

任意に配置された数個の等径円孔を有する薄板の引張り

正員岡林 稔*

要旨 任意に配置された数個の等径円孔を有する帯状薄板が引張りを受ける場合の近似解を求め、 円孔周縁における応力集中を簡単に計算し得る公式を導いたものである。

1. 緒 言

図-1 の如く引張りを受ける薄板に円孔がある場合、円孔の周縁には応力集中が起り、弾性理論によれば、その最大は A に起り、その大きさは総断面上の平均応力度を w とすれば、約 $3w$ である。従つて w がその材料の降伏点応力以下であつても、 A 及び C の附近は降伏して塑性状態になる。しかし、弾性解によれば A 及び C における円周方向垂直応力度は約 $3w$ になるが、それを少し離れると応力度は急激に減少するから、 A 及び C 附近の塑性領域の範囲（応力の平均化が行われる範囲）は余り大きくはなく、非常に拘束された塑性状態にあるであろう。もし、この材料に完全塑性体の理論が適用できるとすれば、ここで外力を取り去った後の状態は、総断面上

の平均応力度が $-w$ である場合の弾性解を上記弾塑性状態に加算すればよい。従つて外力を取り去つた後には、 A 及び C の附近には圧縮応力が残留し、その他の AB 上及び CD 上の部分の残留応力は僅かの張応力である。この状態に再び繰返して外力（総断面上の平均応力度 $=w$ ）を加えれば、 A 及び C においては、降伏限界が高まつたと同じ結果を来たし、弾性体としての取り扱いができる事となる。この材料の降伏点応力を σ_Y 、 A における弾性解による応力度を αw ($\alpha=3$) とすれば

$$w < \frac{2\sigma_Y}{\alpha}$$

であれば、繰返し応力を受ける期間中、薄板は弾性の法則に支配される。繰返しが両振れの場合は、この値がもつと低下するし、更に実際の材料は真の完全塑性体ではないから、この値を多少割引きしなければならないであろうが、とにかく、円孔の色々な配置に対して α の値を求めておく事は有孔引張材の強度を判断する資料になると思われる。

2. 幾つかの等径円孔を有する引張材の弾性解

図-2 の如き直線境界 (x 軸に平行) と円孔とを有する帯状板を考える。円孔はいずれも等径で、縦横の寸法はすべて円孔の半径との比をもつて測る。

今直線境界を一つの鏡と考え、それに対する各円孔の鏡像を虚円孔と名づけ、これに対して実在する円孔を実円孔と名づける。

イ) 円孔がない場合

応力関数 ϕ_A は

である。

口) 実円孔があつて直線境界のない場合

この場合はそれぞれの円孔の中心を原点とする極座標 (r, θ) を用いれば次式で示される ϕ_B を (A) 式に加算すればよい。

$$\phi_B = -\frac{w}{2} \left(\log r + \frac{\cos 2\theta}{2r^2} - \cos 2\theta \right)$$

あるいは

* 名古屋工業大学短期大学部教授

$$\phi_B = \Re \left[-\frac{w}{2} \left(\log z + \frac{1}{2z^2} \right) - w \frac{i}{z} r \sin \theta \right] \dots \dots \dots \quad (B)$$

(但し $z = re^{i\theta}$ の \Re は実数部を示す)

(B) 式には、この円孔に近い他の実円孔のある場合にはその影響による修正式(後出)を加えねばならない。

八) 虚円孔がある場合

この場合はその虚円孔の中心を原点とする極座標 (ρ_1, φ_1) を用いれば次式で示される ϕ_c を更に加算すればよい。

$$\begin{aligned}\phi_c = & w \left\{ \frac{1}{2} \log \rho_1 - \frac{3h \sin \varphi_1}{\rho_1} + \frac{(1+8h^2) \cos 2\varphi_1}{4\rho_1^2} \right. \\ & + \frac{h \sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} - \left(\frac{2 \sin \varphi_1}{\rho_1} - \frac{2h \cos 2\varphi_1}{\rho_1^2} - \right. \\ & \left. \left. \frac{\sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} \right) \rho_1 \sin \varphi_1 \right\}\end{aligned}$$

あるいは

$$\phi_c = -\Re \left[w \left\{ \frac{1}{2} \log \zeta_1 - \frac{3ih}{\zeta_1} + \frac{1+8h^2}{4\zeta_1^2} + \frac{ih}{\zeta_1^3} - \left(\frac{2i}{\zeta_1} - \frac{2h}{\zeta_1^2} - \frac{i}{\zeta_1^3} \right) \rho_1 \sin \varphi_1 \right\} \right] \dots \dots \dots \text{(C)}$$

(但し $\zeta_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ \Re は実数部をとる事を示す。)

h は該該円孔から、これを考慮するために鏡の役目をした直線境界までの距離であつて、直線境界が対応する実円孔より上 ($y > 0$) にあるときを正とし、下にあるときを負とする)

ニ) 他の実円孔が (B) 式に及ぼす影響

今図-3において、円孔 O_1 について考える事とし、これに影響を及ぼすべき他の実円孔を O_2 とする。その位置は図示の如きもの（ ϕ 及び g の符号は O_1 から O_2 の方へ測るとき、それ等がそれぞれ x の正の方向及び y の正の方向と一致するとき正とする）とする。しかるときは次式で表わされる ϕ_D を (B) 式に加算すればよい。

$$\begin{aligned}\phi_D &= \frac{w}{2} (2 \log r - r^2) + \Re \left[\frac{1}{s^2} \right] + \frac{w}{2} \cdot \Re \left[\log (W-s) \right] \\ &+ \frac{s\bar{s}-1}{s(W-s)} + \frac{1}{2(W-s)^2} + \frac{w}{2} (r^2-1) \cdot \Re \left[\frac{s-\bar{s}}{W-s} - \frac{s\bar{s}}{(W-s)^2} - \frac{s}{(W-s)^3} \right] \quad \dots \dots \dots \text{(D)}\end{aligned}$$

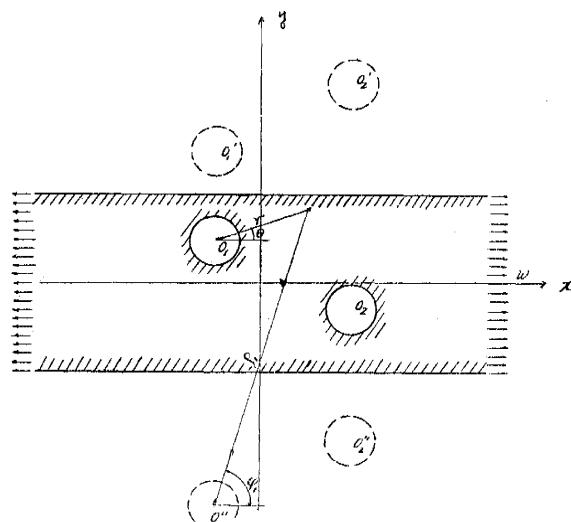
$$(但し \quad s = p + ig, \quad \bar{s} = p - ig, \quad W = e^{i\theta}/r)$$

