時系列論から見たわが国水文諸量の性格について*

准員　高　瀬　信　忠**

要　旨　水文統計学の発達にともない，確率降雨及び確率洪水の概念が一般に普及して，河川計画の合理化に大いに貢献しているが，実際上は確率論の根本をなす水文諸量の無作為性の吟味が十分行われていない。この論文は年最大日雨量及び年最大洪水流量の多くの資料について，最近発展してきた時系列論的な解析を行い，その統計学的な取扱いと性格を示したものである。

1. 緒　　言

大気現象には種々の周期性があることは周知のことであり，この性質を利用してかなりの長期予報が試みられている。降雨量や洪水流量などの水文諸量も，そのもととなるものが気象である以上，周期性が認められるはずであつて，古くから種々の研究が行われている。1890 年 Brückner がカスピ海の水位記録に 34～36 年の周期があることを指摘したのを最初とし[1]，わが国では揚子江水位について 11 年及び Brückner 周期などを検出した速水博士の研究[2]，利根川に関する上山氏の研究[3] などがあり，この周期性を利用して年最大洪水流量の予報の研究が行われている[4]。

近時水文統計学の発達につれて，確率降雨及び確率洪水の概念が一般に普及し，河川計画の合理化に大いに役立つようになつた。しかし確率論の本質上，無作為任意標本を対象としているから，上述のように規則変動をする水文資料には直接適用できないはずである。それにもかかわらず，現段階では水文資料の無作為性を仮定して上述の不合理性を無意識の中に許容し，それについて十分な吟味がなされていない。それで本論文では年最大日雨量及び年最大洪水流量の多数の資料を時系列論の立場から解析し，その水文統計学的な取扱いの合理化と性格の究明につとめたが，従来からよく用いられている対数正規分布の適用性その他について多くの事実を明らかにすることができた。

2. 時系列論とその適用

時系列の理論は主として，その系列が定常であつて正規分布とみなされる場合について導かれている。従つて時系列論を適用するには，まず原系列の定常性を吟味しなければならないが，このためには原系列をいくつかの群に分けて，これらの各群の間で平均値及び分散に有意な差があるかどうかを確かめる。この場合，普通は平均値には t 分布，分散には F 分布を用いて検定し，有意な差がなければ定常とみなされる。なお，原系列を群に分ける場合の基準は明確ではないが，実用上は 3～5 群程度に分けるのが適当であり，一群の年数として少なくとも 10 年ぐらいが必要であろうと考えられる。もし平均値及び分散にそれぞれ長期傾向 $m(t)$ 及び $\sigma(t)$ がある場合には，

$$x(t)^*=\{x(t)-m(t)\}/\sigma(t) \quad \cdots\cdots(1)$$

によつて，原系列 $x(t)$ を定常化した系列 $x(t)^*$ が得られる。われわれの対象とする水文諸量の系列では，一般に観測値の数が多くないので，大標本の場合と異なつて，系列相関係数の検討は事実上困難であり，上述のごとく平均値と分散のみで定常性の吟味をするのが普通である。つぎに原系列の正規性については，χ^2 検定を行えばよい。

以上のようにして原系列の定常性と正規性とが確認されると時系列論の適用が可能となり，コレログラム解析によつて，一見不規則に見える原系列 $x(t)^*$ を規則的で複合調和波的な周期変動 $x_0(t)$ とそれからの偏倚 $x_0'(t)$ とに分解して取り扱うことが許される。すなわち，

$$x(t)^*=x_0(t)+x_0'(t) \quad \cdots\cdots(2)$$

ここに，$x_0(t)$ は規則的変動で定常確率過程の分解によつて推定され，$x_0'(t)$ は実現値 $x(t)^*$ からの偏倚として容易に求められるから，この $x_0'(t)$ が純偶発性，すなわち無作為性であるかどうかを調べればよい。

時系列解析の基礎となる特性量は，系列平均値，系列分散及び系列相関係数の三つであるが，とくに系列相関係数 r_k のグラフをコレログラムと称し，これによつて母集団たる確率過程の型を想定することができる。その基本型は A，B_{11}，B_{12}，B_2 及び B_3 であるが，実際上は混合型として $A+B_1$，$B_{11}+B_{12}$ などが見られ，これら

