

グラフ理論による河川網不定流の水理解析

金本 満*・常松芳昭**

開水路不定流の基礎方程式を Galerkin 法および後退差分法を用いて離散化し、さらに、河川網形状のトポロジーの性質を利用することによって、グラフ理論による河川網不定流の実用的な演算手法を検討した。本手法を広島市内の感潮河川網の洪水流解析に適用したところ、実績水位に対する再現性は良好であり、計算処理時間の面からも本手法の有効性が明らかになった。

Keywords : unsteady flow, channel networks, characteristic forms, Galerkin's method, graph theory

1. 緒 言

デルタ地帯などの低平地の河川は、通常の河川と異なって、分流点、合流点を数多く有する複雑な河川網を形成することが多い。わが国においては、とりわけこのような低平地へ人口と資産が過度に集中している現状にかんがみ、単に基本高水だけにとどまらず、それを上回る超過洪水をも想定した治水対策の重要性が認識されている。このような状況にあって、複雑な低平地河川網の非定常流況の実用的な数値シミュレーション技法を確立することは水理学上重要な一課題である。

従来、河川網に代表される開水路網の非定常流の水理解析に際しては、簡便なことからしばしば定常不等流解析法が準用されているが、必然的に河口潮位の影響を受ける感潮河川網の流れは、洪水時においては上流からの流入流量の変化と相まってかなり複雑な挙動を呈することが予想される。したがって、この種の問題に対してはより現実に近い開水路網非定常流としての解析を行う必要がある。

ところで、開水路網はループなどの複雑な連結構造を有する点で特徴的であり、この点に着目したシステム論的な新しい水理解析法の開発が考えられる。実際、このような視点から開水路網定常流の行列解析法^{1), 2)} がすでに提案されている。しかし、非定常流れを対象とする限り、開水路網を構成する各水路において場所的に流量が変化するため、従来提案されている計算法は、一次元漸変非定常流の基礎方程式を直接差分化し、分・合流点における水位と流量の連続条件を考慮に入れて解く方法^{3)~6)} がほとんどである。これらの方法は一般的なネットワーク・モデルを構築するという視点に欠けており、

複雑な開水路網系一般の系統的な数値計算法の開発を志向したものとしては、以下のようなものが見られるにすぎない。すなわち、開水路漸変非定常流の特性方程式の陰的数値解法⁷⁾ を開水路網に拡張した計算法⁸⁾、漸変非定常流の基礎方程式系を 4 点 Implicit 法を用いて離散化し、非線形連立方程式を Newton-Raphson 法を適用して開水路網系全体について解く方法⁹⁾、分・合流点に対しては連続方程式の積分形である貯留方程式を用いた基礎方程式系をグラフの接続行列で表現し、これを staggered-scheme で差分近似して計算する方法¹⁰⁾ がある。しかし、これらの解法のいずれにおいても、基礎となる数理モデルはネットワーク・モデルとして系統的に、しかも簡潔に定式化されるまでには至っていない。

一般に、開水路網系の幾何学的形態は節点と枝から成るグラフでモデル化され得るが、その場合、枝の通過変数に流量を選び数理モデルを構築しようとすれば、定常流と異なって非定常流ではグラフの枝に対して唯一の流量を定義し得ないので、枝の上で定義する流量の取り扱いに何らかの工夫をする必要がある。また、それによってシステム・モデルの定式化の巧拙が大きく左右されるので、この難点を解決すれば、開水路網非定常流の系統的な水理解析法の展開は可能になるものと考えられる。

このような観点に立って、以下本文では、有向グラフの枝に対して必要最小限の 2 個の流量が定義される場合のシステム・モデルをグラフ理論の基礎概念を用いて行列・ベクトル表示し、また、これに立脚した系統的な行列演算による水理解析法を提示する。さらに、得られた手法を広島デルタの感潮河川網の洪水流解析に適用した例についても示すことにする。

2. 単一河道の基礎方程式の離散化と行列表示

本研究では低平地の実河川網を対象としているので、漸変非定常流の基礎方程式としては、広幅水路に対する

* 正会員 工修 中電技術コンサルタント株式会社（元 広島大学助手）

(〒734 広島市南区出汐 2 丁目 3-30)

** 正会員 工博 広島大学助教授 工学部地域環境工学

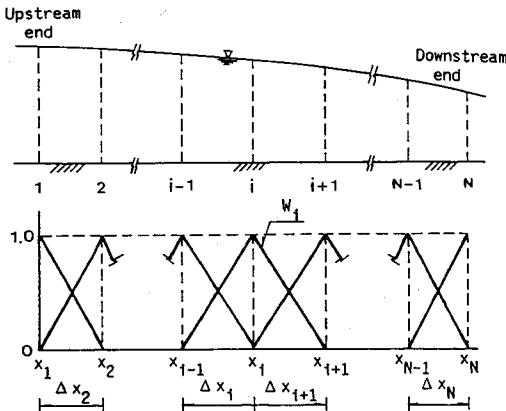


Fig. 1 Definition sketch for a single channel reach and linear weighting function.