ホ) 虚円孔が (B) 式に及ぼす影響

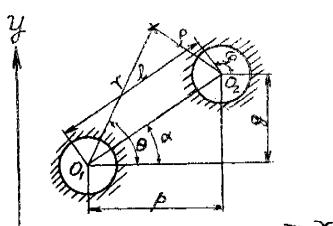
今図-4において、円孔 O_1 について考える事とし、これに影響を及ぼすべき虚円孔を O' とする。その位置は図示の如きもの（ a_1 及び g_1 の符号については前の場合と同様）とする。しかるときは次式で表わされる ϕ_E (B)式に加算すればよい。

$$\begin{aligned}\phi_E = & \frac{w}{2} \cdot (2 \log r - r^2) + \Re \left[\frac{2}{s_1^2} - \frac{4i\hbar}{s_1^3} - \frac{3}{s_1^4} \right] - \frac{w}{2} \cdot \Re \\ & \left[\log(W-s_1) - \frac{2s_1^2(s_1\bar{s}_1-1)+2ihs_1(4s_1^2+1)-1}{s_1^3(W-s_1)} \right. \\ & + \frac{(3+8\hbar^2)s_1^2-4ih s_1(s_1\bar{s}_1-1)+2}{2s_1^2(W-s_1)^2} \left. + \frac{s_1\bar{s}_1+2ihs_1-1}{s_1(W-s_1)^3} \right] \\ & - \frac{w}{2}(r^2-1) \cdot \Re \left[1 + \frac{s_1+2\bar{s}_1+8i\hbar}{W-s_1} \right] +\end{aligned}$$

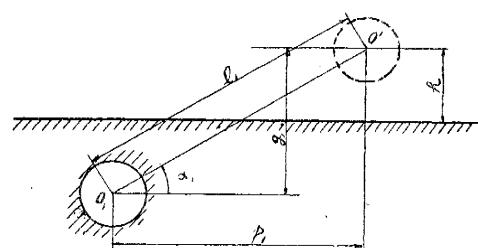
—2



— 3 —



三



$$\frac{2s_1\tilde{s}_1-8h^2-5+4ih(2s_1+\tilde{s}_1)}{(W-s_1)^2} - \frac{8h^2s_1+3s_1+3\tilde{s}_1-2ih(2s_1\tilde{s}_1-5)}{(W-s_1)^3} - \frac{3(s_1\tilde{s}_1+2ihs_1-1)}{(W-s_1)^4} \quad \dots \dots \dots \text{(E)}$$

(但し $s_1=p_1+ig_1$, $\tilde{s}_1=p_1-ig_1$, $W=e^{i\theta}/r$)

へ) (C) 式の誘導

(A) 式は自明であり, (B) 式も周知の式であるので省略し, (C) 式の誘導を説明する。

図-5 の如きの場合, (A) 式と (B) 式との和を考えると

$$\phi = \phi_A + \phi_B = \frac{w}{2}y^2 - \frac{w}{2}\left(\log r + \frac{\cos 2\theta}{2r^2} + 2\sin^2\theta\right)$$

.....(1)

となるが, この結果直線境界 AB 上における ϕ 及び $\partial\phi/\partial y$ の値は次の如くなる。

$$(\phi)_{y=h} = \frac{w}{2} \left\{ h^2 - \log \sqrt{x^2+h^2} - \frac{2h^2}{x^2+h^2} - \frac{x^2-h^2}{2(x^2+h^2)^2} \right\} \quad \dots \dots \dots \text{(2)}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=h} &= \frac{w}{2} \left\{ 2h - \frac{h}{x^2+h^2} - \frac{4hx^2}{(x^2+h^2)^2} + \frac{3hx^2-h^3}{(x^2+h^2)^3} \right\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \text{(3)}$$

この ϕ 及び $\partial\phi/\partial y$ の境界値が零にならないと言う事は, 外力の分布が無い筈の直線境界上に外力の分布がある事を示している。よつて, これを打消し, かつ $h>y$ の領域内で成立するような応力関数を加える必要がある。その境界値は (2) 及び (3) 式の符号を代えたものであるが, (2) 式の中で x に関する1次の項及び常数項, 並びに (3) 式の中で常数項は応力に関係しないから省略する。今求める応力関数を ϕ_c とし

$$\phi_c = U_c + (h-y)V_c \quad \dots \dots \dots \text{(4)}$$

(但し U_c 及び V_c は調和関数)

とおけば

$$\phi_c|_{y=h} = (U_c)|_{y=h} \quad \left(\frac{\partial\phi_c}{\partial y}\right)_{y=h} = \left(\frac{\partial U_c}{\partial y}\right)_{y=h} - (V_c)|_{y=h}$$

を得る。この第1式から U_c の境界値, 従つて U_c が定まる。すなわち

$$U_c = \frac{w}{2} \left[\log \sqrt{x^2+(y-2h)^2} - \frac{2h(y-2h)}{x^2+(y-2h)^2} + \frac{x^2-(y-2h)^2}{2[x^2+(y-2h)^2]^2} \right] \quad \dots \dots \dots \text{(5)}$$

(5) 式より $\partial U_c/\partial y$ が得られるから, V_c の境界値, 従つて V_c が定まる。すなわち

$$V_c = w \left[\frac{2(y-2h)}{x^2+(y-2h)^2} - 2h \frac{x^2-(y-2h)^2}{[x^2+(y-2h)^2]^2} - \frac{3x^2(y-2h)-(y-2h)^3}{[x^2+(y-2h)^2]^3} \right] \quad \dots \dots \dots \text{(6)}$$

(5) 及び (6) 式を (4) 式に代入し, 虚円孔 O'_1 の中心を原点とする極座標 (ρ_1, φ_1) を用いれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \phi_c &= w \left\{ \frac{1}{2} \log \rho_1 - \frac{3h \sin \varphi_1}{\rho_1} + \frac{(1+8h^2) \cos 2\varphi_1}{4\rho_1^2} + \frac{h \sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} - \left(\frac{2 \sin \varphi_1}{\rho_1} - \frac{2h \cos 2\varphi_1}{\rho_1^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} \right) \rho_1 \sin \varphi_1 \right\} \end{aligned}$$

あるいは

$$\phi_c = \Re \left[w \left\{ \frac{1}{2} \log \zeta_1 - \frac{3ih}{\zeta_1} + \frac{1+8h^2}{4\zeta_1^2} + \frac{ih}{\zeta_1^3} - \left(\frac{2i}{\zeta_1} - \frac{2h}{\zeta_1^2} - \frac{i}{\zeta_1^3} \right) \rho_1 \sin \varphi_1 \right\} \right]$$

直線境界が円孔 O_1 より下部 ($y<0$) にある場合は h を負値とする。

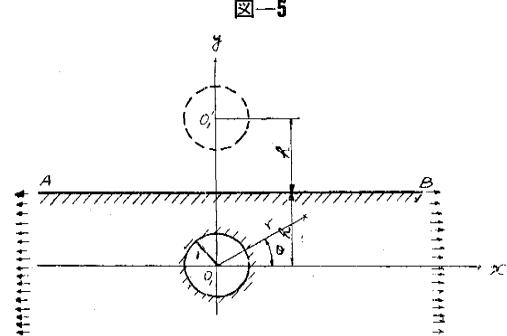
ト) (D) 式の誘導

図-3において円 O_2 に関する (B) 式は次の如くである。(円 O_1 に関するものと区別するため $\phi_{B'}$ と書く)

$$\phi_{B'} = -\frac{w}{2} \left(\log \rho + \frac{\cos 2\varphi}{2\rho^2} - \cos 2\varphi \right)$$

