 (つづき) (c) 位相 ( $\gamma_{fh}$ ,  $\gamma_{hy}$ ,  $\gamma_{yg}$  の定義は式 (57)~(59))

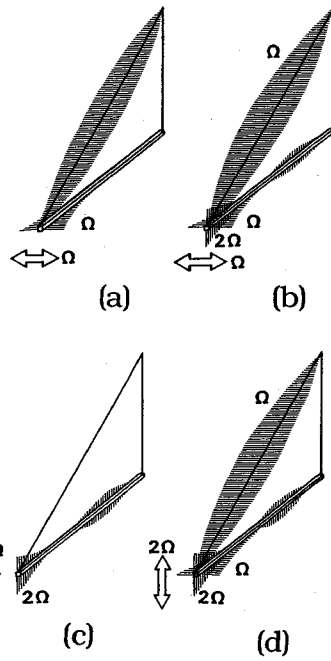
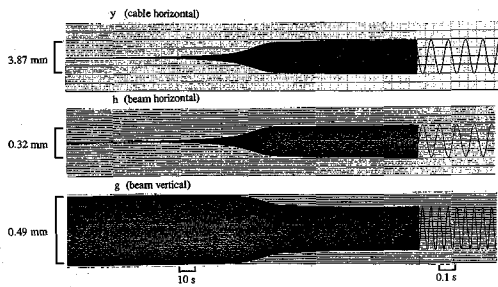


図-6 振動のパターン (相対的な振動数を示してある)

図-7 に示すのは実験結果の一例である。外力が 0.16 N, 外力振動数は 19.8 Hz である。はじめ、ケーブルとはりの水平方向の動きを手で軽くおさえておくと図-6 (c) に示す振動状態が生まれる。手をはなしても、しばらくの間は図-6 (c) の‘定常’状態 (図-7 の左はしの応答状態) が続く (なお、しばらく続くこの‘定常’応

答を図-8, 9 では△印でプロットしてある)。しかし、やがてケーブル, はりの水平振動が現れはじめ、それとともにはりの鉛直振動が減少し、最終的な定常応答 (図-8, 9 の○印) に達する (図-7 の中ほど以後の状態)。このように不安定な定常応答が長く続く現象は数値シミュレーションにおいても確認されている。なお、図-



図一七 鉛直加振（外力 0.16 N、外力振動数 19.8 Hz）における応答の遷移状況

7の右の早送り部から明らかなように、このときのケーブル、はりの水平方向振動数ははりの鉛直方向の振動数（＝加振振動数）の1/2である。

図一八（a）、（b）には外力を0.16 Nに一定にした状態でのスイープ実験の結果を示す。図中の△印は‘定常’応答としてしばらく続くが安定ではない応答状態を、○印は最終的に安定な定常応答を示す。図一八（a）からわかるように19.74～19.84 Hzにおいては非線形な連成（内部共振）のために、ケーブル、はりに大きな水平振動が生じる状態が安定となる。ここでも解析モデルによる振幅および位相予測値は実験値とほぼ一致している。なお、実験において19.73 Hz、19.84 Hzでは定常な応答が2つ求められた。

図一九（a）、（b）には外力振動数を19.76 Hz（図一7のと同じ）に保ち、外力振幅を0から0.35 Nまで変化させたときの実験結果を示す。外力が0.1 Nまではケーブル、はりに水平振動は生じず、はりの鉛直振動のみが生ずる線形応答が安定であることを示している。0.1 Nを越えると、内部共振によりケーブル、はりの水平振動が現れ、はりの鉛直振動の振幅はほぼ飽和する。オートパラメトリック連成の場合、理論的にははりの鉛直振動の振幅は外力が増大してもほとんど一定となる<sup>9)</sup>が、図一九（a）に示すように、実験では外力とともにほんの少し増大する傾向がみられる。解析解ではこの傾向が実験値より明確に出ている。これはケーブルの有する3乗の非線形項 $\bar{y}^3$ によるものと考えられる。

図一八、九にみられるように、実験値と解析値との整合性は全般的に高い。

しかし、図一八の $a_h$ あるいは図一九の $a_g$ 、 $a_h$ のように非線形応答状態では、大きくはないが系統的な差がある。この原因については現時点では明確ではない。解析値はパラメーターの値に敏感である。パラメーター同定に十分な注意を払ったつもりであるが、若干の誤差は避けられずそれが影響した可能性がある。もう一つの原因として考えられることは、ケーブル、はりが大きく水平振動する非線形応答時にははりの鉛直振動のモード形に変化が生じたのではないかとということである。非線形応答