---

* 本論文は第 7 回日本工学会土木部会（昭 31.5.26）で発表したものに加筆しとりまとめたものである。

** 京大助手，工学部土木工学教室。

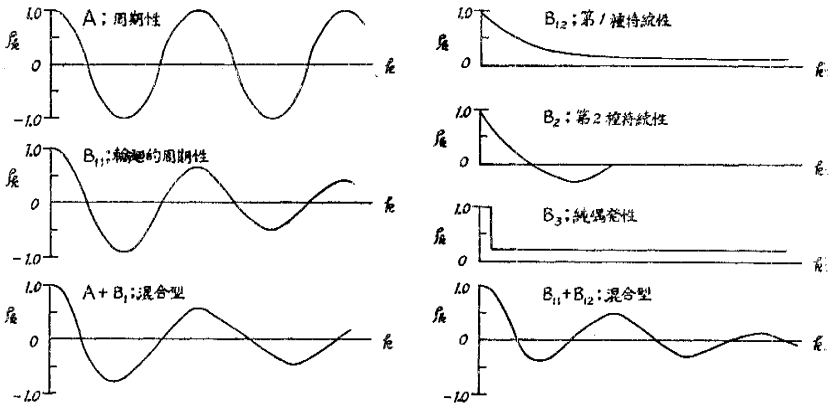
をとりまとめて参考のために図示したのが 図—1 である[5]。

3. 実際資料の解析とその考察

わが国における多数の年最大日雨量及び年最大洪水流量の観測系列を以上の所論に従つて時系列論的に解析し，その統計学的な取扱いの合理化と性格の究明につとめたが，これらを具体的に例示するとつぎのとおりである。

図—1　コレログラムの基本型及び混合型

Fig. 1　Fundamental types of correlogram and their combined types.



(1) 年最大日雨量

(図—2)

(a)　九頭龍川流域平均（福井県，明44～昭29, $N=44$）。標本数 44 の原系列を 11 ケ年ごとの4群にわけて定常性を吟味し，長期傾向

$$m(t)=0.0486\,t^2-2.85\,t+141.8,\quad \sigma(t)=2.8\sin 2\pi(t/22-0.5)+31.9$$

を検出して，(1) 式を用いて定常性を仮定できるようにしたが，上式における t の原点は明 44 に選んだ。こうして得られた $x(t)^*$ について χ^2 検定を行い，$\alpha=5\,\%$ で正規分布とみなしうることがわかつたので，以下のごとく時系列論による解析を進めたわけである。

1.　コレログラム：$x(t)^*$ のコレログラムは $\mathbf{a}_1$図 のように輪廻的周期性を示し，特に4年周期の存在の著しいことが認められる[6]。

2.　定差方程式：周期性1及び持続性1を考慮し，項数 $h=2\times1+1=3$ として系列相関係数 r_k に関する特性連立方程式を解いて定差方程式を作り，これによつてコレログラムを求めると，$\mathbf{a}_2$図 のようにいずれも 90 % 信頼限界に入るので，$h=3$ と仮定したことが妥当であつたわけである。無自己相関な系列 $Y(t)^*$ の標本値 $y(t)^*$ を求めると，つぎのようになる。

$$y(t)^*=x(t)^*+0.013\,x(t-1)^*+0.747\,x(t-2)^*+0.087\,x(t-3)^* \cdots\cdots (3)$$

3.　純偶発性の仮定：実現値と標本値との差として，

$$x(t)^*-y(t)^*=-\{0.013\,x(t-1)^*+0.747\,x(t-2)^*+0.087\,x(t-3)^*\} \cdots\cdots (4)$$

を求めると，原系列から第1種持続性と輪廻的周期性とを除去した偏差が得られる。この偏差のコレログラムを求めると，$\mathbf{a}_3$ 図 のようになつて純偶発性の仮定をして差支えないことがわかつた。