あるいは O_1 を原点とする極座標 (r, θ) に書直して

$$\begin{aligned} \phi_{B'} &= -\frac{w}{2} \left[\log \sqrt{(r \cos \theta - p)^2 + (r \sin \theta - g)^2} + \frac{1}{2} \frac{(r \cos \theta - p)^2 - (r \sin \theta - g)^2}{[(r \cos \theta - p)^2 + (r \sin \theta - g)^2]^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(r \cos \theta - p)^2 - (r \sin \theta - g)^2}{[(r \cos \theta - p)^2 + (r \sin \theta - g)^2]^2} \right] \end{aligned}$$



(但し ϕ 及び g の符号については、すでに述べた如くとする)

$$\text{今}, \quad z=re^{i\theta}, \quad s=p+ig, \quad \bar{s}=p-ig$$

とおいて書直せば

$$\phi_B' = -\frac{w}{2} \cdot \Re \left[\log(z-s) + \frac{\bar{s}}{z-s} + \frac{1}{2(z-s)^2} \right] + \frac{wr^2}{2} \cdot \Re \left[\frac{1}{s(z-s)} - \frac{1}{sz} \right] \quad \dots \dots \dots (7)$$

となる。しかるに

$$\frac{w}{2} r^2 \cdot \Re \left(\frac{1}{sz} \right)$$

は応力に無関係だから省略し、更に

$$\frac{\partial}{\partial r} = e^{i\theta} \frac{d}{dz}$$

なる事を考慮して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_B'}{\partial r} &= -\frac{w}{2} \cdot \Re \left[\frac{e^{i\theta}}{z-s} - \frac{(s\bar{s}-1)e^{i\theta}}{s(z-s)^2} - \frac{e^{i\theta}}{(z-s)^3} \right] + wr \cdot \Re \left[\frac{1}{s(z-s)} \right] + \frac{w}{2} (r^2-1) \cdot \Re \left[-\frac{e^{i\theta}}{s(z-s)^2} \right] \end{aligned}$$

この結果、外力の分布が無い筈の円 O_1 の内面に外力の分布がある事になる。従つて、これを打消し、かつ $r>1$ の領域内で成立するような応力関数を加える必要がある。それを ϕ_D とすれば ϕ_D の境界値は次の如くなる。

$$(\phi_D)_{r=1} = -\frac{w}{2} \cdot \Re \left[\log(e^{i\theta}-s) + \frac{s\bar{s}-1}{s(e^{i\theta}-s)} + \frac{1}{2(e^{i\theta}-s)^2} \right] \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_D}{\partial r} \right)_{r=1} = -\frac{w}{2} \cdot \Re \left[1 + \frac{s^2-s\bar{s}-1}{s(e^{i\theta}-s)} - \frac{s\bar{s}}{(e^{i\theta}-s)^2} - \frac{s}{(e^{i\theta}-s)^3} \right] \quad \dots \dots \dots (9)$$

$$\text{今}, \quad \phi_D = U_D + (r^2-1)V_D \quad \dots \dots \dots (10)$$

(但し U_D 及び V_D は調和関数)

とおけば

$$(\phi_D)_{r=1} = (U_D)_{r=1} - \left(\frac{\partial \phi_D}{\partial r} \right)_{r=1} + 2(V_D)_{r=1}$$

によつて、まず U_D の境界値、従つて U_D が定まる。すなわち $W=e^{i\theta}/r$ とおいて

$$U_D = -\frac{w}{2} \cdot \Re \left[\log(W-s) + \frac{s\bar{s}-1}{s(W-s)} + \frac{1}{2(W-s)^2} \right] \quad \dots \dots \dots (11)$$

更に (11) 式より

$$\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{e^{i\theta}}{r^2} \frac{d}{dW}$$

なる事を考慮して $\partial U_D/\partial y$ が得られるから、 V_D の境界値、従つて V_D が定まる。すなわち

$$V_D = \frac{w}{2} \cdot \Re \left[1 + \frac{s-\bar{s}}{W-s} - \frac{s\bar{s}}{(W-s)^2} - \frac{s}{(W-s)^3} \right] \quad \dots \dots \dots (12)$$

(11) 及び (12) 式を (10) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \phi_D &= -\frac{w}{2} \cdot \Re \left[\log(W-s) + \frac{s\bar{s}-1}{s(W-s)} + \frac{1}{2(W-s)^2} \right] + \frac{w}{2} (r^2-1) \cdot \Re \left[1 + \frac{s-\bar{s}}{W-s} \right. \\ &\quad \left. - \frac{s\bar{s}}{(W-s)^2} - \frac{s}{(W-s)^3} \right] \end{aligned}$$

を得るが、上式第2項は $r \rightarrow \infty$ において r^2 の位の無限大となる。すなわち $r \rightarrow \infty$ で

$$\Re \left[\frac{w}{s^2} \right]$$

なる強さの一様な引張りを受ける解になつてゐるので、これを打消さねばならない。そのためには

$$\frac{w}{2} (2 \log r - r^2) \cdot \Re \left[\frac{1}{s^2} \right]$$

なる項をつけ加える。従つて

$$\begin{aligned} \phi_D &= -\frac{w}{2} (2 \log r - r^2) \cdot \Re \left[\frac{1}{s^2} \right] + \frac{w}{2} \cdot \Re \left[\log(W-s) + \frac{s\bar{s}-1}{s(W-s)} + \frac{1}{2(W-s)^2} \right] \\ &\quad + \frac{w}{2} (r^2-1) \cdot \Re \left[1 + \frac{s-\bar{s}}{W-s} - \frac{s\bar{s}}{(W-s)^2} - \frac{s}{(W-s)^3} \right] \end{aligned}$$

となる。この ϕ_D と相似の式を円孔 O_2 に関しても加算しなければならない訳であり、それが再び O_1 に影響を与える事となるが、 O_1 と O_2 との中心距離が普通の示方書の規定の範囲内にあれば、この影響は非常に小さい。

