

近似の概念を利用したトラス構造物の 離散的最適設計法に関する研究

杉本博之*

本研究は、トラス構造物の離散的最適設計法について研究したものである。本論文の最適化手法は、初期設計、応答近似式による検討ランク幅の設定、連続的近似最適化問題の利用、および部分抽出法より構成される。列挙法を基本としているが、近似の概念を随所に利用し、構造の特性、および連続的近似最適化問題の結果を利用して検討すべき組合せの数を少なくすることに成功し、実用的な離散的最適設計法を示している。

Keywords: discrete optimization, truss structures, approximation concepts, enumeration method

1. ま え が き

円管断面を用いる溶接鋼管構造は、鋼重の大幅な軽減、もろもろのコストの低減¹⁾をはかれ、また陰影が柔らかく、現代的な構造美を表す等の特徴をもつ。この鋼管構造には、JIS G 3444 に定められる一般構造用炭素鋼鋼管（以下、既製鋼管と略する）が一般的に使用される²⁾。

また、小スパンあるいは小規模なトラス構造物はH形鋼等の既製の形鋼を用いて製作されるし、鉄塔は既製の山形鋼を用いて製作される。

部材断面積を仮に設計変数と考えると、これらの構造物の設計変数は離散量となり、設計変数を連続量とする最適設計法は、これらの構造物の設計には基本的には適用できないことになる。

既製形鋼あるいは既製鋼管を用いる骨組構造物の最適設計問題は、非線形整数計画問題となるが、この問題に関する研究は比較的少ない^{3)~7)}。

最近の研究としては、AmirとHasegawa⁸⁾がSUMT変換した副問題を無制約離散最適化手法⁹⁾により解く方法を発表している。

一方、John, RamakrishnamとSharma¹⁰⁾、およびOlsenとVanderplaats¹¹⁾は、主問題を線形近似し、その副問題をそれぞれ分枝限定法^{12),13)}、あるいは混合整数計画法で解く方法を発表している。

主問題を線形近似する方法は、繰返し回数も少なく、実用的な方法と考えられるが、離散的最適化問題を線形近似することは、場合によっては無理があると考えられ、その収束性には疑問が残る。この点については、本文の数値計算例の中で言及する。

以上の研究は、すべて国外の規格に従った研究であるが、国内の規格に従う研究としては、菊田、松井、新延、

大平¹⁴⁾らの研究がある。これは、列挙法を利用し、目的関数の値が、ある範囲以内に入る組合せを求める手法であるが、設計変数の数が増えると考慮すべき組合せの数は非常に多くなるので、少ない設計変数の場合に有効な手法であると考えられる。

本論文においても、列挙法を基本として用いる。これは、列挙法が理論的に簡明であり、離散的最適設計問題の解法としては信頼性が高いからである。列挙法とは、要するに、考えるべき組合せのうち、目的関数の少ない順に実行可能性を検討して、最初に制約条件を満足する設計が最適解という方法である。そのため、たとえば骨組構造物の設計において、設計変数の数および考慮すべき鋼材の種類（ランク）が多くなると、検討すべき組合せの数が天文学的なオーダーになり、実用的なものではなくなる。

そこで、本論文においては、著者が以前から研究している近似の概念を利用することにより、検討すべき組合せの数を実用的なオーダーにまで減少させ、かつ少ない繰返し回数で最適解が得られる手法の開発を試みた。

本論文の最適化手法は、初期設計、応答近似式による検討ランク幅の設定、連続的近似最適化問題の利用、および部分抽出法より構成されるが、これらを順に説明し、最後に数値計算例を説明する。

2. 離散的最適化問題

本論文のトラス構造物の離散的最適化問題は、次のように定義される。

○目的関数：

$$O(I) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot l_i \cdot A(I_i) \rightarrow \min \dots \dots \dots (1)$$

○制約条件：

$$g_j(I) \leq 0 \quad (j=1 \sim m) \dots \dots \dots (2)$$

応力の制約条件の場合は、次のように表される。

* 正会員 工博 室蘭工業大学助教授 工学部建設システム工学科 (〒050 室蘭市水元町 27-1)

$$g_i(\{I\}) = F_{ik}(\{I\}) - F_{ai}(I_i) \leq 0$$

$$(i=1 \sim NM, k=1 \sim NLC) \dots\dots\dots (3)$$

変位の制約条件の場合は、次のように表される。

$$g_j(\{I\}) = X_{pk}(\{I\}) - X_a \leq 0$$

$$(p \in J, k=1 \sim NLC) \dots\dots\dots (4)$$

○上下限值：

$$I_{\min} \leq I_i \leq I_{\max} \quad (i=1 \sim n) \dots\dots\dots (5)$$

○設計変数：

$$\{I\} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 O は目的関数、 I_i は設計変数 i の値であり、既製形鋼あるいは既製鋼管のランクである。本論文においては、既製形鋼あるいは既製鋼管の種類を断面積の少ない順に並べ、少ない方から 1 からの通し番号を与えてこれらをランクとした。 $\{I\}$ は設計変数のベクトルである。 $A(I_i)$ は、 i 部材のランク I_i に対応する断面積である。 n は設計変数の数、 l_i は設計変数 i にリンクされている部材の部材長の総和、 c_i は設計変数 i の鋼材あるいは鋼種の単位容積当たりの価値を表す量である。 $c_i (i=1 \sim n)$ が 1 の場合は、 O は骨組構造物の全容積となり、 c_i が何らかのコストを表す場合は、 O はそれに対応した全コストになる。 g_j は制約条件、 m は制約条件の総数である。 F_{ik} は荷重条件 k における i 部材の軸力、 F_{ai} は i 部材の許容軸力、 NM は部材数、 NLC は荷重条件数である。 X_{pk} は荷重条件 k における自由度 p の方向の変位、 X_a は許容変位量、 J は変位を制約する自由度の集合である。 I_{\max} は使用できるランクの最大値であり、 I_{\min} は最小値である。 I_{\min} は一般に 1 であるが、細長比の制約がある場合は、対応するランクに設定することになる。