4.　確率計算：純偶発性の仮定が許された偏差について確率計算を行い，あとで規則変動による値を加えて所要の確率計算値とすることができるが，その結果は 100 年確率値 $x(t)_{100}=212.3$ mm，50 年確率値 $x(t)_{50}=192.5$ mm であつた。

5.　予報公式：定差方程式から予報公式を作つて外挿予報値を求めると $\mathbf{a}_4$ 図 のようになる。

つぎに原系列を対数正規分布に変換（以下，対数変換と記す）して定常性を検定すると，平均値及び分散には $\alpha=5\%$ においてともに有意性がなかつた。そのコレログラムは $\mathbf{a}_5$ 図 のようになつて，$\alpha=5\,\%$ において純偶発性を仮定することができた。従つてそのまま確率計算を行つてよいわけであり，計算結果は $x(t)_{100}=235.9$ mm，$x(t)_{50}=207.4$ mm となつた。

(b)　高野山（和歌山県，大 10～昭 28，$N=33$）．原系列[7] のコレログラムは $\mathbf{b}_1$ 図 のようになつて，r_1 のみが有意となり，第2種持続性を示している。r_2 以下は有意性がないから，特性方程式から母集団過程 $X(t)$ を求めると，

$$X(t)=Y(t)-0.465\,Y(t-1) \cdots\cdots (5)$$

となり，$Y(t)$ の標本値 $y(t)$ はつぎのようになる。

$$y(t)=x(t)+0.465\,x(t-1)+0.216\,x(t-2)+0.100\,x(t-3)+0.047\,x(t-4)+0.022\,x(t-5)+\cdots (6)$$

以上のようにして規則変動を除去した偏差 $\{x(t)-y(t)\}$ のコレログラムは $\mathbf{b}_2$ 図 のようになるが，かえつて

有意性が著しくなつている。これは(6)式にて第7項以下を省略したことも一原因であろうが，このように解析効果が小さい場合には，規則変動の除去がなかなかむずかしく，そのまま確率計算を許すことが妥当であるように思われる。$\mathbf{b}_3$ 図は対数変換した系列のコレログラムである。

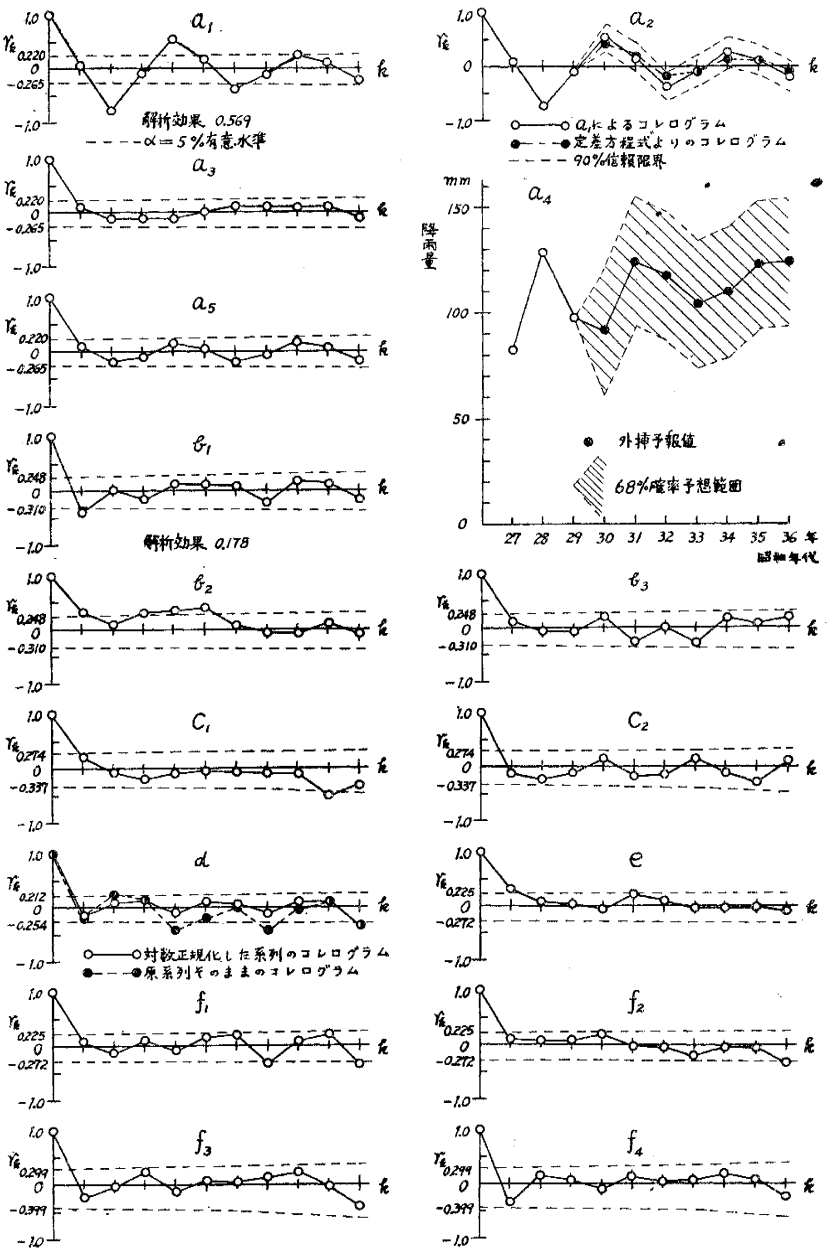
(c) **羽犬塚**（福岡県，大 15～昭 28，$N=28$）大 15 を t の原点として長期傾向