チ) (E) 式の誘導

(E) 式の誘導方法は (D) 式の場合と全く同様であるので、結果だけを記すと加算せらるべき応力関数 φ_E は次の如くである。(図-4 参照)

$$\begin{aligned} \phi_E = & \frac{w}{2} (2 \log r - r^2) \cdot \Re \left[\frac{2}{s_1^2} - \frac{4ih}{s_1^3} - \frac{3}{s_1^4} \right] - \frac{w}{2} \cdot \Re \left[\log(W-s_1) \right. \\ & - \frac{2s_1^2(s_1\bar{s}_1-1)+2ih s_1(4s_1^2+1)+1}{s_1^3(W-s_1)} + \frac{(3+8h^2)s_1^2-4ih s_1(s_1\bar{s}_1-1)+2}{2s_1^2((W-s_1)^2)} + \frac{s_1\bar{s}_1+2ih s_1-1}{s_1(W-s_1)^3} \Big] \\ & - \frac{w}{2}(r^2-1)\Re \left[1 + \frac{s_1+2\bar{s}_1+8ih}{W-s_1} + \frac{2s_1\bar{s}_1-8h^2-5+4ih(2s_1+\bar{s}_1)}{(W-s_1)^2} \right. \\ & \left. - \frac{8h^2s_1+3s_1+3\bar{s}_1-2ih(2s_1\bar{s}_1-5)}{(W-s_1)^3} - \frac{3(s_1\bar{s}_1+2ih s_1-1)}{(W-s_1)^4} \right]. \end{aligned}$$

(但し, $W = e^{i\theta}/r$, $s_1 = p_1 + ig_1$, $\bar{s}_1 = p_1 - ig_1$)

この ϕ_E を加算する結果、再び直線境界に影響を与える、更に修正項を考える必要が起る訳であるが、鉛距及び鉛の縁端距離が普通の示方書の規定の範囲内であれば、その影響は非常に小さい。

リ) 円孔周縁における切線方向垂直応力度

以上を総合して、円孔 O_1 の附近で適用される応力関数は次の如くなる。

$$\phi = \phi_A + \phi_B + \sum_1 (\phi_B' + \phi_D) + \sum_2 (\phi_C + \phi_E)$$

(但し、 ϕ_B は円孔 O_1 自身に関するもの)

Σ_1 は O_1 に影響を及ぼす実円孔についての和

\sum_2 は O_1 に影響を及ぼす虚円孔についての和

を表わす)

上式を r (O_1 の中心を原点とする極座標) で 2 度微分した後, $r=1$ とおけば円孔 O_1 の周縁における切線方向垂直応力度 σ_0 が得られる。すなわち

$$\begin{aligned} \sigma_0 = & w(1 - 2\cos 2\theta) + \sum_1 w \left\{ -\frac{2\cos 2\alpha}{l^2} + \frac{2\cos(2\theta - 2\beta)}{m^2} + \frac{4\cos(2\theta - 4\beta)}{m^2} - \frac{6\cos(2\theta - 4\beta)}{m^4} \right\} \\ & + \sum_2 w \left\{ -\frac{4\cos 2\alpha_1}{l_1^2} + \frac{8h\sin 3\alpha_1}{l_1^3} + \frac{6\cos 4\alpha_1}{l_1^4} - \frac{2\cos(2\theta - 2\beta_1)}{m_1^2} - \frac{32h\sin(2\theta - 3\beta_1)}{m_1^3} \right. \\ & + \frac{8\cos(2\theta - 4\beta_1)}{m_1^2} + \frac{6(3+8h^2)\cos(2\theta - 4\beta_1)}{m_1^4} + \frac{24h\sin(2\theta - 5\beta_1)}{m_1^3} + \frac{48h\sin(2\theta - 5\beta_1)}{m_1^5} \\ & \left. - \frac{24\cos(2\theta - 6\beta_1)}{m_1^4} \right\} \dots \quad (13) \end{aligned}$$

(組し、

l は O_1 の中心より他の実円孔中心までの距離,

α は上記中心を結ぶ直線が x 軸の正の方向となす角, m は円孔 O_1 の周線上, σ_0 を求めようとする点より他の実円孔中心までの距離,

β は上記 2 点を結ぶ直線が x 軸の正の方向となす角, l_1 は O_1 の中心より虚円孔の中心までの距離

α , β は上記中心を結ぶ直線が x 軸の正の方向となす角, m_1 は円孔 O_1 の周線上, σ_0 を求めようとする点より虚円孔の中心までの距離,

β_1 は上記 2 点を結ぶ直線が x 軸の正の方向となす角,

すなわち、

$$p = l \cos \alpha, \quad g = l \sin \alpha, \quad p - \cos \theta = m \cos \beta, \quad g - \sin \theta = m \sin \beta$$

$$p_1 = l_1 \cos \alpha_1, \quad g_1 = l_1 \sin \alpha_1, \quad p_1 - \cos \theta = m_1 \cos \beta_1, \quad g_1 - \sin \theta = m_1 \sin \beta_1$$

とする)

又) 応力集中

(13) 式によつて、円孔 O_1 の周縁上の σ_{θ} の値は計算されるが、その正の最大値は、もし他の円孔の配置が O_1 に対して左右対称ならば当然 $\theta = \pm 90^\circ$ に起る。その他の配置ではどうなるかを調べるために最も不対称な場

合として O_1 以外の円孔が O_2 1 個であり直線境界がない場合、すなわち 図-3 の如きの場合で、かつ $p=6, g=0$ なる場合を考える。この場合の σ_θ を θ で微分して零とおけば、 $\cos \theta = -0.012$ 。従つて $\theta = \pm 90^\circ 41'$ を得る。 θ のこの値及び $\theta = 90^\circ$ を σ_θ の式に代入して計算すると

$$(\sigma_\theta)_{\max} = +2.813 w \quad (\sigma_\theta)_{\theta=90^\circ} = +2.811 w$$

を得る。この結果から見て、円孔の配置が左右対称でない場合でも $\theta = \pm 90^\circ$ において最大の応力集中が起ると考えてさしつかえないと思われる。次に円孔 O_1 の上側に直線境界があり、下側にはないか、もしくはあつても充分遠い場合に、円孔周縁上 $\theta = 90^\circ$ における σ_θ と $\theta = -90^\circ$ における σ_θ といずれが大きいかを吟味する。 O_1 の中心から直線境界までの距離を h とすれば

$$(\sigma_\theta)_{\theta=90^\circ} = w \left\{ 3 + \frac{3}{8h^4} + \frac{6}{(2h-1)^2} + \frac{4}{(2h-1)^3} - \frac{30}{(2h-1)^4} + \frac{24}{(2h-1)^5} \right\} \quad \dots \dots \dots (14)$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=-90^\circ} = w \left\{ 3 + \frac{3}{8h^4} + \frac{6}{(2h+1)^2} - \frac{4}{(2h+1)^3} - \frac{30}{(2h+1)^4} - \frac{24}{(2h+1)^5} \right\} \quad \dots \dots \dots (15)$$

を得る。よつて $\theta = 90^\circ$ において σ_θ の最大が起る事がわかる。(14) 及び (15) 式は円孔 O_1 とそれ自身に対応する虚円孔のみがある場合の σ_θ の $\theta = \pm 90^\circ$ における値を与えるもので、これ等の値の h に対する関係を図示すれば 図表-1 及び 図表-2 の如くなる。

上記の場合、更に他の円孔があつて、その影響

によつて $\theta = \pm 90^\circ$ における σ_θ の値の大小関係が逆になる場合があるか否かを調べるために、 O_1 より下方、板の引張り方向と直角な方向に他の円孔がある場合を計算してみるに、両円孔の中心間隔が普通の示方書のリベットピッチの規定の範囲内にある限り、このような事は起らない事がわかる。