3. 近似の概念を用いる離散的最適設計法

本論文の離散的最適設計法は、列挙法を基本としている。考えられるすべての組合せを、式 (1) で計算される目的関数の少ない順に構造解析し、最初にすべての制約条件を満足する組合せが最適設計となる。この考え方は、確実に最適設計を与えるが、たとえば、設計変数の数が 5 であり、各設計変数ごとに使用可能なランクが 20 あれば、考えられる組合せの総数は $20^5 = 320$ 万となる。目的関数の少ない順に検討するので、必ずしも 320 万回の構造解析が必要なわけではないが、要求される構造解析のオーダーが実用的なものでないのは明らかである。

ここで、もし、各設計変数ごとに検討すべきランクが 20 から 5 に縮小できると、組合せの数は $5^5 = 3125$ と激減する。さらに、それらの組合せの検討すべき目的関数の上下限値が設定されると、この数はさらに減ることになる。

これらのことを背景として、本論文においては、近似

の概念を用いて列挙法を改良し、検討すべき組合せの数ができるだけ少なくなるようにし、また、厳密な構造解析の回数も少なくなるように工夫を加えた。

本論文の離散的最適設計法の基本的な構成は、次のようになる。

- (1) 全応力設計および連続的近似最適化問題による初期設計。
 - (2) 応答近似式の利用による検討ランク幅の設定。
 - (3) 連続的近似最適化問題の解の利用による効率化。
 - (4) 実行可能性の検討は、近似構造解析→厳密構造解析の 2 段階にする。
 - (5) 部分抽出法による効率化。
- これらを、順に以下に説明する。

(1) 初期設計

本論文の離散的最適設計法は繰返し計算になるが、各イテレーションにおける検討すべき組合せの数を少なくするために、前回のイテレーションで得られた最適な組合せに対応する目的関数の値を、今回検討すべき組合せの目的関数の上限値としている。そのため、初期に与えられる設計も許容設計であることが必要である。検討する組合せを選ぶ段階で、その目的関数の値が極端に小さい場合、最適設計も排除する可能性が出てくるからである。

一方、以降の計算効率を考えると、初期に与えられる目的関数の値は少ない方が好ましい。最適設計の目的関数の値と差が大きければ大きいほど、検討すべき組合せの数が多くなるからである。

このような条件を満足する設計法のうち、比較的容易に得られるのは全応力設計法であるので、初期設計は、応力だけの制約条件の場合は全応力設計法の手続きで、変位の制約条件もある場合は、さらに連続的近似最適化問題を解くことにより求めることにした。

本論文の離散変数のための全応力設計法の手続きは、次のようになる。

- (i) 初期値を入力する。
- (ii) 構造解析を行い、各部材の作用軸力を求める。
- (iii) 各設計変数ごとに、許容軸力が作用軸力より大きく、かつ断面積が最小のランクを選ぶ。
- (iv) 変位の制約条件があれば (v) へ、なければ (vii) へ行く。
- (v) (iii) で求めたランクに関して構造解析を行い、式 (4) の X_{pk} と X_a の比を求め、その最大値を k_a とする。 $k_a \leq 1$ なら (vii)、 >1 なら (vi) へ行く。
- (vi) 各設計変数に対応する断面積を k_a 倍し、その値より断面積が大きく、かつ最小のランクを選ぶ。
- (vii) 収束していれば、それを全応力設計 $\{I\}^{(0)}$ とし次のステップに進む。収束していなければ (ii) から繰

り返す。

応力のみ制約条件の場合は、上の手続きで十分と考えられるが、変位の制約条件がある場合には、上記の (v), (vi) の手続きのためかなり安全側の設計 (大きい目的関数) を与える可能性がある。そこで、変位の制約条件がある場合には、上記の $\{I\}^{(0)}$ に関して連続的近似最適化問題を作成し、その解を利用して新しい $\{I\}^{(0)}$ を求めた。

式 (1)~(6) の離散的最適化問題に対応する連続的近似最適化問題は、各イテレーションにおいても用いられるので、一般的な形でここでは定義する。

k 回目のイテレーションにおける連続的近似最適化問題は、次のようになる。

○目的関数：

$$O(\{A^c\}) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot l_i \cdot A^c_i \rightarrow \min \quad (7)$$

○制約条件：

$$\bar{F}_{ik}(\{I\}^{(k-1)}, \{A^c\}) - \bar{F}_{ai}(A^c_i) \leq 0 \quad (i=1 \sim NM, k=1 \sim NLC) \quad (8)$$

$$\bar{X}_{pk}(\{I\}^{(k-1)}, \{A^c\}) - X_p \leq 0 \quad (p \in J, k=1 \sim NLC) \quad (9)$$

○上下限值：

$$A^{\min}_i \leq A^c_i \leq A^{\max}_i \quad (i=1 \sim n) \quad (10)$$

○設計変数：

$$\{A^c\} = \{A^c_1, A^c_2, \dots, A^c_n\} \quad (11)$$

ここで、 A^c_i は設計変数 i の部材断面積であり連続量である。 \bar{F}_{ik} , \bar{X}_{pk} は、それぞれ軸力と変位の $\{I\}^{(k-1)}$ における、逆変数に関する線形近似式であり、 \bar{F}_{ai} は、許容軸力の順変数に関する線形近似式である。許容軸力の値は、離散的にしか与えられないので、その微係数の計算は難しいが、本論文では、近似的に次式で計算されるものとした。

$$\frac{\partial \bar{F}_{ai}}{\partial A^c_i} = \frac{F_{ai}(I_{\max}) - F_{ai}(1)}{A(I_{\max}) - A(1)} \quad (12)$$

式 (10) の A^{\min}_i , A^{\max}_i は、初期設計においては、 I_{\min} , I_{\max} に対応する値が用いられるが、イテレーションの過程では、それぞれ設定される値を用いることになる。

変位の制約条件がある場合には、上記の式 (7)~(11) を 1 回解き、得られた設計を $\{A^c\}^*$ とすると、それよりも大きい断面積を有するランクのうち、最小のものを初期設計 $\{I\}^{(0)}$ として次のステップに進むことになる。

以上が、本論文の初期設計を計算する方法である。

(2) 応答近似式による検討ランク幅の設定

トラス部材として使用される既製形鋼あるいは既製鋼管の断面の種類は、20~30 あると考えられる。そのすべての組合せを考えるのは実用的でないのは、前記のとおりである。そのため、現在の設計の前後に適当なラン

