土木学会論文集 No. 429／II-15, pp. 47~56, 1991. 5

放流量系列同時分布を用いた貯水池系の利水機能評価の研究

鈴木正人*・長尾正志**

本論文では，まず利水用貯水池から放流される実放流量，溢流量，さらにこれらを合わせた総放流量の継続した系列について，同時分布を導く手法を提案した．さらにこれらを用いることで，貯水池群の総合操作の基礎となる直列・並列持続された貯水池系の利水機能評価関数の設定および有効な操作方法の選択などの手法を示すとともに，計算例として直列貯水池系の操作方法・容量配分等に対する検討を行った．

Keywords : *stochastic reservoir theory, reservoirs system, joint probability of discharge-series*

1. 本研究の概要

著者らは，すでに相関離散分布流量を受ける貯水池を，貯留と放流からなる2段階の推移を考えた推移確率行列を用いてモデル化し，貯水量を対象として定常状態における貯水量分布の導出方法を示した[1]．また，貯水量状態から間接的に放流量特性を導き，貯水池の利水機能を確率的に評価する手法[2]を提案してきた．

本研究では，これらの拡張として，まず，実放流量，溢流量，さらに実放流量と溢流量を合わせた総放流量系列のそれぞれについて，一次の自己相関性を考慮した同時分布（以後，放流量同時分布と呼ぶ）が導けることを示した．ついで，放流量同時分布に対して，利水機能を評価する関数を設定し，設定された評価関数により利水上有効な操作法や，目標放流量の検討を行った．

さらに，本研究では，貯水池系の利水機能評価を行う手法を示した．貯水池群を評価の対象とした従来の研究には，高棹らの水量制御という観点から，DP論的に取り扱った研究[3]や，神田による並列関係にある二つの貯水池を等価の単一の貯水池に置換した取り扱い[4]，さらに，放流量同時分布を考慮して水量，水質の両面から利水システムの安全度を評価した研究として，小尻らの論文[5]などがあげられる．しかし，これらの研究は，計算上の制約がかなり存在し，溢流を伴う放流量という形で直接評価対象とした研究ではない．そこで，本研究は，放流量の同時分布を用いて，貯水池群の総合操作の際に，最も基礎となる直列接続，および並列接続された貯水池の利水機能評価の手法を示すとともに，直列接続の貯水池系において若干の適用計算を行い，上流と下流の貯水容量配分などに対する検討を行った．

* 学生会員　工修　名古屋工業大学工学研究科博士後期課程学生（〒466　名古屋市昭和区御器所町）
** 正会員　工博　名古屋工業大学教授　工学部社会開発工学科

2. 2段階推移モデルの拡張

(1) 貯水量推移の貯水量方程式による表現

利水用貯水池から下流への放流の内訳を考える．これには，管理者が意図的に放流する放流分（以下，実放流量 R と呼ぶ）と，貯水池が満水になり，やむをえず溢流してしまう放流分（溢流量 L），さらにこれらを合わせたもの（総放流量 D）の3つが考えられる．ここで，これらの放流量は，貯水量（Z），流入量（Q），および目標放流量（M），さらに貯水池条件である貯水池容量（K），操作方法などにより，決定される．そこで，放流量と流入量，貯水量の関係を，従来用いてきた溢流量を考えない場合と，今回提案する溢流量を勘案した場合のそれぞれについて，貯水量方程式の形で表現する．なお，貯水量，流入量，放流量は，いずれも，共通した離散化単位を用いて量的，時間的に離散化されているものとする．

また，あい隣る離散時点を t, $t+1$ で表し，これらはそれぞれ先行する期間長 Δt, $\Delta(t+1)$ を持つものとする．

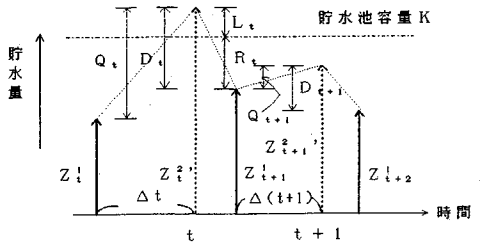
a) 溢流量を考慮しない場合[2]

まず，時点 t と継続する時点 $t+1$ の貯水量の関係を連続式で表わす．Δt 期間の期首の貯水量 Z_t^1 は，その期間の総流入量 Q_t を受けて，期末の貯水量 Z_t^2 へと推移する．この推移を2段階推移モデルでは貯留推移と呼んでいた．この段階で，貯水池容量 K の制約による貯留可能性が判断された．すなわち，この推移は次式で表現された．

$$Z_t^2=\min(Z_t^1+Q_t, K) \quad \cdots\cdots (1)$$

上式で，min (A, B) は，AとBのうち小さい方を意味する．

つぎに，Δt 期間の期末の貯水量 Z_t^2 は，期間の最後に実放流量 R_t を放流することにより，$\Delta(t+1)$ 期間の期



図—1　拡張された2段階推移モデルの概念図

首の貯水量 Z_{t+1}^1 へと推移する．この推移を2段階推移モデルでは，放流推移と呼んでいた．R_t が Z_t^2 と Q_t の関数であるから，$R_t(Z_t^2, Q_t)$ と表現すれば，放流推移は次式で表わされた．