次に σ_θ の負の最大値は大体 $\theta = 0^\circ$ あるいは $\theta = 180^\circ$ の附近で起り、直線境界や他の円孔の影響で多少それがずれる點であるが、その影響はあまり大きくなく、かつ負の最大値は正の最大値に比べて、その絶対値が小さくあまり問題にならないから、 $\theta = 0^\circ$ あるいは $\theta = 180^\circ$ における値で負の最大値に代えてもさしつかえないと思われる。以上により、特に

$$\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, -90^\circ$$

における σ_θ の値が重要であるから、これ等の値を (13) 式に代入すると次の如くなる。

$$(\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ} = \left[(\sigma_0) + \sum_1 \{(a) - (b)\} + \sum'_2 \{(c) + h \cdot (d) - (e) - h \cdot (f) - h^2 \cdot (g)\} \right]_{\theta=0^\circ}$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=90^\circ} = \left[(\sigma_0) + \sum_1 \{(a) + (b)\} + \sum'_2 \{(c) + h \cdot (d) + (e) + h \cdot (f) + h^2 \cdot (g)\} \right]_{\theta=90^\circ}$$

$\theta = 180^\circ$ 及び $\theta = -90^\circ$ における σ_θ の式は形式的に、それぞれ $\theta = 0^\circ$ 及び $\theta = 90^\circ$ の式と同じになる。

(但し、 (σ_0) は $w(1 - 2 \cos 2\theta)$ に円孔 O_1 自身に対応する虚円孔の影響を加算したもので、図表-1～図表-2 で知る事ができる。

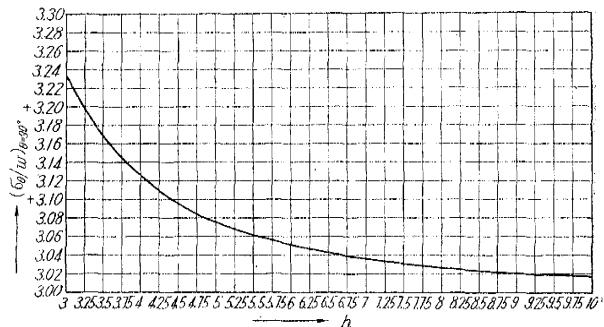
(a), (b) 等は次式で与えられる。

$$(a) = -\frac{2 \cos 2\alpha}{l^2}, \quad (b) = -\frac{2 \cos 2\beta}{m^2} - \frac{4 \cos 4\beta}{m^4} + \frac{6 \cos 4\beta}{m^6},$$

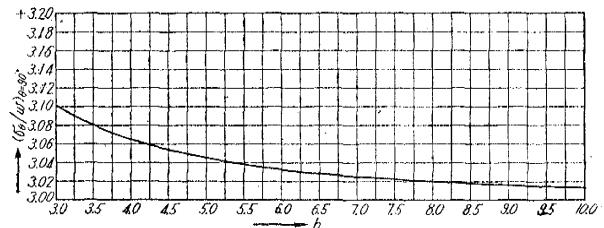
$$(c) = -\frac{4 \cos 2\alpha_1}{l_1^2} + \frac{6 \cos 4\alpha_1}{l_1^4}, \quad (d) = +\frac{8 \sin 3\alpha_1}{l_1^3},$$

$$(e) = +\frac{2 \cos 2\beta_1}{m_1^2} - \frac{8 \cos 4\beta_1}{m_1^4} - \frac{18 \cos 4\beta_1}{m_1^6} + \frac{24 \cos 6\beta_1}{m_1^8},$$

図表-1



図表-2



$$(f) = -\frac{32 \sin 3\beta_1}{m_1^3} + \frac{24 \sin 5\beta_1}{m_1^3} + \frac{48 \sin 5\beta_1}{m_1^5}, \quad (g) = -\frac{48 \cos 4\beta_1}{m_1^4},$$

Σ_1 は O_1 に影響を及ぼすべき他の実用孔についての和 Σ'_2 は O_1 自身に対応する虚円孔を除く他の虚円孔についての和)

(a), (b) 等の値については、 σ_0 を求めようとする点を中心として、他の実円孔あるいは虚円孔の中心の位置を表わしたときの値を 図表-4～図表-10 に示す。

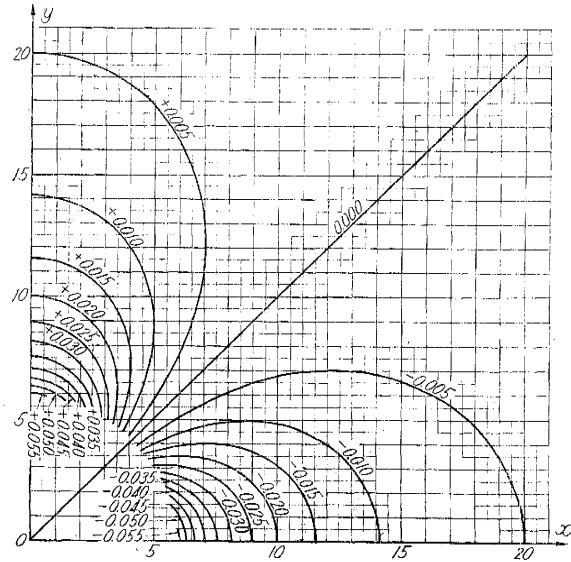
円孔 O_1 の下側にも直線境界がある場合は、これに関して O_1 自身に対応する虚円孔についての値は (σ_0) の中に含まれていないから、別に加算しなければならない。

ル) 結 語

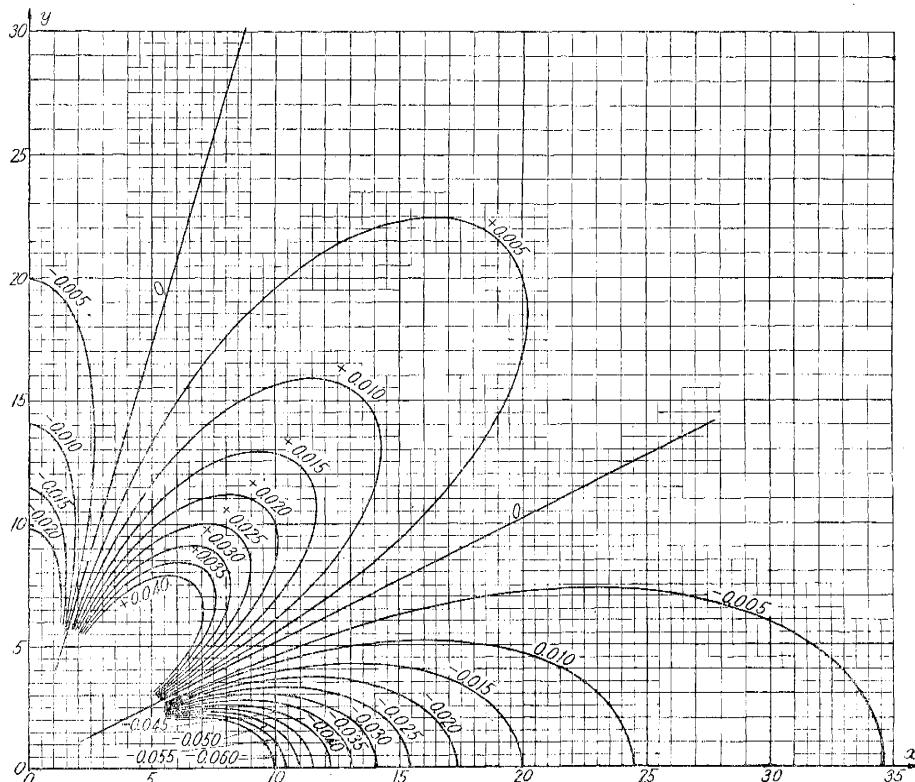
以上によると大体次のような事がわかる。円孔 O_1 の中心より他の円孔中心までの距離が等しい場合を比較して、その位置が O_1 の位置に対して
 i) 引張り方向と平行な方向にあるときは、 O_1 の周縁における応力集中を軽減させる傾向がある。
 ii) 上記の影響は $\alpha=0^\circ$ の場合が最も強く $\alpha=\pm 22^\circ$ 前後の場合はほとんど影響をうけない。
 iii) 引張方向に直角な方向にあるときは、 O_1 の周縁における応力集中を増大させる傾向がある。
 iv) 上記の影響は $\alpha=\pm 90^\circ$ の場合が最も強い