ク数のムーブリミットを設定し、機械的に検討ランク幅を制限する¹⁴⁾。つまり、イテレーションの過程では、式 (5) の代わりに次式が用いられる。

$$\text{MAX}(I_{\min}, I_i - MV) \leq I_i \leq \text{MIN}(I_{\max}, I_i + MV) \quad (i=1 \sim n) \quad (13)$$

ここで、MAX, MIN は、最大、最小をとる関数であり、MV はムーブリミットである。断面の種類が 20, MV が 2 であれば、ムーブリミットを用いることにより、考慮すべき組合せの数は、 20^n から 5^n に減少することになる。

さらに、本論文で対象としているのはトラス構造物であるので、設計変数によっては、構造の特性により、他の設計変数の変化の影響を余り受けなく、検討ランク幅をさらに縮小できることも考えられる。

1 つの設計変数でも、検討ランク幅が、たとえば 5 から 4 に減少すると、考慮すべき組合せの総数は 2 割減ることになるのでその効果は大きい。

そこで、構造系の特性を検討ランク幅の縮小に反映させるために、本論文では、以下のように感度解析および応答近似式を利用することを試みた。

k 回目のイテレーションにおいて、ある部材 i の軸力は、比較的精度良く次式で近似できる¹⁵⁾⁻¹⁷⁾。

$$F_i = F_i^{(k-1)} + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi_p} \right)^{(k-1)} \{ \xi(I_p) - \xi(I_p^{(k-1)}) \} \quad (14)$$

ここで、 $F_i^{(k-1)}$, $(\partial F_i / \partial \xi_p)^{(k-1)}$ は、現在の設計 $\{I\}^{(k-1)}$ における軸力、および軸力の逆変数に関する微係数の値である。逆変数 ξ は、部材断面積の逆数で次式である。

$$\xi = 1/A \quad (15)$$

すべての設計変数が、軸力の微係数の符号に応じて、現在の設計の前後に ΔI ランク変わるものとして、軸力の近似値の最大および最小を求めると、軸力が正の場合、それらは次式で計算される。

$$F_i^{\max} = F_i^{(k-1)} + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi_p} \right)^{(k-1)} \{ \xi(I_p^{(k-1)} + \Delta I) - \xi(I_p^{(k-1)}) \} + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi_p} \right)^{(k-1)} \{ \xi(I_p^{(k-1)} - \Delta I) - \xi(I_p^{(k-1)}) \} \quad (16)$$

$$F_i^{\min} = F_i^{(k-1)} + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi_p} \right)^{(k-1)} \{ \xi(I_p^{(k-1)} - \Delta I) - \xi(I_p^{(k-1)}) \} + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi_p} \right)^{(k-1)} \{ \xi(I_p^{(k-1)} + \Delta I) - \xi(I_p^{(k-1)}) \} \quad (17)$$

ここで、 Σ の下の $- (+)$ は、逆変数に関する微係数の符号が、マイナス (プラス) のみの項の和をそれぞれ

意味する。

上と同様に、自由度 j の方向の変位の近似値の最大および最小は、変位が正の場合、次式で計算される。

$$\begin{aligned}
 X_j^{\max} &= X_j^{(k-1)} \\
 &+ \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi_p} \right)^{(k-1)} \{ \xi(I_p^{(k-1)} + \Delta I) - \xi(I_p^{(k-1)}) \} \\
 &+ \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi_p} \right)^{(k-1)} \{ \xi(I_p^{(k-1)} - \Delta I) - \xi(I_p^{(k-1)}) \} \\
 &\dots\dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_j^{\min} &= X_j^{(k-1)} \\
 &+ \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi_p} \right)^{(k-1)} \{ \xi(I_p^{(k-1)} - \Delta I) - \xi(I_p^{(k-1)}) \} \\
 &+ \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi_p} \right)^{(k-1)} \{ \xi(I_p^{(k-1)} + \Delta I) - \xi(I_p^{(k-1)}) \} \\
 &\dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

式 (16)~(19) において、 ΔI の符号は、最も影響が大きく出るように選ばれているので、 ΔI 自身の値は大きくする必要はなく、2, 3 で十分と考えられる。

式 (16)~(19) より計算される値を、前節の全応力設計法の iii) の作用軸力あるいは v の変位の値とし、前節の全応力設計法の手続き iii)~vi) によりそれぞれ得られたランクを、各設計変数の新しい上下限值 (i^L), (i^U) とする。その結果、式 (13) は次のようになる。

$$i^L_i \leq I_i \leq i^U_i \quad (i=1 \sim n) \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 i^L_i, i^U_i は次式である。

$$\left. \begin{aligned}
 i^L_i &= \max(i^L_i, I_{\min}, I_i - MV) \\
 i^U_i &= \min(i^U_i, I_{\max}, I_i + MV)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

以上の方法により、構造系の特性を反映して、検討ランク幅を設定できるようになったと考えられる。

(3) 連続的近似最適化問題の利用

設計変数の上下限值を式 (20) のように設定することにより、考慮すべき組合せの数はかなり少なくできる。また、本論文のように最適設計を求める場合は、それらの組合せのうち、現在の設計 $\{I\}^{(k-1)}$ における目的関数の値 O^0 より大きい目的関数をもつ組合せは考慮する必要はない。

さらに、式 (1)~(6) の離散的最適化問題の離散条件を外し、現在の設計に関して近似した連続的近似最適化問題の解の目的関数の値 O^* は、少なくとも今回のイテレーションにおける元の離散的最適化問題の下限値と考えられるので、この値より目的関数の少ない組合せも同じく考慮する必要はないと考えられる。

連続的近似最適化問題は、すでに式 (7)~(11) で定義されている。

式 (10) の上下限值は、この場合、式 (20) を考慮し

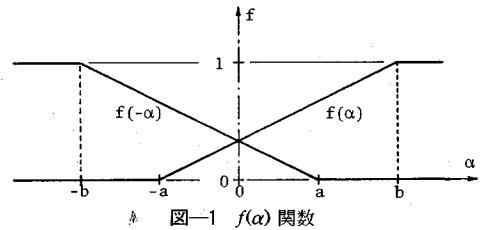


図-1 $f(\alpha)$ 関数

て次のように考えた。

$$A^{\min}_i = A(i^L_i), A^{\max}_i = A(i^U_i) \quad (i=1 \sim n) \dots\dots\dots (22)$$