$$Z_{t+1}^1 = Z_t^2 - R_t(Z_t^2, Q_t) \cdots\cdots (2)$$

一般に放流操作方法は R_t の関数形で表現される．例えば無節水操作（貯水量が目標放流量以上であれば目標放流量を，目標放流量未満であれば，貯水量全部を放流して空に推移する操作方式）であれば，次式のように関数を設定すればよい．

$$R_t = M \qquad (Z_t^2 \geqq M)$$

$$R_t = Z_t^2 \qquad (Z_t^2 < M) \cdots\cdots (3)$$

b）　溢流量を考慮する場合

溢流量を考慮した場合の貯水量推移の概念を図—1[6]に示す．

なお，本来，期間 Δt と $\Delta(t+1)$ は連続するものであるが，放流推移を分かりやすく表記するため，両期間に間隔を設けて表現してある．

溢流量を勘案するために，貯留推移において，まず式（1）の貯水池容量による貯留可能性の条件を一旦除外し，貯水池容量がきわめて大きいものとし，溢流分も貯留できるとしておく．つぎに，放流推移において，実放流量に溢流量を加算した量を一度に放流するように考える．すなわち，溢流分も貯留可能とした貯水量を $Z_t^{2'}$ とすると，貯留推移は次式で表される．

$$Z_t^{2'} = Z_t^1 + Q_t \cdots\cdots (4)$$

$$Z_t^2 = Z_t^{2'} - L_t(Z_t^{2'}) \cdots\cdots (5)$$

ただし，L_t の関数表現は次式のとおりである．

$$L_t = 0 \qquad (K \geqq Z_t^{2'})$$

$$L_t = Z_t^{2'} - K \quad (K < Z_t^{2'}) \cdots\cdots (6)$$

さて，溢流量を考慮した貯水量方程式は基本的に，式（2），（4）および式（5）により表現される．しかし，その際に Z_t^1，$Z_t^{2'}$，さらに Z_t^2 の3状態の推移を考えねばならず煩雑であるので，本研究では，総放流量という概念を導入して，これを Z_t^1 と $Z_t^{2'}$ の2段階の推移で表現する．すなわち，$Z_t^{2'}$ から Z_{t+1}^1 への推移を，次式で表現する．

$$Z_{t+1}^1 = Z_t^{2'} - L_t(Z_t^{2'}) - R_t(Z_t^{2'}, Q_t)$$
$$= Z_t^{2'} - D_t(Z_t^{2'}, Q_t) \cdots\cdots (7)$$

もちろん，$D_t = L_t + R_t$ である．なお，R_t の関数表現には，若干の補正が必要である．たとえば無節水操作の場合，式（3）は次式のように補正される．

$$R_t = M \qquad (Z_t^{2'} \geqq M)$$

$$R_t = Z_t^{2'} \qquad (Z_t^{2'} < M) \cdots\cdots (3)'$$

一般に $K > M$ であるから，式（6）と式（3）′より，D_t の関数表現は，次式のようになる．

$$D_t = M + (Z_t^{2'} - K) \quad (K < Z_t^{2'})$$

$$D_t = M \qquad (K \geqq Z_2^{2'} \geqq M)$$

$$D_t = Z_t^{2'} \qquad (M > Z_t^{2'}) \cdots\cdots (8)$$

結局，溢流を考慮した場合の貯水量推移が，式（4），式（7）を用いて，表現できた．

（2）　2段階推移モデルの拡張

ところで，従来の2段階推移モデル[2]は，式（1），（2）に対応するものであったが，以下では，総放流量を対象として，式（4），（7）に対応した拡張された2段階推移モデルの形で考えていく．

a）　貯留推移

式（4）の貯水量方程式に対応して，貯水量 Z_t^1 の状態確率から，$Z_t^{2'}$ の状態確率への推移を行列形式で表現する．いま，貯水量 Z_t^1 と先行する期間流入量 Q_{t-1} との同時確率ベクトルを $\{H\}_t^1$ とする．$\{H\}_t^1$ の要素を hij_t^1 とすると，n を生起流入量の上限と記して，hij_t^1 は次式で表現される．

$$hij_t^1 = Prob[Z_t^1 = j,\ Q_{t-1} = i]$$
$$(j = 0, 1, \cdots, K\ ;\ i = 0, 1, \cdots, n) \cdots\cdots (9)$$

また，貯水量 $Z_t^{2'}$ と先行する期間流入量 Q_t との同時確率ベクトルを $\{H\}_t^{2'}$ とする．$\{H\}_t^{2'}$ は，次式で表記される要素，huv_t^2 からなる．

$$huv_t^2 = Prob[Z_t^{2'} = v,\ Q_t = u]$$
$$(v = 0, 1, \cdots, K+n;\ u = 0, 1, \cdots, n) \cdots\cdots (10)$$