流量と水位を未知量とする連続方程式および運動方程式を用いるが³、これらはまとめて次のように特性曲線表示される¹¹⁾。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial t} + (v \pm c) \frac{\partial z}{\partial x} \\ & - \frac{1}{B(v \mp c)} \left\{ \frac{\partial q}{\partial t} + (v \pm c) \frac{\partial q}{\partial x} \right\} \\ & = - \frac{gA}{B(v \mp c)} \left\{ s_0 F^2 - \frac{n^2 q |q|}{A^2 R^{4/3}} \right\} + \frac{q_L}{B} \quad \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

ここに、 t ：時間、 x ：下流方向に測った距離、 q ：流量、 z ：水位、 v ：断面平均流速、 A ：流水断面積、 B ：水面幅、 s_0 ：河床勾配、 n ：マニングの粗度係数、 R ：径深、 q_L ：水路の単位長さあたりの横流入量、 g ：重力加速度、 c ：微少擾乱の伝播速度 ($\sqrt{gA/B}$)、 F ：フルード数 (v/c) であり、複号同順である。

式(1)の離散化は、実河川のような変断面流路では必ずしも断面資料が等しい距離間隔で得られているとは限らないこと、および、差分スキームの型によっては一般的なネットワーク・モデルとしての定式化は困難になることの2点を考慮に入れてなされる必要がある。そこで、ここでは、断面間の距離が異なる一般的な場合について、距離に関して Galerkin 法を、時間に関しては後退差分を用いて式(1)を離散表示することにする。

いま、1本の河道区間は Fig. 1 に示すように $(N-1)$ 個の小区間からなるとし、上流端から下流端までの断面番号を順に $i=1, \dots, N$ とする。まず、距離方向に離散化するため、Fig. 1 および式(2)に示すような区分割的に線形な試験関数を考える。

$$\left. \begin{aligned} w_i &= \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x_i} \quad (x_{i-1} < x \leq x_i) \\ w_i &= \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_{i+1}} \quad (x_i < x \leq x_{i+1}) \\ w_i &= 0 \quad (x \leq x_{i-1}, x_{i+1} < x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 x_i は上流端から i 断面までの距離、 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ である。

時間微分を連続のままにしておき、式(2)に示した試験関数の線形結合で表わされる未知水理量の近似値を式(1)に代入したときの残差と重み関数 (Galerkin 法では試験関数と同値) を直交化させれば、式(3)のようなベクトル方程式が得られる¹²⁾。

$$\alpha \frac{dz}{dt} + \lambda \beta z - \frac{1}{B \bar{\lambda}} \left\{ \alpha \frac{dq}{dt} - \lambda B q \right\} - \phi r = 0 \dots \dots \dots (3)$$

ただし、 $\lambda = v \pm c$ 、 $\bar{\lambda} = v \mp c$ (複号同順) であり、 ϕ は式(1)の右辺を表わしている。また、

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_2}{3} & \frac{\Delta x_2}{6} \\ & \ddots \\ & \frac{\Delta x_i}{6} & \frac{\Delta x_i}{3} + \frac{\Delta x_{i+1}}{3} & \frac{\Delta x_{i+1}}{6} \\ & & & \ddots \\ & & & \frac{\Delta x_N}{6} & \frac{\Delta x_N}{3} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \ddots \\ & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & & & \ddots \\ & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_2}{2} \\ \vdots \\ \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2} \\ \vdots \\ \frac{\Delta x_N}{2} \end{bmatrix}$$

である。なお、式(3)は、低平地のゆるやかな常流を問題としているので、簡単のため λ 、 $\bar{\lambda}$ 、 ϕ の値は微小時間内では局所的に一定であると仮定して導かれている。

さらに、時間に関する離散化は次のような後退差分

$$\frac{dz}{dt} = \frac{z^{m+1} - z^m}{\Delta t}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{q^{m+1} - q^m}{\Delta t} \dots \dots \dots (4)$$

を用いて行う。ただし、上付添字 m は時間ステップを表している。

式(4)を用いて式(3)を成分表示すれば、上流境界点 ($i=1$) に対しては、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3} \Delta x_2 - \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) z_1^{m+1} + \left(\frac{1}{6} \Delta x_2 + \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) z_2^{m+1} \\ & - \frac{1}{B \bar{\lambda}} \left\{ \left(\frac{1}{3} \Delta x_2 - \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) q_1^{m+1} + \left(\frac{1}{6} \Delta x_2 + \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) q_2^{m+1} \right\} \\ & = \frac{\phi^m}{2} \Delta x_2 \Delta t + \frac{1}{3} \Delta x_2 z_1^m + \frac{1}{6} \Delta x_2 z_2^m \\ & - \frac{1}{B \bar{\lambda}} \left[\frac{1}{3} \Delta x_2 q_1^m + \frac{1}{6} \Delta x_2 q_2^m \right] \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