$$(a) = -\frac{2 \cos 2\alpha}{l^2} \quad (x \text{ 軸及び } y \text{ 軸に関して対称})$$

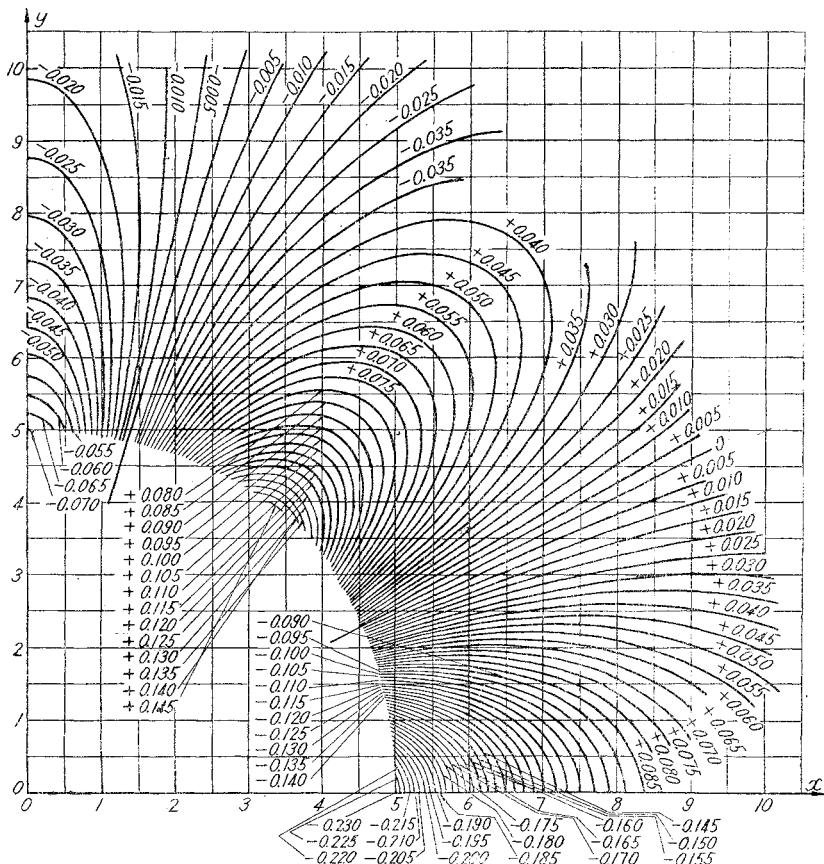
図表-4



$$\text{図表-5 の } 1 \quad (b) = -\frac{2 \cos 2\beta}{m^2} - \frac{4 \cos 4\beta}{m^2} + \frac{6 \cos 4\beta}{m^4} \quad (x \text{ 軸および } y \text{ 軸に関して対称})$$



図表-5の2 (b) = $-\frac{2 \cos 2\beta}{m^2} - \frac{4 \cos 4\beta}{m^2} + \frac{6 \cos 4\beta}{m^4}$ (x 軸および y 軸に関して対称)

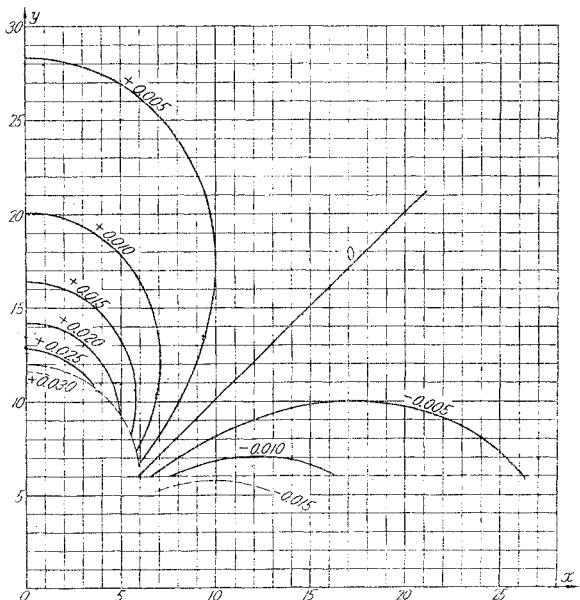


訳ではなく、 $\alpha = \pm (45^\circ \sim 50^\circ)$ の場合が最も強い。

v) 円孔の色々な配置について求めてみると、応力集中は最大 3.37 w 程度になる。

(昭.31.6.4)

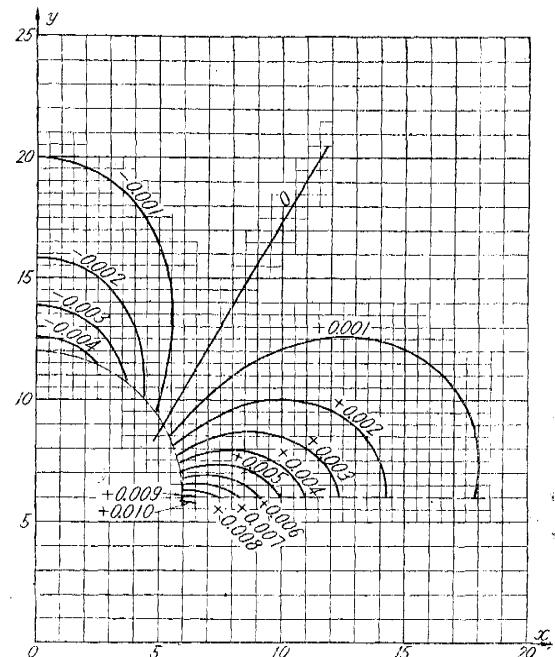
図表-6 (c) = $-\frac{4 \cos 2\alpha_1}{l_1^2} + \frac{6 \cos 4\alpha_1}{l_1^4}$ (x 軸及び y 軸に関して対称)