一般に $\{H\}_t^1$ から，$\{H\}_t^{2'}$ への推移は，貯留推移確率行列Gを用いて，次式で表現できる．

$$\{H\}_t^{2'} = \{H\}_t^1 \cdot G \cdots\cdots (11)$$

ここに，確率行列Gの r 行，s 列の要素 Grs ($r = 1, 2, \cdots, (K+1) \times (n+1)$; $s = 1, 2, \cdots, (K+n+1) \times (n+1)$) は，流入量の条件付き分布 gij ($\equiv Prob[Q_t = j \mid Q_{t-1} = i]$) あるいは0から構成される．すなわち，$hij_t^1$ に対応する行，huv_t^2 に対応する列には，各々つぎの要素が入る．

$$Grs = gi(v-j)$$
$$r = j \times (n+1) + i + 1,$$
$$s = v \times (n+1) + u + 1,$$
$$n \geqq u = v - j \geqq 0$$
$$Grs = 0$$

上記以外……(12)

ただし, i, j および v, u の存在範囲は, それぞれ, 式(9), (10) に準ずるものである.

なお, v および j の存在範囲からわかるように, 貯留推移確率行列Gは正方行列ではない. これは, 貯留以前の貯水量 Z_t^1 の上限が貯水池容量 K であるのに対し, 貯留後の貯水量 $Z_t^{2'}$ は, 仮想的に溢流量をも貯留できるとしたので, その上限が貯水池容量 K に流入量上限 n を加算した $K+n$ になっているからである.

b) 放流推移

つぎに, 式(7)の貯水量方程式に対応して, 貯水量 $Z_t^{2'}$ の状態確率 $\{H\}_t^{2'}$ から Z_{t+1}^1 の状態確率 $\{H\}_{t+1}^1$ への推移を放流推移行列Rを用いて表現する. なお, $\{H\}_t^{2'}$, $\{H\}_{t+1}^1$ は, それぞれ式(9), (10) で定義した要素からなっている. $\{H\}_t^{2'}$ から $\{H\}_{t+1}^1$ への推移は, 放流推移行列Rにより次式で表現される.

$$\{H\}_{t+1}^1=\{H\}_t^{2'}\cdot \mathrm{R} \quad \cdots\cdots(13)$$

Rの s 行, r 列の要素 $\mathrm{R}sr$ ($s=1,2,\cdots,(K+n+1)\times(n+1)$; $r=1,2,\cdots(K+1)\times(n+1)$) は, 総放流量 $D_t(v, u)$ の値に応じて, 1または0で, 構成される. なぜならば, 状態 $[Z_t^{2'}=v, Q_t=u]$ の推移先は, 状態 $[Z_{t+1}^1=v-D_t(v, u), Q_t=u]$ であり, $D_t(v, u)$ を, 各 v, u に対して一意に確定する限りは, 推移先は一意に決まる. そこで, 推移が可能ならば要素に1が, 不可能ならば0が対応するからである. すなわち, $huv_t^{2'}$ に対応する行, hij_{t+1}^1 に対応する列には, 各々つぎの要素が入る.

$Rsr=1$

$r=j\times(n+1)+i+1,$

$s=v\times(n+1)+\mathrm{u}+1$

$j=v-D_t(v, u)$ かつ $i=u$

$Rsr=0$

上記以外……(14)

ただし, i, j および, u の存在範囲は, それぞれ, 式(9), (10) に準ずる.

c) 貯留推移と放流推移の合成

ここでは, 式(11)の貯留推移と, 式(13)の放流推移を合成して, 直接 $\{H\}_t^{2'}$ から $\{H\}_{t+1}^{2'}$ への推移を表現する. まず, 式(11)の t を $t+1$ と変えると, 次式が成り立つ.

$$\{H\}_{t+1}^{2'}=\{H\}_{t+1}^1\cdot \mathrm{G}$$

ついで, 上式の $\{H\}_{t+1}^1$ に, 式(13)を代入して, 次式が得られる.

$$\{H\}_{t+1}^{2'}=\{H\}_t^{2'}\cdot \mathrm{S}$$

$$\mathrm{S}\equiv \mathrm{R}\cdot \mathrm{G} \quad \cdots\cdots(15)$$

ここにSは, $(K+n+1)\times(n+1)$ 次の正方行列である. いま, 期間の期末において流入量を勘案した定常状態における各貯水状態確率(以後単に貯水量定常分布と呼ぶ)を $\{W\}^{2'}$ とすると, $\{W\}^{2'}$ は, つぎの要素から構成される.

$$\{W\}^{2'}\equiv\{\cdots wij^{2'}\cdots\}$$

$$wij^{2'}=Prob[Z^{2'}=j, Q=i]$$

$$(i=0,1,\cdots,n; j=0,1,\cdots,n=0,1,\cdots,K+n+1) \quad \cdots\cdots(16)$$

具体的な計算としては, 式(15)の $\{H\}_{t+1}^{2'}$ に $\{H\}_t^{2'}$ を代入した次式の連立方程式を解いて, 期末の貯水量定常分布 $\{W\}^{2'}$ が求められる.

$$\{W\}^{2'}=\{W\}^{2'}\cdot \mathrm{S}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{K+n} wij^{2'}=1 \quad \cdots\cdots(17)$$

3. 放流量同時分布の導出

以下では, 総放流量 D_t の周辺分布, 同時分布を求める手法を示す. なお, その成分である実放流量 (R_t), 溢流量 (L_t) に関する計算も, 同様な手順で行うことができる.