時の予測にもはりの鉛直振動モード $\phi_g(x)$ としては線形応答時を用いている。本解析で用いた全体／局部振動モードによるアプローチ（直交モードによるアプローチも同じことであるが）により、フレキシブルな連続体を少ない自由度でモデル化して大振幅時の非線形振動予測を非常に高い精度で行うことには限界があるということかもしれない。

論文冒頭にも述べたように、モデルのパラメーターは若干異なるものの同様な実験を行った結果を文献10)に発表してある。今回、模型、加振方法に改善を加えたことにより、はりの水平振動が関与する応答時の予測精度（たとえば図一五（a）、8（a）、9（a）のケーブル振幅、はりの水平振幅）が大幅に向上していることを付記しておく。

なお、オートパラメトリック励振は線形連成による内部共振（図一5）とは異なり、図一9からわかるように外力があるレベルを越えないと生じない。このレベルは固有振動数比、外力振動数、各モード（特に局部振動モード）の減衰に大きく依存する。このようなオートパラメトリック励振が実際の斜張橋で生じたという例を1例、著者らは知っている。過去の振動実験結果の見直しを通じ、どの程度の振動で現実起こり得るのかについて今後、調べる必要があると考えている。

#### 4. おわりに

1本のケーブルで支えられたはりという、斜張橋としては最も単純な、しかし基本的かつ重要な線形、非線形内部共振を有するモデルを対象にし、実験的、解析的な立場からその動特性を論じた。

はりの鉛直振動によるケーブルのパラメトリック振動が起こり得ること、その結果、はりの鉛直振動の振幅が飽和することなど内部共振に起因する動的現象が実験的に確認された。

また、ケーブルの非線形性を考慮した全体／局部振動モードによる定式化を行った。解析モデルとしてはかなり単純化したものではあるが、内部共振による振動の振幅のみならず位相についても実験値を定量的に十分説明することが示された。ただし、高い整合性は、実験模型の設計・製作、実験方法としてパラメーター同定に対し十分な注意を払ったことに負う点も大きいことをつけ加えておく。

斜張橋、特に長スパンのマルチケーブル斜張橋ではいろいろな内部共振が存在し、それによるケーブルの振動が重要となると著者らは考えている。ここで扱ったのは単純なモデルであるが、本論の定式化を拡張することにより、複雑なシステムである実際の斜張橋の内部共振現象の予測が可能であることを実験を通じて裏付けたのが本論文の一つの意義と考えたい。実際の長スパン斜張橋