この連続的近似最適化問題の結果は、目的関数の下限値 O^* の計算以外に、式 (20), (21) の i^L_i, i^U_i の修正にも用いられる。連続的近似最適化問題が作る設計空間は、必ずしも離散的最適化問題の設計空間と対応しておらず、前者の解を単純に離散値に切り上げることによって真の最適解を得るのは難しいと考えられる。しかし、最適解の存在する方向に関しては何らかの情報をもっていと考えられる。

つまり、近似問題の最適解 A^{c*} が、現在の設計 $A(I_i^{(k-1)})$ よりもかなり少なければ、検討ランク幅の上限値 i^U_i は現在の値よりも小さくできるだろうし、逆に大きければ、その程度に応じて下限値 i^L_i を大きくできると考えられる。

A^{c*} と $A(I_i^{(k-1)})$ の関係により検討ランク幅を改良するための関数として、以下に説明する関数 f を用いた。

関数 f は、図-1 に示すように 0~1 の間の値をとる関数であり、次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned}
 f(\alpha) &= 0 && : \alpha \leq -a \\
 f(\alpha) &= \frac{a+\alpha}{a+b} && : -a < \alpha \leq b \\
 f(\alpha) &= 1 && : b < \alpha
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 a, b は図-1 に示すとおりであり、設計変数のオーダーにより適当に定められる。

式 (23) の関数 f を用いて、設計変数の最終的な上下限值 $\{I^U\}, \{I^L\}$ は次式で決まるものとする。

$$\left. \begin{aligned}
 I^U_i &= I_i^{(k-1)} + R[\Delta I^U_i \cdot f(\Delta A_i)] \\
 I^L_i &= I_i^{(k-1)} - R[\Delta I^L_i \cdot f(-\Delta A_i)]
 \end{aligned} \right\} (i=1 \sim n) \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 $R[\cdot]$ は、 $[\]$ 内の実数値の小数点以下を切り上げて整数値にする関数である。また、 $\Delta A_i, \Delta I^L_i, \Delta I^U_i$ は次式である。

$$\Delta A_i = A^{c*}_i - A(I_i^{(k-1)}) \quad (i=1 \sim n) \dots\dots\dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta I^L_i &= I_i^{(k-1)} - i^L_i \\
 \Delta I^U_i &= i^U_i - I_i^{(k-1)}
 \end{aligned} \right\} (i=1 \sim n) \dots\dots\dots (26)$$

ある設計変数 i において、 $\Delta I^L_i = 4, \Delta I^U_i = 3$ のとき、 ΔA_i の値により検討ランク幅がどのように変わるかを示したのが図-2 である。図において、太い実線が式 (24) で計算される最終的な上下限值である。

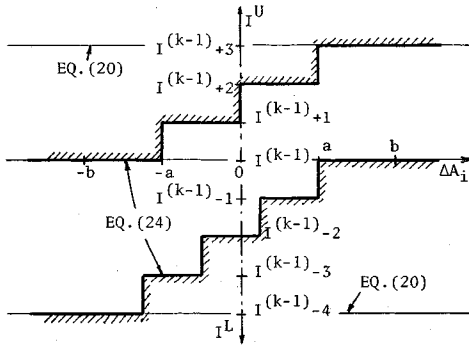


図-2 検討ランク幅の改良例

この場合、 ΔA_i が a よりも大きければ、検討ランク幅は、

$$I_i^{(k-1)} \leq I_i^{(k)} \leq I_i^{(k-1)} + 3$$

ΔA_i の値が小さく、0 近傍であれば、

$$I_i^{(k-1)} - 2 \leq I_i^{(k)} \leq I_i^{(k-1)} + 2$$

あるいは、

$$I_i^{(k-1)} - 2 \leq I_i^{(k)} \leq I_i^{(k-1)} + 1$$

ΔA_i がマイナスになり、 $-b$ 近傍であれば、

$$I_i^{(k-1)} - 4 \leq I_i^{(k)} \leq I_i^{(k-1)}$$

のようになり、 ΔA_i の符号、および値の大小により検討ランク幅が縮小改良される。この方法の効果は、後記の計算例で、より具体的に説明される。

(4) 実行可能性の2段階検討

本論文の方法は、列挙法を基準としているが、そのままでは検討すべき組合せの数が非実用的なオーダーになるため、3. (2) の応答近似式を利用する検討ランク幅の設定、および3. (3) の連続的近似最適化問題の結果を利用して、目的関数の上下限値の設定、および検討ランク幅の縮小改良を行った。

結局、検討すべき組合せは、式 (24) で定義される検討ランク幅内のすべての組合せのうち、その目的関数の値が、

$$O^* \leq O(\{N\}) < O^0 \dots \dots \dots (27)$$

を満足する組合せ (これを集合 P とする) のみとなる。ここで、 O^0 は現在の設計 $\{N^{(k-1)}\}$ の目的関数の値であり、 O^* は連続的近似最適化問題の最適解の目的関数の値である。

これらの組合せを、目的関数の値の少ない順に並べ、小さい方から順に構造解析をし、最初にすべての制約条件を満足する組合せが、そのイテレーションにおける最適解 $\{N^{(k)}\}$ となる。このとき、すべての組合せについて厳密な構造解析をするのではなく、まず応答近似式による近似解析を行い、緩和された制約条件を満足する組合せについてのみ厳密な構造解析を行い、実行可能性の検

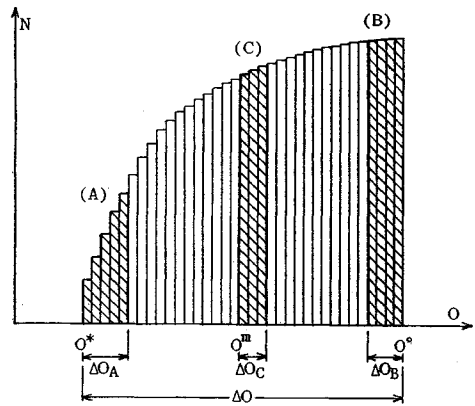


図-3 組合せの個数と目的関数のヒストグラム

討をすることにした。

応力と変位の制約条件がある場合の、近似解析による実行可能性の検討は、次式で行うことになる。

$$\begin{aligned} \text{応力: } & \bar{F}_{ik}(\{N^{(k-1)}\}, \{N\}) - \beta \cdot F_{ai}(I_i) \leq 0 \\ & (i=1 \sim NM, k=1 \sim NLC) \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{変位: } & \bar{X}_{pk}(\{N^{(k-1)}\}, \{N\}) - \beta \cdot X_a \leq 0 \\ & (p \in J, k=1 \sim NLC) \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