(1) 周辺分布の導出

まず, 総放流量 D_t の生起確率を求めることは, D_t を関数で表現した際の変数である $Z_t^{2'}$ と Q_t の同時生起の確率を求めることに他ならない. すなわち,

$$Prob[D_t=D(i, j)]=hij_t^{2'} \quad \cdots\cdots(18)$$

である. ここで, 関数 $D(i, j)$ は, 貯水量, 流入量の各組合せに対して, 種々の値をとる. そこで, 総放流量の周辺分布を求めるには, 対応する $hij_t^{2'}$ について次式のように, 総放流量が同じ値となる場合の総和をとる.

$$Prob[D_t=X]=\sum hij_t^{2'}$$

$$(i=0,1,\cdots,n; j=0,1,\cdots,K+n)$$

($\sum$ は, $D(i, j)=X$ を満たす i, j のすべての組合せを意味する) ……(19)

もちろん定常状態に対する, 総放流量周辺分布を求めるには, 上式の $hij_t^{2'}$ に式(17)で求められる $wij^{2'}$ を代入すればよい.

(2) 同時分布の導出

以下では, 継続した2時点での放流量の同時分布を求める. さて, 式(15)で, $\{H\}_t^{2'}$ から, $\{H\}_{t+1}^{2'}$ への推移を推移確率行列Sを用いて表式化したが, この行列Sの各要素の意味を考えてみよう. 例えば, $hij_t^{2'}$ 行, $huv_{t+1}^{2'}$ 列に対応する要素 (以後 $\mathrm{S}(i, j)(u, v)$ と呼ぶ) は, 以下の意味を持つ.

$\mathrm{S}(i, j)(u, v)=(Z_t^{2'}=j, Q_t=i)$ から,

$(Z_{t+1}^{2'}=v, Q_{t+1}=u)$ へ推移する確率

$$=Prob[(Z_{t+1}^{2'}=v, Q_{t+1}=u)|(Z_t^{2'}=j, Q_t=i)]$$

$$=Prob[D_{t+1}=D(u, v)|D_t=D(i, j)] \quad \cdots\cdots(20)$$

また, 式(18)と式(20)を乗じたものは, 次式の意味を持つ.

表－1　総放流量 D の同時分布と周辺分布（平均 2.400，分散 0.872，自己相関係数 0.656）

D_t \ D_{t+1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	P [D]	R	L
0	0.0166	0.0182	0.0087	0.0028	0.	0.	0.	0.	0.	0.0463	0	0
1	0.0172	0.0585	0.0469	0.0225	0.	0.	0.	0.	0.	0.1452	1	0
2	0.0086	0.0449	0.0775	0.0641	0.	0.	0.	0.	0.	0.1951	2	0
3	0.0038	0.0236	0.0620	0.5012	0.0047	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.5974	3	0
4	0.	0.	0.	0.0049	0.0031	0.0014	0.0003	0.0000	0.0000	0.0098	3	1
5	0.	0.	0.	0.0015	0.0016	0.0012	0.0004	0.0001	0.0000	0.0047	3	2
6	0.	0.	0.	0.0002	0.0004	0.0004	0.0003	0.0001	0.0000	0.0014	3	3
7	0.	0.	0.	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0002	3	4
8	0.	0.	0.	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3	5

$$Prob[D_{t+1}=D(u,v), D_t=D(i,j)]$$
$$=Prob[D_{t+1}=D(u,v)|D_t=D(i,j)]$$
$$\times Prob[D_t=D(i,j)]$$
$$=S(i,j)(u,v)\times hij_t^{2'} \cdots\cdots (21)$$

ところで，周辺分布の場合と同様に，関数 $D(u, v)$，$D(i, j)$ も，貯水状態，流入量の各組合せに対して，さまざまな値を取る．そこで，放流量の同時分布は，同じ値となる場合を，次式のように総和すれば求められる．

$$Prob[D_{t+1}=Y, D_t=X]=\sum Prob[D_{t+1}$$
$$=D(u,v), D_t=D(i,j)]=\sum\{S(ij)(uv)\times hij_t^{2'}\}$$
$$(i, u=0,1,\cdots,n; j, v=0,1,\cdots,K+n)$$

$\sum$ は，$D(i,j)=X, D(u,v)=Y$ を満たすすべての i, j, u, v の組合せ）……(22)

なお，定常状態における同時分布を求めるには，$hij_t^{2'}$ に，定常分布 $wij^{2'}$ を代入すればよい．

（3）　適用計算例

貯水池容量 $K=15$，目標放流量 $M=3$ の貯水池条件で，流入量分布として，上限 $n=8$，形状母数 $a=0.3$，自己相関係数 $\rho=0.6$ の相関二項分布[1]（平均 2.4，分散 1.68）を用いた場合の，定常状態における総放流量の同時分布，および周辺分布を表－1 に示す．

表－1 には，総放流量 D と同時に，D に対応する実放流量 R と溢流量 L の値も併記している．なお操作方法は，式（8）に示した無節水操作を採用した．表中において，0. =0 であり，そのような確率は存在しないことを意味するが，0.0000≠0 で，そのような確率は微小ながら存在することを意味する．