である。ただし、上式において $\lambda=v-c$, $\bar{\lambda}=v+c$ である。また、下流境界点 ($i=N$) に対しては、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} \Delta x_N - \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) z_{N-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{3} \Delta x_N + \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) z_N^{m+1} \\ & - \frac{1}{B\bar{\lambda}} \left\{ \left(\frac{1}{6} \Delta x_N - \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) q_{N-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{3} \Delta x_N + \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) q_N^{m+1} \right\} \\ & = \frac{\psi^m}{2} \Delta x_N \Delta t + \frac{1}{6} \Delta x_N z_{N-1}^m + \frac{1}{3} \Delta x_N z_N^m \\ & - \frac{1}{B\bar{\lambda}} \left\{ \frac{1}{6} \Delta x_N q_{N-1}^m + \frac{1}{3} \Delta x_N q_N^m \right\} \quad \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

ただし、 $\lambda=v+c$, $\bar{\lambda}=v-c$ である。

さらに、内部点 ($i=2, \dots, N-1$) に対しては、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} \Delta x_i - \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) z_{i-1}^{m+1} + \frac{1}{3} (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) z_i^{m+1} \\ & + \left(\frac{1}{6} \Delta x_{i+1} + \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) z_{i+1}^{m+1} - \frac{1}{B\bar{\lambda}} \left\{ \left(\frac{1}{6} \Delta x_i - \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) q_{i-1}^{m+1} \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) q_i^{m+1} + \left(\frac{1}{6} \Delta x_{i+1} + \frac{\lambda}{2} \Delta t \right) q_{i+1}^{m+1} \right\} \\ & = \frac{\psi^m}{2} (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) \Delta t + \frac{1}{6} \Delta x_i z_{i-1}^m \\ & + \frac{1}{3} (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) z_i^m + \frac{1}{6} \Delta x_{i+1} z_{i+1}^m \\ & - \frac{1}{B\bar{\lambda}} \left\{ \frac{1}{6} \Delta x_i q_{i-1}^m + \frac{1}{3} (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) q_i^m + \frac{1}{6} \Delta x_{i+1} q_{i+1}^m \right\} \quad \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

である。式 (7) において、 $\lambda=v\pm c$, $\bar{\lambda}=v\mp c$ (複号同順) である。

さて、式 (5)～(7) をまとめて行列表示するため、これらの代数方程式をつぎのような形式で簡単に表わすことにする。すなわち、式 (5) を

$$b_3^1 z_1^{m+1} + c_3^1 z_2^{m+1} + b_4^1 q_1^{m+1} + c_4^1 q_2^{m+1} = R_1 \quad \dots \dots \dots (8)$$

(6) 式を

$$a_1^N z_{N-1}^{m+1} + b_1^N z_N^{m+1} + a_2^N q_{N-1}^{m+1} + b_2^N q_N^{m+1} = R_N \quad \dots \dots \dots (9)$$

(7) 式の前進特性曲線については、

$$\begin{aligned} & a_1^i z_{i-1}^{m+1} + b_1^i z_i^{m+1} + c_1^i z_{i+1}^{m+1} \\ & + a_2^i q_{i-1}^{m+1} + b_2^i q_i^{m+1} + c_2^i q_{i+1}^{m+1} = R_i \quad \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

(7) 式の後退特性曲線については、

$$\begin{aligned} & a_3^i z_{i-1}^{m+1} + b_3^i z_i^{m+1} + c_3^i z_{i+1}^{m+1} \\ & + a_4^i q_{i-1}^{m+1} + b_4^i q_i^{m+1} + c_4^i q_{i+1}^{m+1} = R_i \quad \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

のように表現する。式 (8)～(11) は実質的には $(2N-2)$ 個の代数方程式を表わしているが、これらは次のように行列表示される。

ただし、左辺の係数行列および右辺の定数ベクトルは時間ステップ m におけるものであるが、左辺の未知量ベクトルは時間ステップ $m+1$ におけるものである。

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline b_3^1 & b_4^1 \\ \hline a_1^2 & a_2^2 \\ \hline a_3^2 & a_4^2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline c_3^1 & c_4^1 \\ \hline b_1^2 & b_2^2 \\ \hline b_3^2 & b_4^2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline c_1^2 & c_2^2 \\ \hline c_3^2 & c_4^2 \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline z_1 \\ \hline q_1 \\ \hline z_2 \\ \hline \vdots \\ \hline z_i \\ \hline q_i \\ \hline \vdots \\ \hline z_{N-1} \\ \hline q_{N-1} \\ \hline z_N \\ \hline q_N \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline R_i \\ \hline R'_i \\ \hline \vdots \\ \hline R_{N-1} \\ \hline R'_{N-1} \\ \hline R_N \\ \hline \end{array}} \quad \dots \dots \dots (12)$$