上式の \bar{F}_{ik} あるいは \bar{X}_{pk} は、連続的近似最適化問題に用いられた式 (8) および式 (9) のものと同じである。これらの近似式は、かなり精度が良いと考えられるが、得られる値はあくまでも近似値であるので、厳密に許容値 F_a 、あるいは X_a と比較し、満足しない組合せを捨てると、厳密な構造解析の結果では満足する組合せまで捨てる可能性がでてくる。そこで、上式のように、許容値に係数 $\beta (>1, 1.001 \sim 1.03 \text{ 程度})$ を乗じて制約条件を若干緩和した。

以上の2段階の実行可能性の検討により、厳密な構造解析の回数をかかなり減少させることができた。

(5) 部分抽出法による離散最適化

列挙法を効率的に用いるために、前節では2段階の実行可能性の検討を説明したが、本節では、さらに、集合 P の中から、適当な数の組合せを部分的に抽出し、それらに関する最適解の存在の有無の検討を全体の検討に置き換える方法 (部分抽出法) を用いた。

いま、集合 P に含まれる組合せの個数を縦軸にとり、目的関数の値を横軸にとると、そのヒストグラムは図-3のようになる。

図に示すように、 O^* から増加の方向に ΔO_A の範囲にある組合せのグループを A グループ、 O^0 から減少の方向に ΔO_B の範囲にある組合せのグループを B グループ、 O^* と O^0 の中間の O^m から増加の方向に ΔO_C の範囲にある組合せのグループを C グループとする。

$\Delta O_A, \Delta O_B, \Delta O_C$ は次式である。

$$\left. \begin{aligned} \Delta O_A &= \xi_A \cdot (O^0 - O^*) \\ \Delta O_B &= \xi_B \cdot (O^0 - O^*) \\ \Delta O_C &= \xi_C \cdot (O^0 - O^*) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ここで、各グループにおける許容設計の存否と全体の最適設計の関係について、下記の事項を仮定する。

A→B→Cグループの順に、各グループに属する組合せのうち、目的関数の値の少ない順に実行可能性の検討を行うとき、

〈仮定1〉 Bグループに許容設計がなければ全体にも許容設計はない。

〈仮定2〉 Bグループに許容設計があり、Cグループになければ、全体の最適設計は、Bグループを含むBC間に存在する。

以上の仮定のもとに、本論文の部分抽出による、k回目のイテレーションにおける列挙法の手続きを説明すると以下ようになる。

(i) 集合Pに含まれるすべての組合せについて式(1)の目的関数の値を計算し、A、B、Cの各グループに入る組合せのみ、各配列に格納する。

(ii) Aグループに格納された組合せについて、目的関数の少ない順に許容設計を探す。存在すれば、その組合せがこのk回目のイテレーションにおける最適設計になるので、次のk+1回目のイテレーションに進む。

存在しなければ (iii) へ行く。

(iii) Bグループに格納された組合せについて、目的関数の少ない順に許容設計を探す。存在すれば、その目的関数の値を O_B^* として (iv) へ行く。

存在しなければ、〈仮定1〉より、このイテレーションには前回の最適解を上回る組合せは存在しないので、 $\{I\}^{(k-1)}$ を最適設計として、繰返し計算が終了される。

(iv) Cグループに格納された組合せについて、目的関数の少ない順に許容設計を探す。存在すれば、その目的関数の値を O_C^* として (v) へ行く。

存在しなければ、〈仮定2〉より、集合Pの中に O_B^* より目的関数の少ない許容設計が存在するとしたら、その範囲は、

$$O^m + \Delta O_C < O < O^0 - \Delta O_B \dots\dots\dots (31)$$

であるので、この範囲に含まれる組合せを、目的関数の少ない順に検討して許容設計を探す。許容設計が存在すればそれが、なければ O_B^* に対応する設計がこのk回目のイテレーションにおける最適設計になるので、次のk+1回目のイテレーションに進む。

式(31)に含まれる組合せの数が多ければ、 $O^m + \Delta O_C$ を O^* 、 $O^0 - \Delta O_B$ を O^0 と考えて、部分抽出法を用いる。

(v) この場合、集合Pの中に O_C^* より目的関数の少ない許容設計が存在するとしたら、その範囲は、

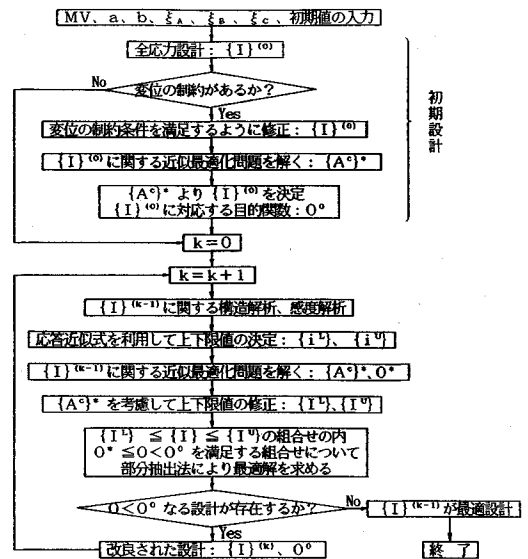


図-4 離散的近似最適化手法の簡単な流れ図

$$O^* + \Delta O_A < O < O^m \dots\dots\dots (32)$$

であるので、この範囲に含まれる組合せを、目的関数の少ない順に検討して許容設計を探す。許容設計が存在すればそれが、なければ O_C^* に対応する設計がこのk回目のイテレーションにおける最適設計になるので、次のk+1回目のイテレーションに進む。