$$m(t)=1.83\,t+122.7,\quad \sigma(t)=1.89\,t+38.4$$

を検出し，これらを原系列から取り除いた系列のコレログラムを求めると $\mathbf{c}_1$ 図のようになり，r_9 のみが有意であることがわかる。しかしこのような場合の規則変動の除去は困難であつて，結局はもとのまま確率計算を許した方がよいように思われる。その結果は $x(t)_{50}=334.8$ mm となつたが，対数変換をした系列については $\mathbf{c}_2$ 図が得られて純偶発性が仮定でき，そのまま確率計算をして $x(t)_{50}=336.4$ mm が得られた。

図—2　年最大日雨量の解析結果関係図

Fig. 2　Graphs resulting from the time series analysis of annual maximum daily precipitation.



(d) **大台が原**（奈良県，明 34～昭 23，$N=48$）．**d** 図は原系列そのままのコレログラムと対数変換系列のそれとを比較したものであるが，後者は純偶発性として取り扱い得ることが確かめられ，対数正規分布の有効性を実証したよい実例である。

(e) **石徹白**（福井県，明 44～昭 28，昭 16 欠測，$N=42$）．原系列を対数変換した系列のコレログラムが **e** 図のようになるから，r_1 のみを有意とすると，第1種持続性を示している。従つて特性方程式から解析して，母集団過程 $X(t)$ を求めると，

$$X(t)=Y(t)+0.027\,Y(t-1) \quad\cdots\cdots(7)$$

となる。しかしこの場合の解析効果は 0.0008 であつて，持続性が僅か 0.08％ しか含まれていないから，上述

のようにして持続性を除去してもその効果はほとんどなく，原系列のままで確率計算をした方が適当であろう。

以上，持続性の変動を含んだ実例として高野山及び石徹白の年最大日雨量をとりあげ，いずれも r_2 以下が有意でない場合だけを解析したが，一般に r_{n+1} 以下が有意でないと仮定できるときには，特性方程式が $2n$ 次となつて解析が複雑化してくる。

(f) その他の解析　$\mathbf{f}_1$ 図は大河内（福井県，明 44～昭 28，昭 16 欠測，$N=42$），$\mathbf{f}_2$ 図は太美山（富山県，明 45～昭 28，$N=42$），$\mathbf{f}_3$ 図は宇和（愛媛県，昭 10～昭 29，$N=20$），$\mathbf{f}_4$ 図は小田町（愛媛県，昭 10～昭 29，$N=20$）について，いずれも対数変換系列のコレログラムを示したものであるが，ともに $\alpha=5\%$ で有意でないことが認められる。