ここで、式 (12) の行列とベクトルを破線で示されているように部分行列と部分ベクトルに細分化すれば、式 (12) は次のような形に書かれる。

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A & A_5 \\ A_6 & A_7 & A_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B \\ B_N \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (13)$$

部分行列 A_3, A_6 の要素が全て零であることを考慮して式 (13) を展開すれば、次のような式が得られる。

$$A_1 X_1 + A_2 X = B_1 \quad \dots \dots \dots (14)$$

$$A_4 X_1 + A X + A_5 X_N = B \quad \dots \dots \dots (15)$$

$$A_7 X + A_8 X_N = B_N \quad \dots \dots \dots (16)$$

式 (15) において行列 A は $(2N-4)$ 行 $(2N-4)$ 列の正方非特異行列であるから、式 (15), 「」を変形して、

$$X = A^{-1} (B - A_4 X_1 - A_5 X_N) \quad \dots \dots \dots (17)$$

を得る。ここに、 A^{-1} は A の逆行列である。上式は水路境界点 (上・下流端) の水理量 X_1, X_N によって境界点を除く水路内部点の水理量 X が規定されることを表わしている。この式は影響関数の概念を用いた表示¹³⁾と本質的には同じものであるが、簡潔に行列表示されている点で異なっている。

さらに、式 (17) を式 (14), (16) に代入し、両式を X_1, X_N についてまとめれば、次のような行列表示の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} A_1 - A_2 A^{-1} A_4 & A_2 A^{-1} A_5 \\ -A_7 A^{-1} A_4 & A_8 - A_7 A^{-1} A_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 - A_2 A^{-1} B \\ B_N - A_7 A^{-1} B \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (18)$$

式 (18) において左辺の係数行列は 2 行 4 列の行列であるから、式 (18) は X_1, X_N に含まれている水理量 (z_1, q_1, z_N, q_N) のうち 2 つの水理量が与えられれば、残りの 2 つの未知量は原理的に決定できることを示している。さらに、 X_1, X_N が分かれれば、式 (17) より内部点の未知ベクトル X が計算されるので、单一河道における未知水理量はすべて求めることができる。

以上のことから、Courant-Friedrichs-Lowy 条件¹⁴⁾を満たすかぎり、特性曲線の影響感知域は 6 つの格子点からなる計算セルに含まれるため、本手法のように 6 点の水理量を用いた離散化は妥当なものと考えられる。ま

た、このような手法を用いたことの特徴としては、陰形式差分で離散化したにもかかわらず、境界点において成立する式と内部点において成立する式とを形式上分離して記述できることが挙げられる。

3. 河川網のシステム・モデル

河川網を構成する要素は、河道、河道接続点（分・合流点など）および河川網の境界点である。非定常流の基礎方程式は、本来、分布定数系であるが、前章で示したように1本の河道の内部点と境界点とを分離して定式化すると、境界点で成立する式(18)は集中定数系となる。すなわち、河道網形状は河道を線、河道接続点および河川網の境界点を点とするトポロジー・モデルで表わすことができる。これらは、グラフ理論の基礎的概念¹⁵⁾を利用することによって汎用的な表示方法が可能となる。本文のように感潮域の低平地河川網を対象とする場合には順流、逆流が存在するため、これらを表わすトポロジー・モデルとしては有向グラフが適当である。

いま、Fig. 2に示すように1本の開水路を枝 k に対応させ、その上流端を節点 i 、下流端を節点 j とし、枝 k の向きは仮に節点 i から節点 j に向いているものとすると、1本の開水路の形態は節点 i から節点 j に向かう有向枝 k で表現できる。グラフ理論ではこのような節点 i と枝 k の連結様式を枝 k は節点 i に出連結、節点 j に入連結であると呼んでいる。なお、本文では枝の接続状況により、接続している枝がすべて出連結となっている節点をソース、すべて入連結になっている節点をシンク、他の節点を中間ノードと呼ぶことにする。ただし、河川網のような開いたシステムの場合、ソースとシンクは必ず1つ以上存在しなければならない。

(1) 枝方程式

いま、河川網（開水路網）は一般に e 本の枝と n 個の節点から成る有向グラフで表現されているものとする。まず、単一水路の境界点の水理量のみを用いて記述されている式(18)を開水路網の有向グラフの任意の枝に適用できるようにするために、つきのような e 次元の列ベクトルを定義する。

$$\dot{\bar{Q}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{Q}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\bar{Q}}_e \end{bmatrix}, \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \vdots \\ \bar{Q}_e \end{bmatrix}, \dot{\bar{H}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{H}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\bar{H}}_e \end{bmatrix}, \bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \vdots \\ \bar{H}_e \end{bmatrix} \dots (19)$$

ただし、 $\dot{\bar{Q}}$ ：枝の上流側節点からの流出流量、 \bar{Q} ：枝の下流側節点への流入流量、 $\dot{\bar{H}}$ ：枝の上流側節点の水位、 \bar{H} ：枝の下流側節点の水位である。