式(32)に含まれる組合せの数が多ければ、 $O^* + \Delta O_A$ を O^* 、 O^m を O^0 と考えて、部分抽出法を用いる。

この部分抽出法の基本的な考え方は、次元探索における領域削除法と同じである。 ΔO_B 、 ΔO_C の幅の決定は問題に応じて決めなければならないが、列挙法の効率を上げるには有効な方法であると考えられる。

(6) 離散的最適設計法の流れ

本論文の離散的最適設計法を3.(1)~(5)で説明したが、それらの簡単な流れ図を図-4に示した。

まず初期設計を行い、 $\{I\}^{(0)}$ が得られてから繰返し計算に入る。

各イテレーションにおいては、まず感度解析を行い、応答近似式を利用して検討ランク幅の設定、次に、連続的近似最適化問題の結果を利用して検討ランク幅を改良し、目的関数の下限値も設定して集合Pを決定する。

集合Pが決定されると、それらに対して部分抽出法を用いて最適解を求めるとことになる。

前回のイテレーションの結果を上回る解が得られなければ収束とみなし、計算を終了する。

4. 計算例

本論文の方法を応用した計算例をいくつか説明する。

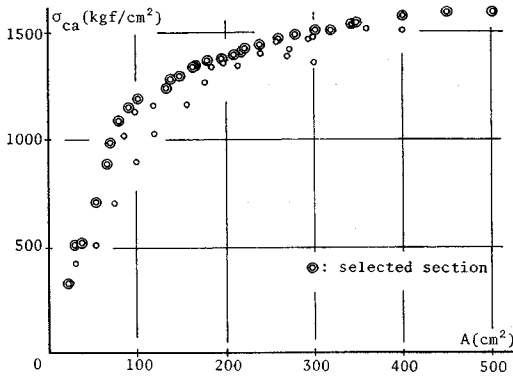


図-5 一般構造用炭素鋼管の許容応力度

表-1 使用鋼管断面のランクと断面積

rank	area (cm ²)	rank	area (cm ²)
1	22.72	16	195.40
2	29.94	17	209.40
3	38.36	18	217.90
4	54.08	19	221.70
5	67.55	20	238.20
6	70.21	21	259.40
7	80.42	22	278.70
8	90.64	23	301.70
9	100.90	24	319.20
10	133.60	25	343.80
11	138.80	26	349.40
12	148.80	27	400.50
13	163.90	28	451.60
14	167.10	29	502.70
15	179.10		

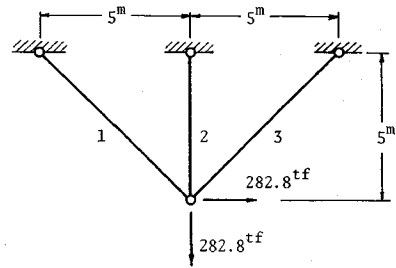


図-6 3部材2変数トラス

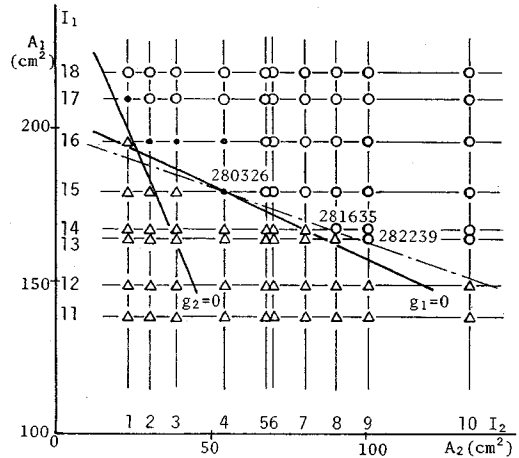


図-7 3部材2変数トラスの設計空間

まず最初に、これらの計算例で使用する既製鋼管について説明し、次に3部材2変数トラス、5部材5変数トラス、および22部材12変数トラスの最小重量設計について説明する。式(1)の c_i は、すべて1としているので最小重量設計になる。

鋼材はすべてSTK 50であり、その許容応力度は、道路橋示方書¹⁸⁾に従った。

(1) 一般構造用炭素鋼管

以下の計算例では、JIS G 3444の一般構造用炭素鋼管を用いるが、そのすべてではなく、下記のようにして使用断面を選んだ。

JIS G 3444には、71種類の鋼管断面が定められている。これらのうち、断面積が20 cm²より大きい52種類について、許容軸方向圧縮応力度と断面積の関係を示したのが図-5である。部材長は10 mの場合である。

以下の数値計算例では、これら全部を考慮することも可能であるが、ここでは、同程度の断面積であれば許容応力度の値の大きい方をとり、図-5の◎で示した29断面を使用断面とした。

それらの29種類の断面のランクと断面積の関係を示したのが表-1である。

(2) 3部材2変数トラス

最初の計算例は、図-6に示す3部材2変数トラスの

問題である。設計変数は、部材1, 3のランク I_1 と部材2のランク I_2 である。応力の制約条件のみで、変位の制約条件は考慮していない。

2変数問題であるので、設計空間を図に表すことができ、それを図-7に示した。図中、△は設計条件を満足しない設計、○は制約条件を満足する設計、および●は全応力設計である。

ここで全応力設計とは、各設計変数ごとに作用軸力より大きい許容軸力を有するランクのうち、最小のランクの組合せになっている設計であり、その組合せを用いて再解析しても同じ組合せとなる設計と定義される。

設計変数が連続量の場合は、一般に全応力設計は1つと考えられているが、図-7に示すように、この問題では全応力設計が5つ存在する。これらは、上記の全応力設計の定義を個々に検討して確認されたものであるが、離散的最適設計問題の特徴と考えられる。

図には、 $\{I_1 I_2\}$ が {15 4}、{14 8} および {13 9} の3点について目的関数の値を示してあるが、図のように{15 4}が最適設計になる。図の1点鎖線は、最適設計を通る目的関数の直線である。

この問題に本論文の方法を応用し、その結果を示したのが表-2である。上から、設計変数、各設計変数にリンクされている部材、初期設計、各イテレーションごと

表-2 3部材2変数トラスの結果

design variable	1	2	objective (cm ²)
members	1, 3	2	
initial design	1 7	1	307496
iteration	1	1 6	2 291307
	2	1 5	4 280326
	3	1 5	4 280326