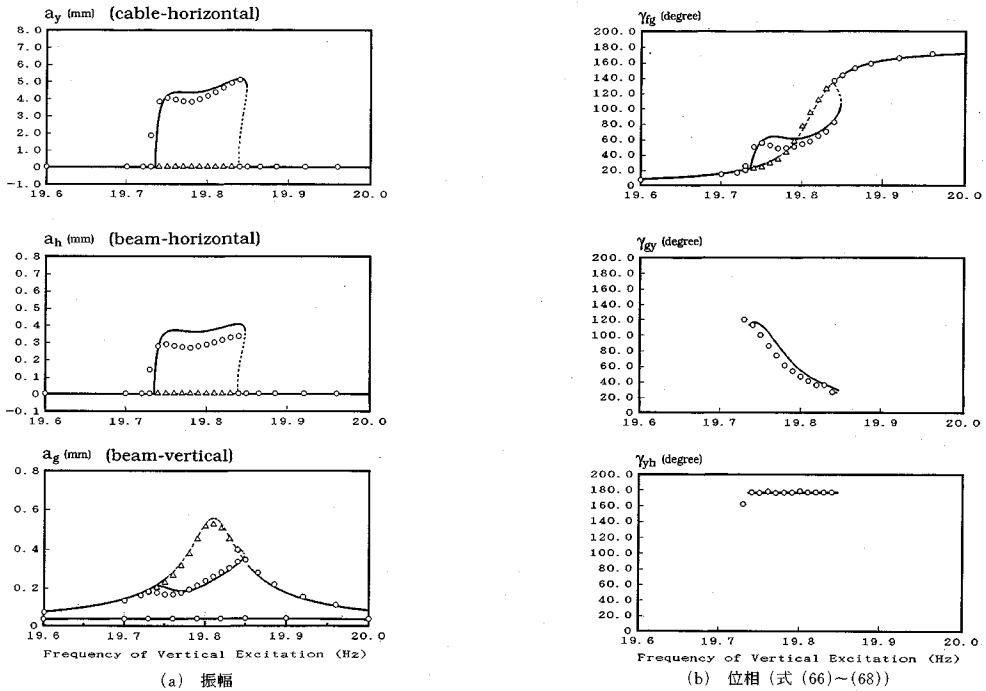


図-8 一定外力 (0.16 N) による鉛直加振時の定常応答 (○印 (実験値), 実線 (解析値): 安定な応答, △印 (実験値), 点線 (解析値): 不安定な定常応答)

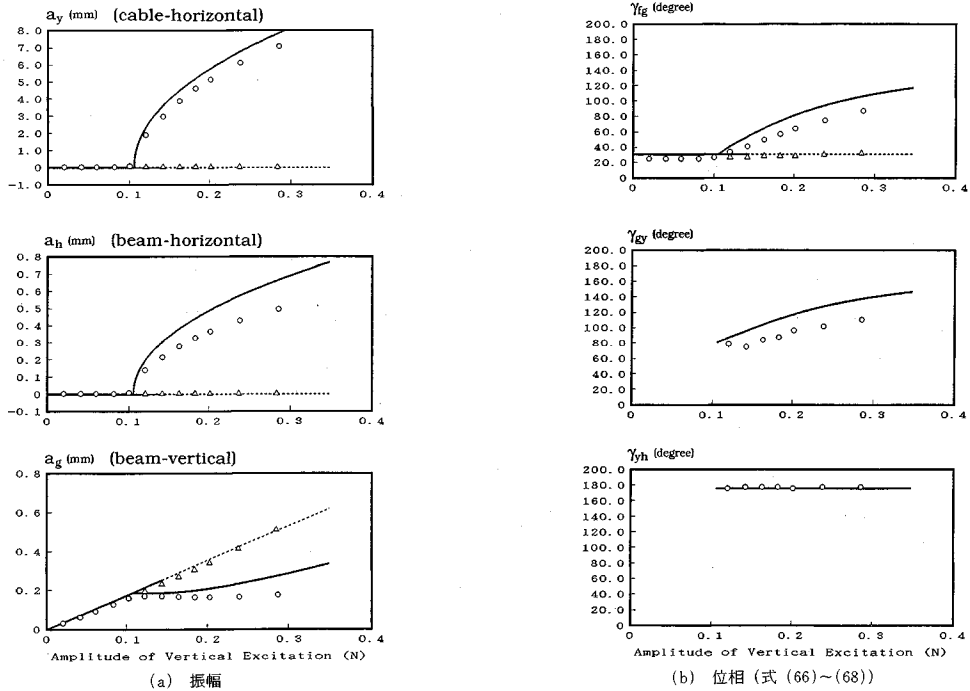


図-9 外力振動数を一定 (19.76 Hz) とし, 外力振幅 (0~0.35 N) を変えたときの鉛直加振時の定常応答 (図中の表示方法は図-8 と同じ)

では、ケーブルの振動を抑えるためにワイヤ、ダンパーさらにはアクティブコントロール<sup>12)</sup>などを取り付けることが不可欠となるであろうが、その制振効果を考える

うえでもここで示した定式化はその礎になり得るものと信じている。

各ケーブルに十分な数の自由度を考え、種々の非線形

性を考慮した、直接的な動的解析は計算機が発達した今日、不可能ではない。本論でいうところの全体振動モードとは、ケーブルを棒材として扱い求められるモードであり、通常の斜張橋の動的解析で使われているものである。それと、解析解が求められるケーブルの局部振動モードとを組み合わせる本研究の定式化は、①自由度が少なくて済み計算時間が短い、②ケーブルの幾何学的非線形性のとりこみが容易、③モード解析法であり現象の本質が式のうえから判断できる、などの点において直接的な方法に比べて優れた点が多いと考えている。なお、マルチケーブル、ケーブルの面内振動等を考慮した一般的な定式化<sup>10)</sup>については別の機会に発表する予定である。

オートパラメトリック連成による内部共振に関しては2自由度系離散モデルを用いた実験が文献13)、14)などにおいて発表されている。いずれも理論値と実験値との整合性は定性的なものにとどまっている。実験的検証の重要性が強く指摘されてきたが<sup>16)</sup>、解析値の妥当性を安定な定常応答のみならず、不安定な定常応答の振幅、位相についても、より複雑なモデルである分布定数系の実験モデルを通じて示すことができた。これが非線形振動論からみたときの本論文の意義と考えている。