これらの列ベクトルの要素を用いると有向グラフの任意の枝 k について式(18)は、

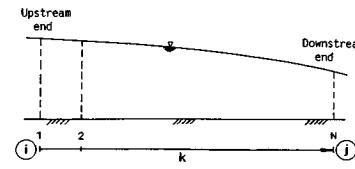


Fig.2 Directed graph for a single channel reach.

$$\begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{13}^k & C_{14}^k \\ C_{21}^k & C_{22}^k & C_{23}^k & C_{24}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{H}}_k \\ \dot{\bar{Q}}_k \\ \bar{H}_k \\ \bar{Q}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^k \\ G_N^k \end{bmatrix} \dots \dots \dots (20)$$

のように表示できる。ただし、

$$[C_{11}^k \ C_{12}^k] = A_1 - A_2 A^{-1} A_4$$

$$[C_{13}^k \ C_{14}^k] = -A_2 A^{-1} A_5$$

$$[C_{21}^k \ C_{22}^k] = -A_7 A^{-1} A_4$$

$$[C_{23}^k \ C_{24}^k] = A_8 - A_7 A^{-1} A_5$$

$$G_1^k = B_1 - A_2 A^{-1} B$$

$$G_N^k = B_N - A_7 A^{-1} B$$

である。なお、 A 、 $A_1 \sim A_8$ および B 、 B_1 、 B_N は式(13)で用いた記号と同一である。

任意の枝 k について成立している式(20)を e 本の全部の枝に適用すると、次のような $2e$ 個の連立一次方程式が得られる。

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} C_{11}^1 & C_{12}^1 & C_{13}^1 & C_{14}^1 \\ \hline C_{21}^1 & C_{22}^1 & C_{23}^1 & C_{24}^1 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline C_{11}^e & C_{12}^e & C_{13}^e & C_{14}^e \\ \hline C_{21}^e & C_{22}^e & C_{23}^e & C_{24}^e \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{\bar{H}} \\ \dot{\bar{Q}} \\ \bar{H} \\ \bar{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^1 \\ G_N^1 \\ \vdots \\ G_1^e \\ G_N^e \\ \vdots \\ G_1^e \\ G_N^e \end{bmatrix} \dots \dots \dots (21)$$

ここで、式(21)左辺の係数行列については、式中に破線で示しているように行列内を4つに分割し、それらを要素とする部分行列を用い、また、右辺をベクトル G によって表示すれば、式(21)は、

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{C}}_1 & \dot{\bar{C}}_2 & \bar{C}_3 & \bar{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{H}} \\ \dot{\bar{Q}} \\ \bar{H} \\ \bar{Q} \end{bmatrix} = G \dots \dots \dots (22)$$

のように簡単に記述される。

ところで、河川網の分・合流点においては流況が複雑であり、局所的な損失水頭があるが、これは非定常性の弱い洪水などの流れでは水深に比べて無視できると仮定される。したがって、本文では分・合流点条件として水位連続の条件式を用いることにするが、これを有向グラ

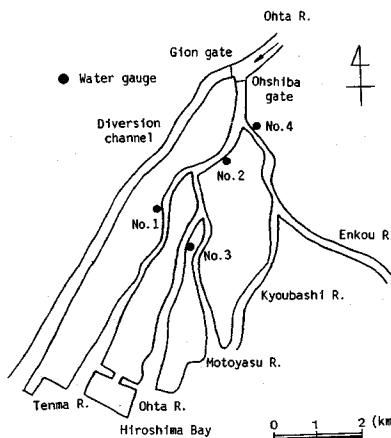


Fig.3 Sketch map of Ohta River networks.

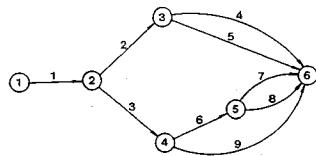


Fig.4 System graph of Ohta River networks.

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_1 \bar{D}_+^T & (\bar{C}_1 \bar{D}_0^T + \bar{C}_3 \bar{D}_0^T) & \bar{C}_3 \bar{D}_-^T & \bar{C}_2 & \bar{C}_4 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_0 & -\bar{D}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \dot{\mathbf{Q}} \\ \bar{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (37)$$

ただし、 E は S_2 行 S_2 列の単位行列である。上式において左辺の係数行列は $(2e+n)$ 行 $(2e+n)$ 列の正方非特異行列であるから、式(37)は行列演算によって容易に解くことができる。このようにして、節点に関連する未知の水理量が求められると、次に式(24)、および式(17)を用いて各枝ごとにその内部点の未知水理量を計算することができる。

以上述べたことから明らかなように、行列演算による本解析手法は、節点と枝の内部点とを形式上分離して別々に計算しているため、開水路網全体を 1 つの単位として取り扱う場合よりも行列の次元が小さくなり、行列の巨大化を避けうるという利点を有している。

4. 実河川網への適用例

本文に提示した解析手法の適用性を調べるために、実際の河川網における洪水流の計算を行った。以下に計算条件と結果について述べる。

(1) 対象河川網

一級河川太田川は Fig.3 に示すように広島デルタを北東から南西に流下し広島湾に注いでいるが、河口から

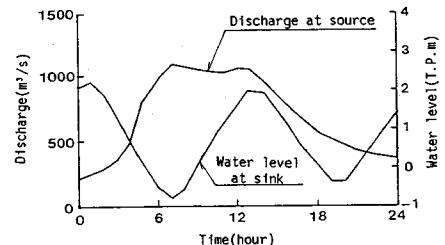


Fig.5 External boundary conditions at source and sink.