表－1 をみると，同時分布における最大値は，$Prob[D_{t+1}=3, D_t=3]$ で，その値は 0.5012 であることから，約 5 割は，溢流なしに目標放流量を継続して放流できることがわかる．また，$D_t=4$ 以上と $D_{t+1}=2$ 以下との同時確率は存在しないが，これは，$D_t=4$ 以上では溢流が生じており，その時の貯水量は満水であるから，それに引き続く期間では，必ず目標放流量以上の放流が可能なことを示す．

同様に，$D_t=2$ 以下と $D_{t+1}=4$ 以上の同時確率も存在しないが，これは，$D_t=2$ 以下では，放流し尽くすことにより期間 $\Delta(t+1)$ の期首の貯水量が 0 になり，生起流入量の上限が貯水池容量未満であることから，期間 $\Delta(t+1)$ では溢流が生じないからである．

総放流量の基礎統計量は，平均＝2.400，分散＝0.872，自己相関係数＝0.656 であり，流入量の積率と比較すると，定常状態なので，当然ながら平均値は一致する．分散は，流入量の約半分となっており，貯水池が入力の変動を減少させる効果が大きいことがわかる．自己相関係数も総放流量の方が大きく総放流量が安定していることが示唆される．また，得られた同時分布が D_t と D_{t+1} に関して対称でないことに注目すべきで，ここに貯留による流量調製効果が認められる．

4.　放流量同時分布を用いた利水機能評価

（1）　利水機能評価関数[7]

放流量の同時分布を用いて利水機能評価関数を設定する．

a）　目標充足期待値

目標放流量が時間的に継続して満たされる確率に目標放流量を乗じたものを目標充足期待値として，次式のように定義する．

$$目標充足期待値=M\times Prob[R_{t+1}=M, R_t=M] \cdots\cdots (23)$$

上式の意味は，つぎのとおりである．すなわち，ある期間において目標放流量が満たされた場合，安定した取水という観点からは，引き続く期間においても目標が満たされるかどうかが問題となる．$Prob[R_{t+1}=M, R_t=M]$ は，期間 Δt で目標放流量が満たされるとともに，引き続く期間 $\Delta(t+1)$ でも目標放流量が満たされる確率を意味するが，この値は，目標放流量を大きくするにつれて小さくなる傾向にある．この目標放流量と充足確率のトレードオフ関係を考慮して，上記期待値が大きいほど，利水上安定した取水ができるといえよう．

b）　期待自乗不足率

ここでは，連続した期間における目標放流量に対する不足量の自乗の期待値を，期待自乗不足率として次式で

定義する．

$$期待自乗不足率=\sum_{X,Y=0}^{M}[\{(M-X)+(M-Y)\}/2M]^2 \times Prob[R_{t+1}=X, R_t=Y] \cdots\cdots(24)$$

上式の意味は，不足量の自乗の期待値をとることで，水不足に対して厳しさの重み付けをし，厳しさの度合を表現している．この値が小さいほど，利水上有効なことを意味するが，もちろんその比較は同じ目標レベルについて行われるべきものであろう．

c） 各種基礎統計量

もちろん，放流量の同時分布から得られる各種基礎統計量も利水機能評価量として用いることができよう．例えば，実放流量の平均値は大きいほど，多くの量を取水できることを意味し，実放流量の分散が小さければ，取水量の変動が小さく安定した取水ができることであろう．

また，実放流量の平均値にそれほど差がない場合には，その自己相関係数が大きいほど取水量が安定していると判断できよう．したがって，これら統計量も状況に応じて使い分けられるべき指標であると思う．

ここで，設定した評価関数はあくまでもそのうちの一つに過ぎないが，各種評価の際に，放流量の同時分布，周辺分布は基礎資料として有用な情報を与えるものと考えている．

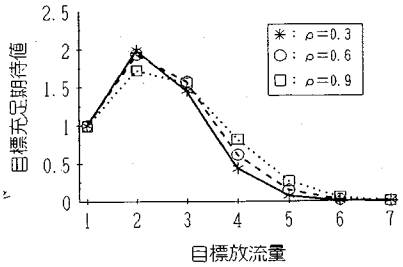
また，溢流量の同時分布を用いれば，利水だけでなく，治水機能の評価上にも有効であろう．

（2） 適用計算例

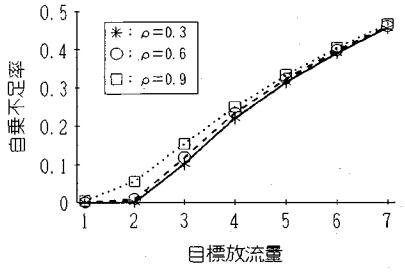
a） 目標放流量と目標充足期待値，自乗不足率の関係

流入量分布に，上限 $n=8$，形状母数 $a=0.3$，相関係数 $\rho=0.3, 0.6, 0.9$ の相関二項分布（平均 2.4，分散 1.68）を用いる．貯水池容量 $K=15$ の条件で，目標漂流量 M を 1～7 とした場合の定常状態における，目標放流量と目標充足期待値との関係を図―2に，目標放流量と期待自乗不足率との関係を図―3 に示す．操作方法はいずれも無節水操作とした．