(2) 年最大洪水流量（図—3）

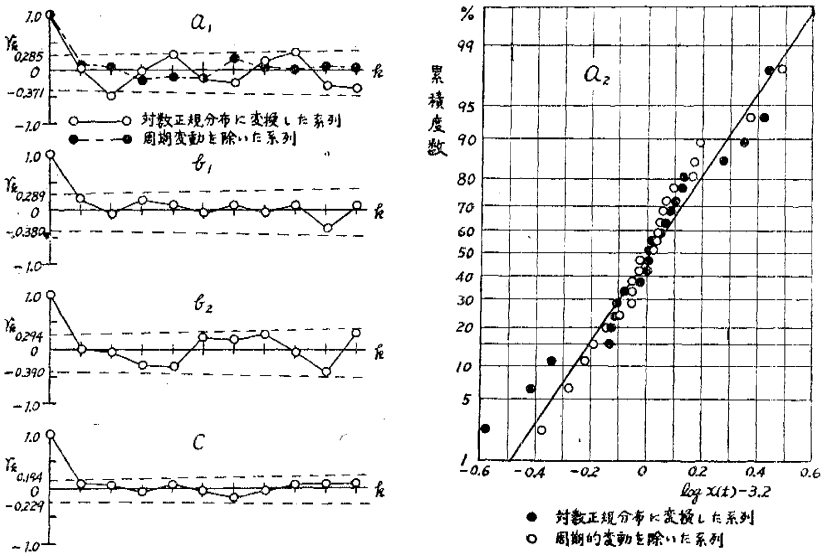
(a) 肱川（愛媛県，昭 7～昭 29，$N=23$）．$\mathbf{a}_1$ 図の実線は対数変換系列のコレログラムであつて，4年周期が卓越していることが認められ，正規回帰論によつて検定すると $\alpha=1\%$[8] で有意になるから，この調和波の変動 $y(t)$ を求めると，

$$y(t)=-0.192\cos\frac{\pi}{2}t-0.052\sin\frac{\pi}{2}t \cdots\cdots (8)$$

となる。この規則変動を取り除いた系列に対して再びコレログラムを求めると，$\mathbf{a}_1$ 図の鎖線のようになつて，明らかに純偶発性を仮定することができる。これらの両者の系列を確率紙上に Hazen の Plotting position で図示したのが $\mathbf{a}_2$ 図であるが，ともに理論直線とほとんど一致している。この事実は対数変換系列で 4 年周期が顕著であるが，r_k の振幅が小さく $\alpha=5\%$ で有意性が小さいことから，そのまま確率計算をしても大差ないことを示すものであり，また r_k の有意水準限界を $\alpha=5\%$ にとつたことの妥当性を実証したものとも考えられる。

図—3　年最大洪水流量の解析結果関係図

Fig. 3　Graphs resulting from the time series analysis of annual maximum flood discharge.



(b) 木津川（京都府，明 34～昭 18，$N=43$）．対数変換した系列を 11 ケ年 3 個，10 ケ年 1 個の 4 群（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ）にわけ，$\alpha=5\%$ として定常性を吟味したところ，分散には有意性がなかつたが，平均値ではⅡとⅢ及びⅡとⅣだけが有意であることがわかつた。とくにⅡの平均値が小さく，これをどのように取り扱うかが問題となつた。そこでⅠとⅡとを含めて a 群，ⅢとⅣとを含めて b 群とし，両者について検定したところ，分散には有意性がなかつたが，平均値はやはり有意となつたので，この a，b の 2 群にわけて別々に解析することにした。$\mathbf{b}_1$ 図は a 群（明 34～大 11，$N=22$），$\mathbf{b}_2$ 図は b 群（大 12～昭 18，$N=21$）のコレログラムであつて，ともに純偶発性として取り扱つてよいことがわかる。従つてそのまま確率計算をして 表—1 を得たが，同じ 50 年確率洪水流量で a 群と b 群との間に約 2 倍の相違があることがわかる。もし統計資料が明 34～大 11 のもののみであれば a，大 12～昭 18 のもののみであれば b の解析でよいはずであるが，実際は与えられた資料全部から判断して合理的に決定しなければならない。これについては目