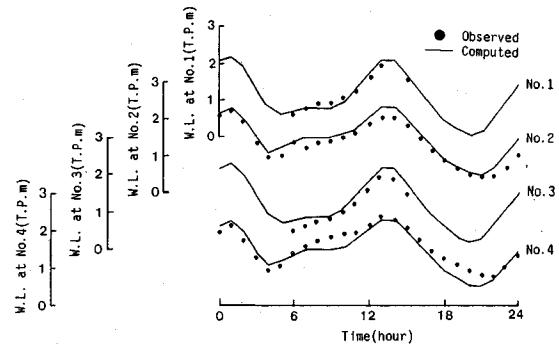


Fig.6 Comparison of observed and computed stage hydrographs.

上流 8 km 付近で大芝水門および祇園水門により太田川放水路と旧太田川に分派されている。さらに、旧太田川は 5 本の派川に分派しており、典型的な低平地河川網を形成している。上記のうち大芝水門より下流部の河川網を計算対象とした。なお、Fig.3 に示す No. 1～No. 4 の地点において平常時あるいは洪水時に水位の観測が行われている。

Fig.4 は太田川放水路を除外した河川網を大芝水門をソース、広島湾をシンク、分・合流点を中間ノードとしてグラフ表示したものである。

(2) 計算条件

解析の対象とした洪水は比較的水理観測資料が整備されている 1980 年 8 月 31 日の出水である。境界条件として使用したソースの流量ハイドログラフとシンクの水位(潮位)ハイドログラフを Fig.5 に示す。

次に、実河道の断面形状の取り扱い方であるが、横断面測量のデータより水位と流水断面積、水面幅、径深との関係をあらかじめ求めておき、基本的にはこれらの関係を用いて断面特性の評価を行った。

また、初期条件には、解析対象期間よりも 18 時間前より、潮位変動のみを与えて 18 時間の非定常計算を行って得た結果を用いた。その際、18 時間前の初期条件は定常不等流計算の結果を用いたが、これは、上流端からの流入流量を一定値とし、潮位変動のみを与えた場合の予備的な計算によって、干潮時には定常流に近い状態で

Table 1 Conditions of subbreaches.

	Run-1	Run-2	Run-3	Run-4
Number of branches	9	11	15	19
Number of nodes	6	8	12	16
Maximum numbers of internal cross-sections	32	22	16	11

あることが認められたためである。

なお、計算時間間隔 (Δt) は Courant-Friedrichs-Lowy の条件が満足されるように $\Delta t=10$ 秒とした。

(3) 計算結果

a) 実績水位との比較

すべての河道に対して同じ値の粗度係数 $n=0.025$ を用いて非定常流計算した結果のうち、観測値との比較のため 4 つの水位観測地点で計算された水位ハイドログラフを Fig. 6 に示す。この図より、上流の流入洪水と下流の潮位変動の相互作用によってもたらされる河川網内の複雑な水位変化は洪水期間全体を通してみるとかなり良く再現されているといえよう。

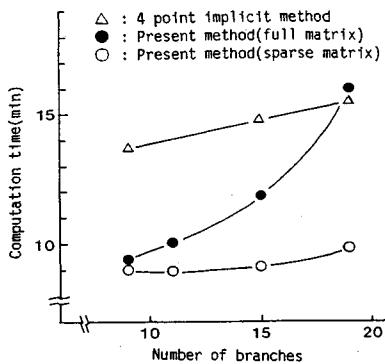
b) 河川網の分割区間数と計算時間

対象とする河道系の分割区間数、つまり河川網のシステム・グラフの枝あるいは節点の数が多くなるにしたがい、解くべきシステム・モデルの行列の次元は増大する。したがって、大規模な河川網になるほど行列演算の回数は急増し、継続時間の長い洪水流の計算ではかなりの計算時間になることが予想される。そこで、枝数が本手法の計算効率に及ぼす影響について調べるために、前述した Fig. 4 の分・合流点を中心ノードとした最も単純なシステム・グラフ (Table 1 の Run-1) の他に、河道をさらに細分割し、節点と枝を増やした 3 つのシステム・グラフ (Table 1 の Run-2~4) に対しても計算を行った。各システム・グラフの枝と節点の総数、ならびに枝に含まれる断面数のうち、最大のものを Table 1 に示す。