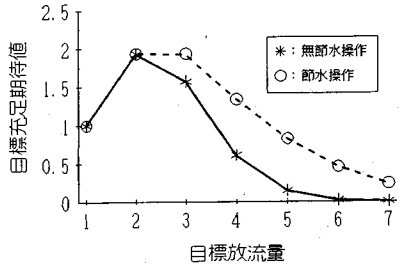
まず，図―2 によると，どの相関係数の場合も，$M=2$ で目標充足期待値が最大になっているが，放流量の離散化量との関連があるので，$M=2$ が最適と速断することは問題である．さらに離散化量を小さく取るか，内挿を行うことで最適に近い目標放流量を選定することは可能であろう．いずれにしろ，定常状態の計算であるので初期貯水量による利水補給は考慮されていない．したがって，放流量の絶対量そのものは流入量平均以上は期待できない．結論的には，この場合，最適な目標放流量は流入量平均である 2.4 の近傍にあると思われる．つぎに，相関係数の影響だが，$M=2$ の場合は相関関係が大きいほど目標充足期待値が小さくなっているが，目標放流量が 3 以上では逆に相関係数が大きいほど目標充足期待値が大きくなっている．これは，流入量分布に量の少ない方に歪んだ分布形を採用しているので，目標放流量が小さい（流入量平均以下）と，量の少ない方の持続性が利水上不利に働くためであろう．逆に目標放流量が大きいと，目標充足期待値は目標が満たされる度合だけを評価の対象としているので，量の大きい方の持続性が，わずかであっても，目標を充足する確率を増加させるからであろう．



図―2 相関係数の相違を考慮した目標放流量と目標充足期待値の関係

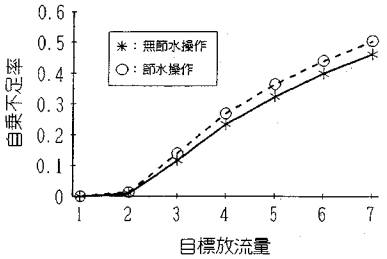


図―3 相関係数の相違を考慮した目標放流量と自乗不足率の関係

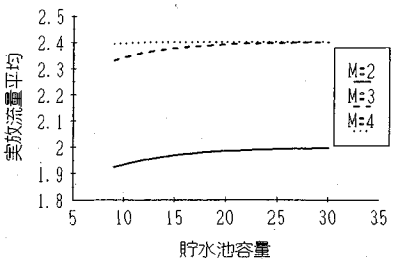


図―4 操作方法の相違を考慮した目標放流量と目標充足期待値の関係

つぎに，図―3 で自乗不足率と目標放流量との関係を調べる．全体的にみると目標放流量が 2 以上の範囲では，ほぼ線形的に単調増加している．相関関係の影響は，どの目標放流量の場合も相関が強いほど自乗不足率も大きく，利水上厳しい状況となることがわかる．これは，先の目標充足期待値とは異なり，放流量全体について評価すると，渇水期流況の大きな特性である流況の持続性の



図—5　操作方法の相違を考慮した目標放流量と自乗不足率の関係



図—6　目標放流量の相違を考慮した貯水池容量と実放流量平均の関係

強さが深刻な水不足を招来するためと予想される．

さらに操作方法の影響をみるために，図—2,3と同じ条件で相関係数$\rho=0.6$とし，節水操作（期末の貯水量が目標放流量以上であれば目標放流量を放流し，目標放流量未満であれば放流しないという操作）を行った場合の目標放流量と目標充足期待値との関係を図—4に，自乗不足率との関係を図—5に示す．両図とも比較のために，無節水操作を行った場合の値も併記している．目標充足期待値は，節水操作を行った場合の方が大きくなっており，目標放流量だけに着目した場合には節水操作の方が有効であり，その度合は目標放流量が大きいほど強いようだ．しかし，自乗不足率は節水操作の方が大きくなっており，放流量全体からみれば無節水操作の方が適当であろう．このように，評価関数により，有効な操作方法が異なるので，どの評価関数を重要視するかによって操作方法を選択すべきであろう．

b）　貯水池容量と実放流量平均との関係

最後に，貯水池容量と実放流量平均との関係を図—6に示す．流入量分布に，上限$n=8$，形状母数$a=0.3$，相関係数$\rho=0.6$の相関二項分布を用い，目標放流量$M=2,3,4$で，操作方法は無節水操作とした．

目標放流量が2と3の場合は，貯水池容量が大きくなるほど，実放流量平均も大きくなる．しかしその増加の割合は貯水池容量が大きくなるほど小さくなり，目標放流量が2の場合は2に，3の場合は流入量平均である2.4に漸近している．流入量，目標放流量，貯水池建設経費などとの兼ね合いから，効率的な貯水池容量の上限の存在が示唆されているといえよう．なお目標放流量が4の場合は，ほとんど貯水池容量の影響はないが，これは目標放流量が流入量平均に比して大きいため，ほとんど貯留されないためであろう．