図表-7

$$(d) = \frac{8 \sin 3\alpha_1}{l_1^3}$$

(x 軸に関しては符号を変えて対称, y 軸に関しては対称)

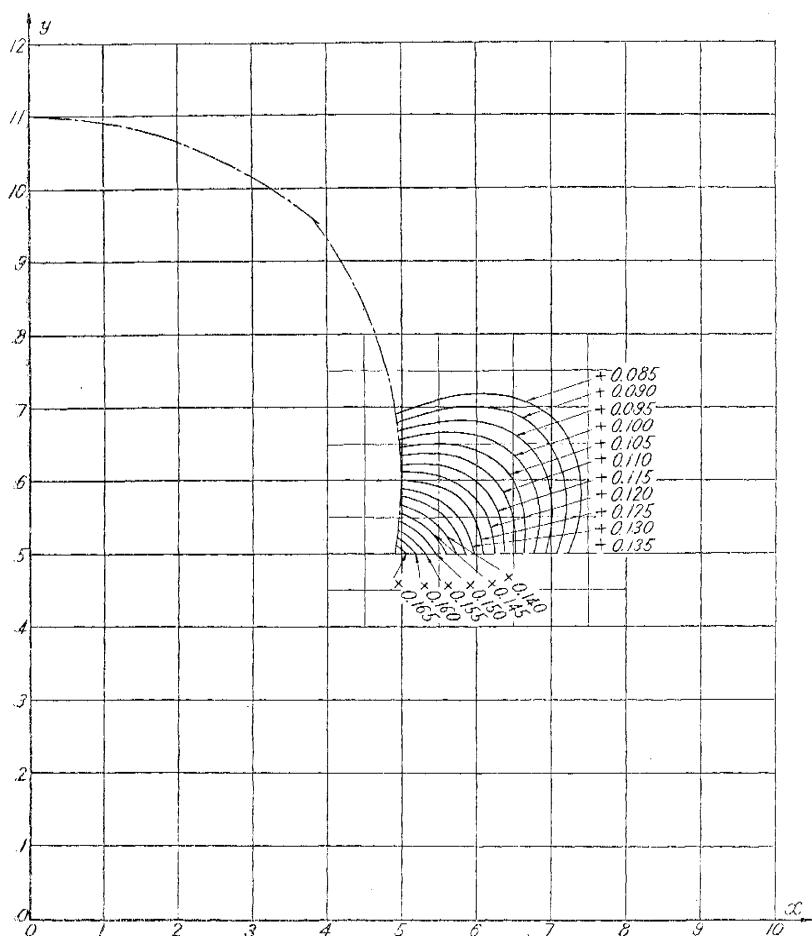


図表-8 の 2 (拡大図)

$$(e) = -\frac{2 \cos 2\beta_1}{m_1^2} - \frac{8 \cos 4\beta_1}{m_1^2}$$

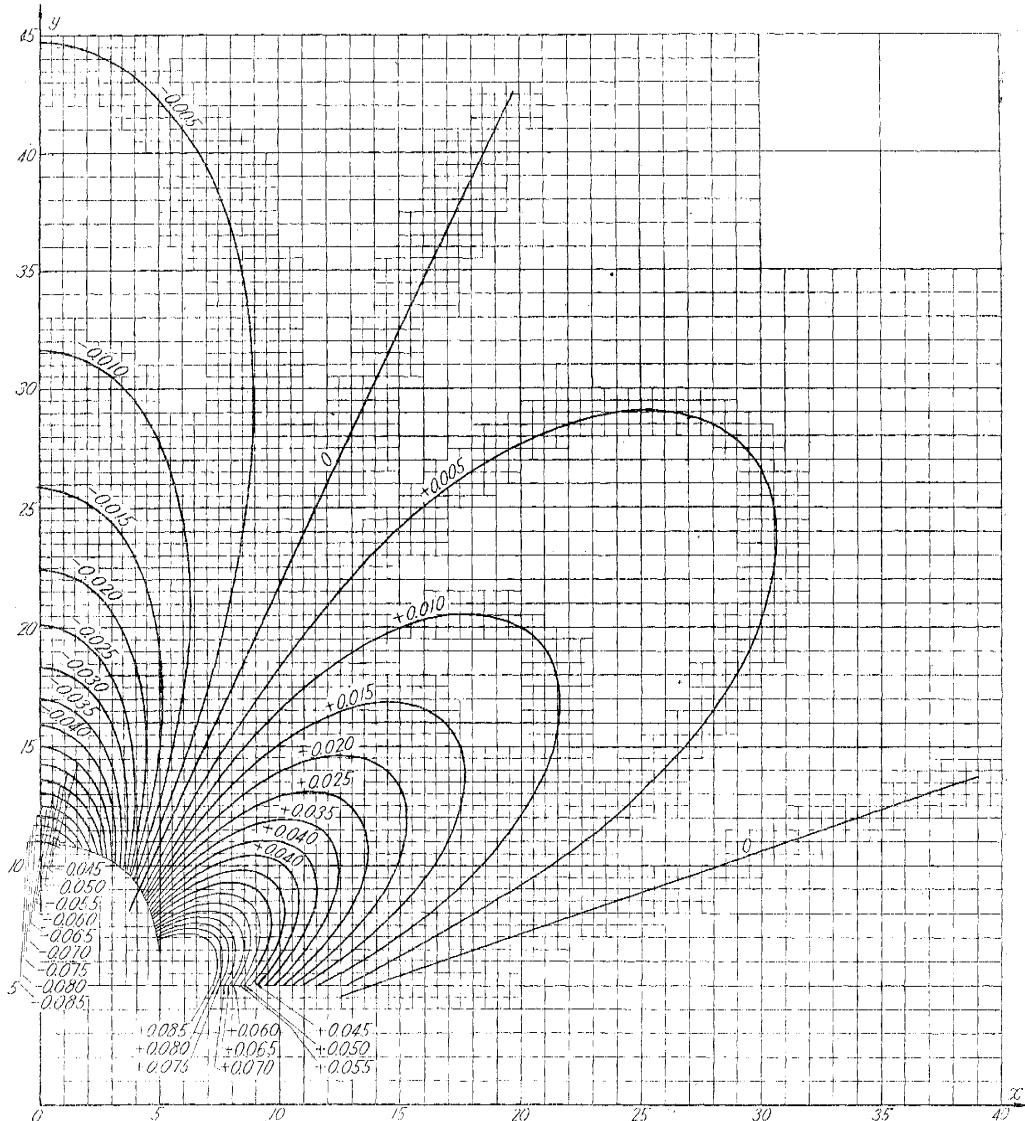
$$-\frac{18 \cos 4\beta_1}{m_1^4} + \frac{24 \cos 6\beta_1}{m_1^4}$$

(x 軸及び y 軸に関して対称)