行列演算によって式 (37) の連立一次方程式を解くにあたって、ここでは、式 (37) 左辺の係数行列をそのまま密行列として演算処理する通常の解法の他に、実際に得られる係数行列の非常に多くの要素が零であることによじし、計算時間の短縮をはかるために、非対称疎行列の特性をもつ連立一次方程式の解法¹⁶⁾を使用した。さらに、比較のため、同様の河道システムと水理条件の下で、非定常流の基礎方程式系を直接 4 点 Implicit 法で離散化して解く方法¹⁷⁾によっても計算を行った。Fig. 7 にこれら 3 つの技法による計算時間とシステム・グラフの枝数との関係を示す。

なお、計算時間間隔（解析対象時間内の計算ステップ数）については、本手法では 10 秒 (8640 ステップ)、4 点 Implicit 法では 60 秒 (1440 ステップ) である。

この図から、河川網のグラフの枝数が少ない場合には、式 (37) をそのまま密行列として処理し解く方法と疎行

**Fig.7** Comparison of computation time.

列という係数行列が持つ特別な性質を考慮して解く方法との間に所要計算時間の差異は見られない。しかし、枝数が増大するにともない、前者の方法では計算時間が急増するのに対し、後者の方法ではわずかな計算時間の増加量にとどまっていることから、大規模な河川網になると係数行列の性質を利用した行列演算方法を検討することも重要な課題であることがわかる。また、枝数による計算時間の増加割合は、疎行列の演算処理技術を併用した本手法と従来の 4 点 Implicit 法に基礎をおく方法とでは類似している。しかし、計算時間そのものについては、後者の方が比較的大きな計算時間間隔を用いることが可能であるために、断定的な議論はできないが、本文で用いた計算時間間隔の場合においては、前者は後者の 2/3 程度であり、本手法の有用性を示唆している。

c) 河道形状のモデル化

本手法を実河川網に適用するに際して常につきまとめる問題の 1 つに河道形状の処理方法がある。前述したような実河川の縦横断面測量の資料から各断面ごとに離散的な水位とそれに対応する流水断面積および径深との関係を求めておき、これらをそのまま利用すると、不規則河道では数値解が不安定になり疑似振動を生じる恐れがある。また、一般に大規模な河川網系に対しては所要計算時間や必要記憶容量が増大するので、これらの難点を回避するための工夫が必要となる。この点に関しては河道形状の平均化が有効であると思われる。そこで、対象としている河川系において、河道の形状は整齊な単断面に近いことから、ここでは各分割河道区間にわたり水路形状を平均化した形の最も単純な長方形断面一樣水路として処理した場合について計算を行った。

この計算に用いたシステム・グラフは、河道形状が一样水路で近似しうる範囲の河道を 1 本の枝となるように分割したものであり、実際には、14 本の枝と 11 個の節点により構成されている。このシステム・グラフを用いた場合、計算時間は Fig. 7 に示した結果とほぼ同様であり河道形状の平均化による計算処理時間の差異は見ら

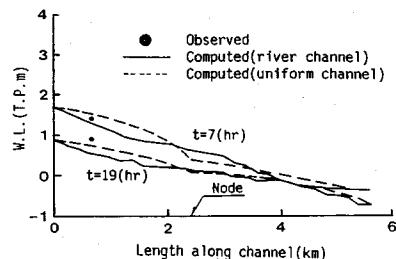


Fig.8 Water surface profile along Enkou River.

れなかった。また、Fig.3に示す4つの地点において計算水位ハイドログラフを調べたところ、水位が高いときにはFig.6の結果とほとんど同じであるが、水位が低いときには若干の差（平均化した河道形状を用いて計算した水位が平均化しないものよりも高い）が見られた。一例として、Fig.8に $t=7$ (hr)（上流端流入流量が大きく、下流端水位が低い場合）、 19 (hr)（上流端流入流量が小さく、下流端水位が低い場合）における水面形を示す。

この図より実断面形状を用いた計算結果は水面勾配の大きい場所で若干振動していることがわかる。これは、河床高および水面幅の不規則性に起因する疑似振動と考えられる。一方、河道形状を平均化した計算結果には、そのような傾向は見られず安定した解が得られている。しかし、枝の分割点（節点）に対応している上流から2 km付近で水面形が急激に変化しているが、これは、枝の接続部において枝定義量の水路幅に大きな差異があることに起因していると考えられる。したがって、このような場合にはむしろ、漸変水路として平均化した方がより適切であろうと思われるが、今後さらに詳細な検討が必要である。

5. 結 言

電子計算機を利用して低平地河川網の非定常流計算を行う際、計算過程全体の統一性が確保されていると、計算機のプログラミングを標準化することができるので、きわめて好都合である。このような観点から、本文では、システム・モデルを行列方程式の形に定式化し、これを用いた実用的な河川網非定常流の行列解析法について述べた。得られた結果をまとめると以下のようである。