5.　貯水池系の利水機能評価

3. で示した放流量の同時分布を基礎として，単一の貯水池だけでなく，複数の貯水池から構成される貯水池系の利水機能評価が可能になる．本研究では，貯水池系を構成する際に最も基本となる2つの貯水池がそれぞれ直列持続，並列持続された場合についてその手法を示す．貯水池系が複雑になっても，これら直列，並列の2つの関係を順次拡張していくことにより，総合的に貯水池系に対する利水機能評価が可能であろう．

（1）　直列接続された貯水池系

同一河川の上下流に，貯水池が各一個ある，いわゆる直列持続された貯水池系を考える．上流側の貯水池を貯水池A，下流側の貯水池を貯水池Bとし，例えば貯水池Aへの流入量はQ_A，貯水池Bの実放流量はR_Bといったように添え字をつけて表記する．

まず，最初に，A～B流域間に残流域がなく，上流の貯水池で取水もない最も単純な場合を考えよう．この場合の概念図を図—7に示す．貯水池Aに流入量Q_Aが流入し，貯水池Aによって調整された後，後放流量D_Aが放流される．残流域がないので貯水池AとBとの間では流入がなく，貯水池Aの放流量D_Aがそのまま貯水池Bに流入する．すなわち，

$$Q_B=D_A \quad \cdots\cdots(25)$$

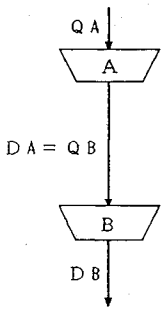
である．ここで，便宜的にA～B間の流下時間を0とすれば，$Q_{Bt}=D_{At}$であり，流下時間を考慮に入れるなら，例えば単位時間分の流下時間がかかるとすれば，$Q_{Bt+1}=D_{At}$とすればよい．もちろん，これら時間的問題は非定常状態を対象とする場合にのみ必要で，先に示した適用例のように定常状態を計算の対象にしているときは不必要である．

いま，D_Aの条件付き分布は，式（19）の周辺分布と，式（22）の同時分布より次式のように求められる．

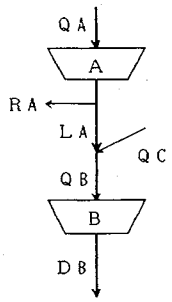
$$\begin{aligned}&Prob[D_{t+1}=Y|D_t=X]\\&=Prob[D_{t+1}=Y,D_t=X]\div Prob[D_t=X]\\&=\sum\{S(ij)(uv)\times hij_t^{2'}\}\div\sum hij_t^{2'}\\&(i,u=0,1,\cdots,n;j,v=0,1,\cdots,K+n)\end{aligned}$$

（$\sum$は，$D(i,j)=X,D(u,v)=Y$を満たすすべてのi,j,u,vの組合せ）$\cdots\cdots(26)$

$Q_B=D_A$および，D_Aの条件付き分布を用いて，貯水池Bに対する2段階推移モデルの貯留推移行列G_Bを作成し，直列接続の貯水池系をモデル化することができる．系の利水機能評価は最下流である貯水池Bの実放流量



図—7 直列持続の概念図その1



図—8 直列持続の概念図その2

R_B を用いればよいであろう．

つぎに，残流域があり，かつ貯水池 A において取水を行い，取水後の流量を下流に放流する場合を考える．この場合の概念を図—8 に示す．まず，貯水池 A に流入量 Q_A が流入し，貯水池によって放流操作が行われ，実放流量 R_A が取水される．下流には，取水後の放流量，すなわち溢流量 L_A が放流される．さらに残流域による流入量 Q_C が加算されて貯水池 B の流入量 Q_B となる．すなわち次式が成り立つ．

$$Q_B=L_A+Q_C \quad \cdots\cdots(27)$$

ここで，L_A すなわち溢流量は，放流操作により決まるものであり，自然流況である Q_C との間に相互相関はないと仮定すれば，Q_B の同時分布は，L_A と Q_C の同時分布を次式のようにたたみこみを行うことで，求められる．

$$Prob[Q_{Bt+1}=Y,\ Q_{Bt}=X]$$
$$=\sum Prob[Q_{Ct+1}=\alpha,\ Q_{Ct}=\gamma]$$
$$\cdot Prob[L_{At+1}=\beta,\ L_{At}=\delta]$$

（$\sum$ は $Y=\alpha+\beta,\ X=\gamma+\delta$ を満たす全ての $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の組合せの総和を意味する）……(28)

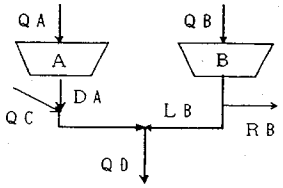
こうして得られた Q_B の同時分布から，Q_B の条件付き分布を求め貯水池 B の貯留推移行列を作成すればよい．最後に，貯水池系の利水機能評価は，R_A と R_B の双方を用いて行うことになる．