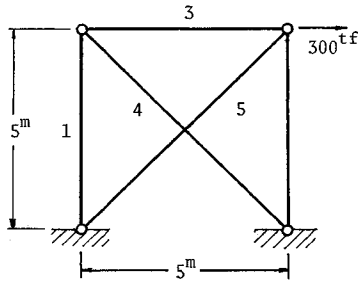


図-8 5部材5変数トラス

の結果を示してある。初期設計は{17 1}であるが、2回の繰返し計算で最適設計{15 4}に収束している。最適設計は、初期設計に比べて9%目的関数が減少している。

図-7において、太線で示した2本の直線は、それぞれ部材1の軸力 ($g_1=0$)、部材2の軸力 ($g_2=0$)に関する制約条件式を、最適設計{15 4}に関して線形近似した直線である。直線で近似された設計空間を、目的関数の勾配との関係でみてわかるように、何らかのムーブリミットを設定しなければ、この状態での最適解は、{14 7}あるいはもっと右方の設計になる可能性がある。離散的最適設計問題を線形近似して解く方法では、このようなことを想定してムーブリミットの設定およびアルゴリズムに工夫が必要と考えられるが、本論文の方法では、イテレーションの過程で、解がいったん最適解に到達すれば、数値計算上の工夫は必要ない。

(3) 5部材5変数トラス

図-8に示す5部材5変数トラスの問題である。制約条件は応力のみで、変位は考慮していない。

この問題においては、離散的最適設計の結果とともに、3. (2) 応答近似式による検討ランク幅の設定、および、3. (3) 連続的近似最適化問題の利用により、検討ランク幅 (move limit) がどのように縮小し、組合せの数がどの程度減少するかについても説明する。

表-3は、上記の手続きにより、検討ランク幅がどのように縮小したかを示す表である。左より、設計変数、初期設計であり、最右欄は、本論文の手法により得られた最適設計である。move limit (1)は、初期設計の前後に機械的に7ランクの幅を設定した場合である。式(13)において、 $MV=7$ とした場合である。組合せの

表-3 検討ランク幅の縮小

design variable	initial design	move limit (1)	move limit (2)	move limit (3)	optimum design
1	5	1-12	1-7	1-5	1
2	10	3-17	9-14	10-13	13
3	5	1-12	1-7	1-5	1
4	10	3-17	3-12	3-10	4
5	12	5-19	10-17	12-17	16
number of combinations		486,000	23,520	4,800	—

表-4 5部材5変数トラスの結果

design variable	1	2	3	4	5	objective (cm ²)	
members	1	2	3	4	5		
initial design	5	10	5	10	12	334037	
iteration	1	1	13	1	5	16	290604
	2	1	13	1	4	16	281079
	3	1	13	1	4	16	281079

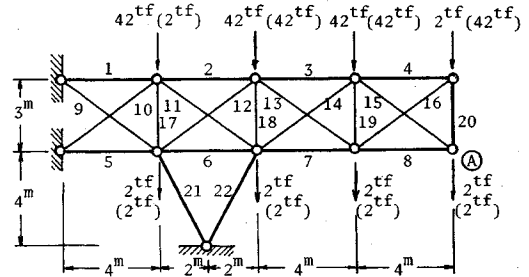


図-9 22部材12変数トラス

総数は、486 000になる。次に、応答近似式により検討ランク幅の縮小を試みた結果が move limit (2)である。組合せの総数は、23 520と1/20になる。さらに、連続的近似最適化問題を利用して縮小した結果が move limit (3)である。式(23)の $a=20 \text{ cm}^2$ 、 $b=40 \text{ cm}^2$ である。この段階の組合せの総数は4 800となり move limit (2)の1/5、move limit (1)の1/100になっている。

この問題の結果を示したのが表-4である。MVは5である。この問題では、初期設計と最適設計がともに全応力設計になり、後者の目的関数の値は前者より16%減少している。

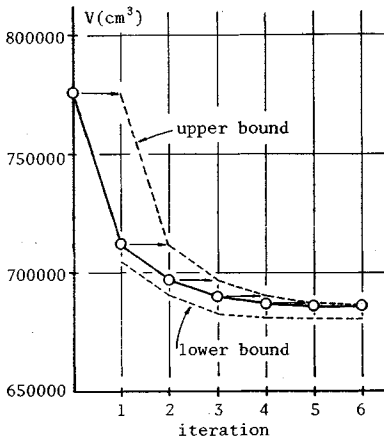
(4) 22部材12変数トラス

図-9に示す22部材12変数トラスの問題である。荷重は、図に示すように、()内の荷重とそうでない荷重の2ケース載荷している。制約条件は、応力のみの場合 (stress) と、節点Aの垂直変位を3cmに制約した場合 (stress+displacement) の2ケース検討した。

各ケースの結果を表-5に、収束状況を図-10に示した。図-10は、変位の制約条件がある場合の、目的関数の収束状況を示した図である。破線は、各イテレーショ

表—5 22部材12変数の結果

design variable	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	objective (cm ³)	
members	1 4	2 3	5 8	6 7	9	10, 12 13, 15	11 16	14	17, 19 20	18	21	22		
stress + displacement														
initial design	5	15	8	10	1	4	4	7	2	10	4	17	775380	
iteration	1	6	14	6	9	1	4	4	9	1	9	3	17	712305
	2	5	15	4	9	1	4	4	9	1	7	2	17	696964
	3	5	15	3	8	1	4	4	10	1	6	1	18	690039
	4	6	16	2	9	1	3	5	11	1	5	1	17	686710
	5	7	16	2	9	1	3	5	10	1	5	1	16	686017
	6	7	16	2	9	1	3	5	10	1	5	1	16	686017
stress														
initial design	4	8	1	5	1	1	4	7	1	4	1	10	445662	
iteration	1	4	8	2	4	1	1	3	7	1	4	1	10	424942
	2	4	8	2	4	1	1	3	7	1	4	1	10	424942



図—10 目的関数の収束状況

ンにおける目的関数の上下限值である。表—5は、変位の制約条件がある場合とない場合の、それぞれの結果を示している。

変位の制約条件がある場合は、6回のイテレーションで収束し、目的関数の値は、初期設計より12%減少している。部分抽出法における ξ_A , ξ_B , ξ_C の値は、それぞれ4%, 3%, 2%とした。収束に要した厳密な解析の回数は118回、近似構造解析の回数は33262回であった。