(1) 開水路非定常流の基礎方程式を不等距離間隔に対して Galerkin 法により離散化し、時間に関しては陰形式の後退差分で離散化を行い、開水路網のグラフの枝方程式と節点方程式からなるシステム・モデルを行列とベクトルによって系統的に定式化した。

(2) 開水路網の幾何学的連結構造は有向グラフのトポロジー的性質を利用して表現されているので、得られ

たシステム・モデルの行列表示は簡単であり、一般性が高い。

(3) 提示した行列演算による水理解析法はきわめて系統的であり、しかも、形式上、節点と枝の内部点とが分離して計算されるので、大規模な河川網系に対しても行列の次元の巨大化が避けられる利点がある。

(4) 河川網のグラフが複雑になり、行列の大きさが増大しても、行列演算にあたって非対称疎行列の処理技術を併用すれば、本解析手法による計算時間の増加は小さく、効果的である。

(5) 本計算法を広島デルタの感潮河川網の洪水流解析に適用した結果、洪水期間全体を通して観測水位のハイドログラフの再現性は良好であり、本文で示した行列解法の有効性が確認された。

(6) 各枝を表わす河道部分を長方形断面一様水路として処理すれば、実断面形状をそのまま用いるよりも数値的に安定した解が得られる利点がある反面、枝接続点が大きな断面変化部となる場合には、詳細な検討が必要である。

最後に、本研究にあたり貴重な資料を提供していただいた建設省太田川工事事務所ならびに広島県土木建築部河川課の関係各位に謝意を表します。なお、計算は広島大学総合情報処理センターの計算機 HITAC-680H (34MIPS) で行った。

参 考 文 献

- 1) 神田 徹・井澤元博：開水路網定常流のマトリックス解析法、土木学会論文報告集、第 262 号、pp.25～40, 1977.
- 2) 常松芳昭：定常開水路網流れの解析法、広島大学工学部研究報告、第 34 卷、第 2 号、pp.201～209, 1986.
- 3) Stoker, J.J.: Water waves, Interscience Publishers, Inc., New York, pp.451～509, 1957.
- 4) 早瀬吉雄・角屋 瞳：分合流を含む不定流計算法—低平水田地帯の流出解析に関する研究(Ⅱ)—、農業土木学会論文集、第 67 号、pp.37～44, 1977.
- 5) Quinn, F.H. and Wylie, E.B.: Transient analysis of the Detroit river by the implicit method, Water Resour. Res., Vol.8, No.6, pp.1461～1469, 1972.
- 6) Fread, D.L.: Technique for implicit dynamic routing in rivers with tributaries, Water Resour. Res., Vol.9, No.4, pp.918～926, 1973.
- 7) Gunaratnam, D.J. and Perkins, F.E.: Numerical solution of unsteady flows in open channels, Hydrodynamics Laboratory Report No.127, Dep. of Civil Eng., Mass. Inst. of Technol., pp.106～121, 1970.
- 8) Wood, E.F., Harley, B.M. and Perkins, F.E.: Transient flow routing in channel networks, Water Resour. Res., Vol.11, No.3, pp.423～430, 1975.
- 9) Joliffe, I.B.: Computation of dynamic waves in channel networks, J. Hydraulic. Eng., ASCE, Vol.110, No.10, pp.1358～1370, 1984.

- 10) 岩佐義朗・綾 史郎・山本正幸：ネットワーク状水路の水理解析，京都大学防災研究所年報，第19号B-2，pp.201～219，1976.
- 11) 土木学会編：水理公式集，昭和46年改訂版，pp.192～193，1971.
- 12) 常松芳昭・金本 満：開水路網非定常流の行列解析，広島大学工学部研究報告，第38巻，第1号，pp.95～103，1989.
- 13) 前出8).
- 14) 前出11).
- 15) 小野寺力男：グラフ理論の基礎，森北出版，1968.
- 16) Gupta, S.K. and Tanji, K.K.: Computer program for solution of large, sparse, unsymmetric systems of linear equations, Int. J. Num. Methods Eng., Vol.11, No.8, pp.1251～1259, 1977.
- 17) 神田 徹・辻 貴之：低平地河川網における洪水流の特性とその制御，建設工学研究所報告，第21号，pp.105～132，1979.

(1990.9.5・受付)

GRAPH-THEORETIC ANALYSIS OF GRADUALLY VARIED UNSTEADY FLOWS IN RIVER CHANNEL NETWORKS

Mitsuru KANEMOTO and Yoshiaki TSUNEMATSU

Discretizing the linearized characteristic equations of gradually varied unsteady flows using the backward difference method in time and the Galerkin's method in space, a numerical model for a single channel is first set up and then the system model for channel networks in flat land is graph-theoretically formulated in terms of connection matrices. This formulation is developed to facilitate the systematical computation on digital computers for large-scale complex networks. The numerical results obtained by the present method are compared for verification to observation data. The agreement between the computed and observed water levels for a flood time is satisfactory. It is further shown that this method is more advantageous than the 4-point implicit method in regard to the time required in making the computations.