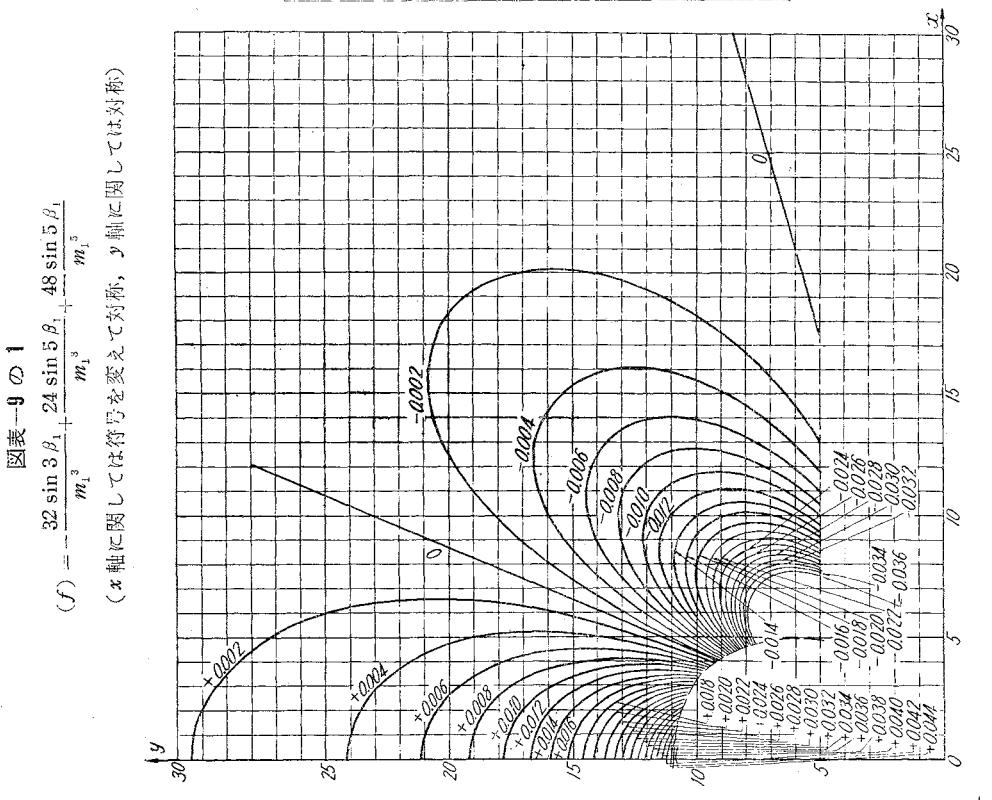


図表-8の1

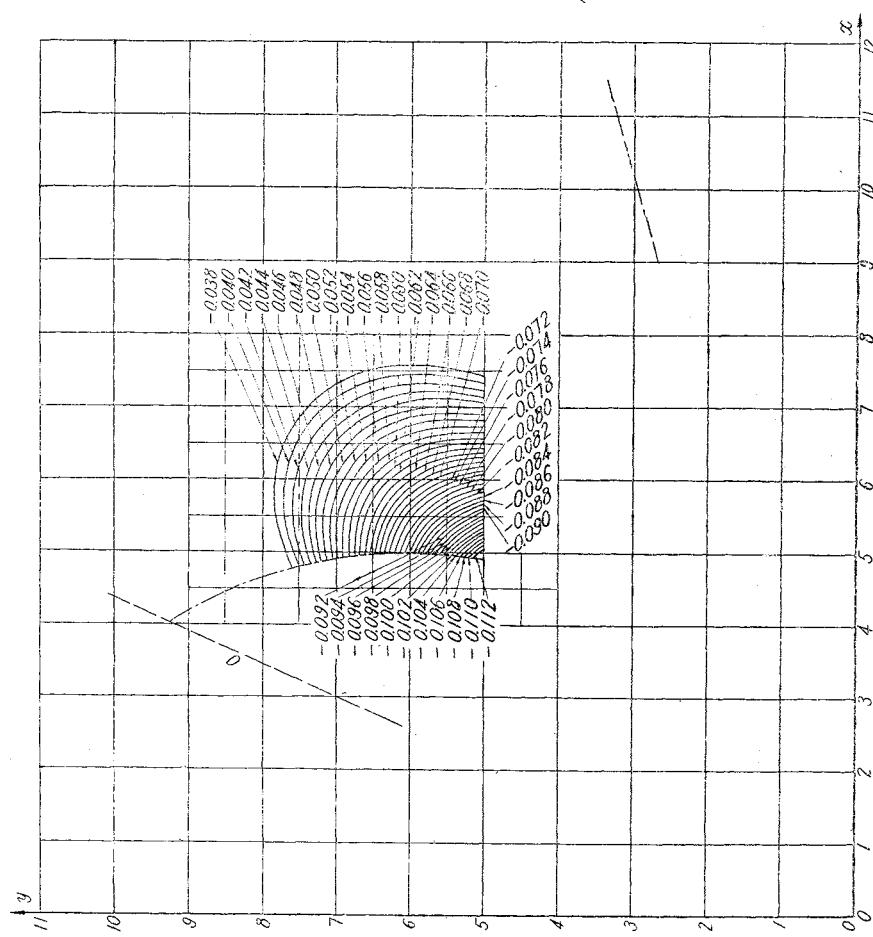
$$(e) := \frac{2 \cos 2\beta_1}{m_1^2} - \frac{8 \cos 4\beta_1}{m_1^2} - \frac{18 \cos 4\beta_1}{m_1^4} + \frac{24 \cos 6\beta_1}{m_1^4} \quad (x \text{ 軸及び } y \text{ 軸に関して対称})$$



任意に配置された数個の等径円孔を有する薄板の引張り

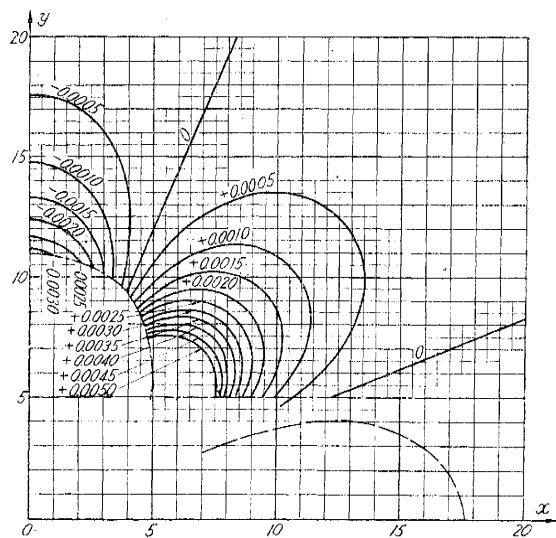


図表-9 の 2 (拡大図)
 $(f) = -\frac{32 \sin 3\beta_1}{m_1^3} + \frac{24 \sin 5\beta_1}{m_3^3} - \frac{48 \sin 5\beta_1}{m_5^3}$
 (x 軸に関しては符号を変えて対称, y 軸に関しては対称)



図表-10の1

$$(g) = -\frac{48 \cos 4 \beta_1}{m_1^4} \quad (x \text{ 軸及び } y \text{ 軸に関して対称})$$

図表-10の2(拡大図) $(g) = -\frac{48 \cos 4 \beta_1}{m_1^4}$ (x 軸及び y 軸に関して対称)