応力だけの制約条件の場合は、2回のイテレーションで収束し、目的関数の値は初期設計より5%減少した。この場合、初期設計は当然全応力設計であるが、最適設計は全応力設計ではなく、設計変数3において、軸力の条件を満足する最小のランクより1ランク大きい値を選択している。具体的には、部材5の作用軸力は14tf、部材8は21tfであるのに対し、これらの部材のランク2の許容軸力は41tf、ランク1の許容軸力は27tfであり、ランク1でも条件は満足している。

全応力設計が最適とならないのは、他のケースでも多くあり、前記した複数の全応力設計の存在とともに、離散的最適化問題の特徴と考えられる。

応力だけの制約条件の場合、部分抽出法における ξ_A , ξ_B , ξ_C の値は、それぞれ10%, 5%, 4%とした。収束に要した厳密な構造解析の回数は8回、近似構造解析の回数は1780回であった。

5. 結 論

トラス構造物の離散的最適化問題について研究し、近似の概念を応用し列挙法を基本とする効率的な最適化手法について説明した。また、JIS G 3444の一般構造用炭素鋼鋼管を用いるトラス構造物の最小重量設計に関する計算例を説明した。本論文より得られた事項を箇条書きにすると、以下ようになる。

(1) 本論文の方法は、列挙法に分類される方法であるが、応答近似式による検討ランク幅の設定、および連続的近似最適化問題の利用により、検討すべき組合せの数を減少させることができた。

(2) 一般の数値計画法における一次元探索法概念に基づく部分抽出法により、実行可能性の検討の回数を少なくすることができた。

(3) 実行可能性の検討を、近似構造解析と厳密な構造解析の2段階とすることにより、厳密な構造解析の回数を少なくすることができた。

これらの効果は、計算例の中で示されている。

(4) 2変数で表現できる、3部材2変数トラスの問題において、その最適解での連続的近似設計空間を示し、本論文の方法と直線近似して行う最適化手法とを比較して、両者の相違点を示した。

(5) トラス構造物の設計において、離散的な変数を扱う場合には複数の本論文で定義した全応力設計が存在し、それらの目的関数の値にはかなりの差があることを

計算例で示した。

これらのことは、本論文のような離散的最適化手法の必要性を表していると考えられる。

(6) トラス構造物の離散的最適設計において、応力だけの制約条件の場合、全応力設計が必ずしも最適設計にならない例があることを示した。

参考文献

- 1) 小西一郎編：鋼橋設計編Ⅰ，丸善，1975.
- 2) 松村駿一郎編著：新体系土木工学 37 構造用鋼材，技報堂出版，1981.
- 3) Toakley, A.R. : Optimum Design Using Available Sections, ASCE, J. Struct. Div., ST5, pp.1219~1241, 1968.
- 4) Cella, A. and Logcher, R.D. : Automated Optimum Design from Discrete Components, ASCE, J. Struct. Div., ST1, pp.175~189, 1971.
- 5) Reinschmidt, K.F. : Discrete Structural Optimization, ASCE, J. Struct. Div., ST1, pp.133~156, 1971.
- 6) Schmit, L.A. and Fleury, C. : Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis Using Dual Methods, AIAA J., Vol. 18, pp.1515~1524, 1980.
- 7) Grierson, D.E. and Lee, W.H. : Optimal Synthesis of Steel Frameworks Using Standard Sections, J. Struct. Mech., 12(3), pp.335~370, 1984.
- 8) Amir, H.M. and Hasegawa, T. : Nonlinear Discrete Structural Optimization, Struct. Eng./Earthq. Eng., Vol.5, No.1, pp.39~49, 1988.
- 9) Glankwamdee, A., Liebman, J.S. and Hogg, G.L. : Unconstrained Discrete Nonlinear Programming, Eng. Opt., Vol.4, pp.95~107, 1979.
- 10) John, K.V., Ramakrishnan, C.V. and Sharma, K.G. : Optimum Design of Trusses from Available Sections-Use of Sequential Linear Programming with Branch and Bound Algorithm, Eng. Opt., Vol.13, pp.119~145, 1988.
- 11) Olsen, G.R. and Vanderplaats, G.N. : Method for Nonlinear Optimization with Discrete Design Variables, AIAA J., Vol.27, No.11, pp.1584~1589, 1989.
- 12) 今野 浩：講座 数理計画法 6 整数計画法，産業図書，1981.
- 13) 山田善一編著：構造工学シリーズ 1 構造システムの最適化，土木学会，pp.101~106, 1988.
- 14) 菊田征勇・松井邦人・新延泰夫・大平忠之：離散変数と構造物の最適設計，国土館大学工学部紀要，第 20 号，pp. 63~70, 1989.
- 15) 杉本博之・山村和人：骨組構造物の最適設計における応力近似モデルについて，構造工学論文集 A, Vol.35A, pp. 347~359, 1989.
- 16) 杉本博之：トラス構造物の応力近似式に関する一考察，土木学会論文集，第 416 号 / I -13, pp. 373~376, 1990.
- 17) 杉本博之：制約条件の部分近似によるトラス構造物の最適設計に関する研究，構造工学論文集 A, Vol.36A, pp. 429~439, 1990.
- 18) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説Ⅱ鋼橋編，丸善，1990.

(1990. 8. 6 受付)

A STUDY ON DISCRETE OPTIMIZATION METHOD FOR TRUSS STRUCTURES BY APPROXIMATION CONCEPTS

Hiroyuki SUGIMOTO

A discrete optimization method for truss structures using approximation concepts is studied. Although the method is based on the enumeration method, by using the approximation concepts the number of the combinations to be analyzed is reduced to the reasonable order. To minimize the sets of the combinations to be analyzed, the move-limits are calculated considering the structural characteristics expressed by the approximation formulations. Approximated continuous optimization problems are formulated and solved in each iteration, and the results are used to determine the final sets for the iteration. Not to analyze the every combinations in the sets, the partial sampling method is proposed. Several numerical examples are shown with the special properties of the discrete optimization problems.