謝 辞：実験、データ処理および計算において大変な助力をしていただいたRemi Agret, Anil Kumar Agrawal (東大大学院)の両君に対し、心から感謝したい。斜張橋の振動に関しいろいろな情報を下さった新日本製鉄(株)中村俊一博士、研究初期の段階で有益なコメントをいただいた埼玉大学山口安樹助教授(現在アジア工科大学院派遣中)にも謝意を表す。

#### 参 考 文 献

- 1) Gimsing, N.J. : Cable Supported Bridges, Wiley, Chichester, 215~224, 1983.
- 2) 林・和田・高野・津村：横浜ベイブリッジの振動実験，土木学会第45回年次講演会概要集，I-371, 772~773, 1990. 9.
- 3) Wieland, M. *et al.* : Dynamic Strain measurements in three stay cables of main span of Rama IX cable-stayed bridge, Tech. Report of Chulalongkorn Univ. 1990.

- 4) Pacheco, B.M. and Fujino, Y. : Synchronization of human walking observed during lateral vibration of a congested bridge, Proceedings of the 6th US-Japan Bridge Engineering Workshop, Nevada, USA, 14 pp., May 1990.
- 5) Nayfeh, A.H. and Mook, D.T. : Nonlinear Oscillations, Wiley, New York, 1979.
- 6) Miyata, T., Yamaguchi, H. and Ito, M. : A Study on dynamics of cable-stayed bridges, Annual Report of the Engineering Research Institute, University of Tokyo, 36, 49~56, 1977.
- 7) Kovács, I. : Zur frage der seil-schwingungen und der seildampfung, Die Bautechnik, 325~332, October 1983.
- 8) 前田・前田・越後：斜張橋のシステムダンピングに関する2, 3の考察，土木学会論文報告集，No.333, 35~45, 1983年5月.
- 9) Maeda, K., Yoneda, M. and Maeda, Y. : System damping effects on cable-stayed bridges, Proceedings of 12th IABSE Congress, Vancouver, 747~754, 1984.
- 10) ワーニッシュアイ・藤野・パチェコ・岡本：ケーブル・桁系の線形・非線形連成振動に関する解析と実験，土木学会，構造工学論文集，36 A, 719~732, 1990. 3.
- 11) Fujino, Y., Pacheco, B.M. and Warnitchai, P. : An experimental and analytical study of autoparametric resonance in a 3-DOF of cable-stayed beam, 3rd Int. Conf. on Nonlinear Vibration, Stability and Dynamics of Structures and Mechanisms, Blacksburg, Virginia, USA, June 1990.
- 12) Warnitchai, P. : Nonlinear vibration and active control of cable-stayed Bridges, 東京大学博士論文，1-400, Sept. 1990.
- 13) Washizu, K. : Variational methods in elasticity, Pergamon Press, 3 e, 1982.
- 14) Haxton, R.S. and Barr, A.D.S. : The autoparametric vibration absorber, Journal of Engineering for Industry, ASME, Paper No.71-Vibr-49, 119~125, 1972.
- 15) Haddow, A.G., Barr, A.D.S. and Mook, D.T. : Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure, Journal of Sound and Vibration, 97 (3), 451~473, 1984.
- 16) Nayfeh, A.H. and Balachandran, B. : Modal interactions in dynamical and structural systems, Applied Mechanics Review, 42 (No.11, Part 2), S 175~201, 1989.

(1990.10.23 受付)

## EXPERIMENTAL AND ANALYTICAL STUDY ON INTERNAL RESONANCES IN A CABLE-STAYED BEAM MODEL

Yozo FUJINO, Pennung WARNITCHAI and Benito M. PACHECO

Linear and nonlinear internal resonances in a physical model of cable-and-beam structure are studied. Special emphasis is placed on autoparametric resonance. An experiment using a scale model was conducted where model parameters are identified with special care. A 3-DOF analytical model based on local and global modes is also derived where finite motion of the cable introduces geometrical nonlinearities in quadratic and cubic forms. Steady-state solutions of the coupled nonlinear equations of motion are obtained by the perturbation technique. Very good agreement between experiment and prediction is found for both vertical and horizontal harmonic excitations.