表—1　50 年確率洪水流量（m³/sec）

Table 1　50 years probable flood discharge (m³/sec)

a 群	5,780
b 群	2,770
a,b 両群の平均	4,280
従来の方法	4,600

（Hazen の Plotting position を用い，順序統計学で計算した。）

下研究中であるが，仮りに a，b 両者の平均値を求めるとともに，従来のように全資料を一括した計算を行つて，これらを 表—1 に掲げておいた。

木津川の場合は全資料の定常性を仮定しがたい一例であるが，水文資料の統計年数が多くないので厳密な吟味をすることが困難であつた。しかし長期傾向は認められず，有意性が大きかつたので，やむをえず 2 群にわけて，それぞれの群における定常性の仮定が許されるようにし，別々に解析したわけである。

(c) 淀川（大阪府，明 30～昭 29，$N=58$）．淀川については，平均値からの偏差のコレログラムを解析して有用な結果を得た石原教授らの研究[4] があるが，ここでは対数変換した系列のコレログラムを求め，c 図 のように純偶発性として取り扱いうることを確かめた。

4. 結　　言

以上に述べた年最大日雨量及び年最大洪水流量についての時系列論的解析の多数の具体例によつて明らかにしたところを要約するとつぎのとおりである。

1. 原系列を 3～5 の部分系列にわけて，平均値には t 分布，分散には F 分布を用いて定常性を検定し，これらの間に有意な差があるときは長期傾向を除去して，定常性の仮定ができるようにする。部分系列の分け方は，必ずしも等間隔でなくてもよい。ついで χ^2 検定を行つて，原系列の正規性を確かめる。

2. 原系列を最初に対数変換すれば，それは正規化したことを意味し，前項によつて定常性を仮定できるようにすればよい。

3. 前 2 項のいずれかによつて定常で正規化された系列が得られると，そのコレログラムを求め，有意性が認められると，その母集団たる確率過程の型を想定して規則変動を除去し，純偶発性としての取扱いが許されるようにする。ついでこの純偶発性の仮定が許された部分に対して確率計算を行い，その結果に規則変動を加えて確率計算値とする。

従来の方法は単に対数変換し正規化するだけであつたが，時系列論的には上述のような慎重な吟味が必要である。しかし原系列を対数変換した上記の多数の具体例から考えると，正規性はもちろん，定常性の仮定が許され，さらに純偶発性，すなわち無作為性を仮定して取り扱い得ることが多い事実が認められ，種々のコレログラムの型をとりあげて，一般に系列相関係数の偏りが小さいことが確かめられた。この事実は，従来経験的に用いられてきた対数正規分布が確率論的に極めて優秀な分布函数であつて，都合よく確率降雨や確率洪水流量の推定に適用できることを示すものである。

なお，本研究に終始御指導を賜つた京大石原，岩井両教授及び大阪府大角屋講師並びに御援助をいただいた西原巧君に深謝の意を表する次第である。

参考文献その他

(1) 福井英一郎：気候学，昭 14，p.392.

(2) S. Hayami : Variations in Stage of the Yangtze River at Hankow and Some Climatic Changes in Central China Inferred from them, I and II, Journ. of Shanghai Sci. Inst., 1938 and 1940.

(3) 上山惟康：洪水の週期変動について，土木学会誌，37 巻 11 号，pp. 1～6.

(4) 石原藤次郎，上山惟康：年最大洪水流量の長期予報について，土木学会誌，37 巻 11 号，pp.7～12.

(5) 小河原正巳：時系列論とその応用，応用統計学，昭 24，克誠堂，pp.7.01～7.41.

(6) a_1 図 には 5 %有意水準を示してあるが，これは $k=0$ の点では数表[5] より $N=44$ として $+0.220$，-0.265 となり，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$ の点では $(N-k)$ の値に応じて図のように逐次変化している，（以下同様）。

(7) 原系列には長期傾向がなく，また定常性（有意水準 5 %）及び正規性（原系列解析の一例を得る意味で，特に有意水準を緩和して 1 %とした）の仮定が許されたので，そのまま解析を進めた。

(8) 周期性の有意なことを確かめるため，検定の標準を強めて有意水準を 1 %とした。

（昭.31.6.29）