(2) 並列持続された貯水池系

並列持続された貯水池系の概念を図—9 に示す．貯水池 A では取水せずに流量調整だけを行い D_A の放流を行い，さらに，合流する前に残流域より流入量 Q_C が流入するとする．他方貯水池 B では R_B だけ取水を行い，残りの L_B を下流に放流するとする．合流後の流量 Q_D は次式で求められる．

$$Q_D=D_A+Q_C+L_B \quad \cdots\cdots(29)$$

D_A, Q_C, L_B の同時分布は既知であるので，空間的な相関性はないと仮定すると，Q_D の同時分布は式 (28) のように D_A, Q_C, L_B の同時分布を順次たたみこみを行うことで求められる．系の利水機能評価は R_B と Q_D により行うことになる．



図—9 並列接続の概念図

(3) 河川からの取水

貯水池がなく直接河川から取水する場合，あるいは分流する場合は，2段階推移モデルにおいて，貯水池容量が0の貯水池を仮想的に考えればよい．流入量 Q を，貯留することなく実放流量 R だけ取水し，溢流量 L だけ放流すると考えれば，Q を R と L に分流させることができる．この際 R は Q だけの関数となるが，Q に応じて任意に R を設定することができる．

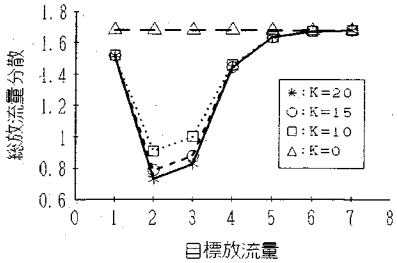
(4) 適用計算例

計算例として，図—7 に示した最も単純な直列接続の貯水池系において上下流のダムの貯水容量配分問題を取りあげよう．計算条件は，貯水池容量が上，下流合わせて 30 で，その配分を，上流：下流＝0：30（つまり単一），20：10，15：15，10：20，の4種とした．利水機能評価には，定常状態における下流貯水池の実放流量を対象とし，4.（1），b）で設定した充足期待値，および期待自乗不足率を用いる．流入量は，上限 $n=8$，形状母数 $a=0.3$，自己相関係数 $\rho=0.6$ の相関二項分布を上流の貯水池に入力として与えた．なお，操作方法は上，下流とも無節水操作とする．

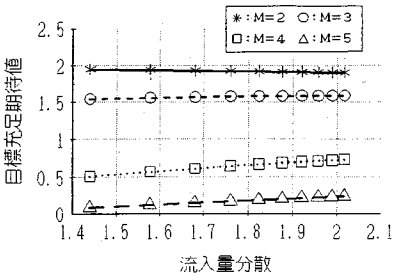
a） 目標放流量と総放流量分散との関係

定常状態を対象とするので，上流貯水池から放流される総放流量の平均値は，貯水池容量，操作方法によらず流入量のそれに一致する．したがって，上流貯水池の利水上の役割は，流入量の変動を平滑することにある．

まず上流ダムにおける，目標放流量と総放流量分散との関係を図—10 に示す．ここで $K=0$ は，貯水池がなく，つまり総放流量の分散が流入量の分散に等しいことを意味する．図では，貯水池容量にかかわらず，目標放流量2において分散が最小になる．目標放流量が5，6，7では，流入量分散とほとんど変わらない．これは，目標放流量を大きく設定すると，貯留されずに放流されるので，貯水池の貯留効果がなくなるからであろう．逆に目標放流量が1と小さすぎても，ほとんど溢流してしまうことにより，総放流量の分散は流入量のそれとあまり差がなくなる．貯水池容量の影響は，貯水池容量が大きいほど分散を小さくする効果が高いようだ．しかし，その差異は目標放流量が2や3といった小さな分散を与える目標



図—10　貯水池容量の相違を考慮した目標放流量と総放流量分散の関係



図—11　目標放流量の相違を考慮した流入量分散と充足期待値の関係

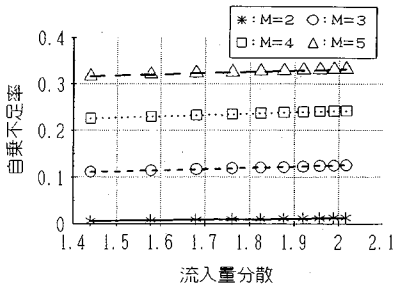
放流量の場合に限られて認められ，それ以外では貯水池容量による差はほとんどない．

b）　流入量分散と目標充足期待値，自乗不足率との関係

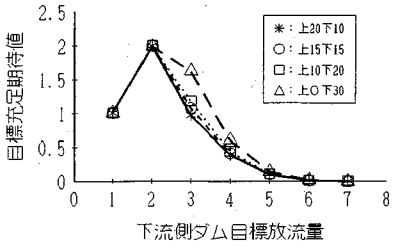
次に，下流貯水池の実放流量による利水機能評価関数に対して，流入量分散の変化に伴う影響を調べる．貯水池容量 $K=15$，流入量の平均を 2.4，自己相関係数を 0.6 とし，流入量分散を変化させた場合の，分散と充足期待値との関係を図—11 に，分散と自乗不足率との関係を図—12 に示す．

図—11 によると，同じ流入量分散に対する充足期待値は，目標放流量が 2 のときが最大で，3，4，5 と目標放流量が大きくなるにつれて小さくなる．また，流入量分散と充足期待値の関係では，目標放流量が 2 の場合は，分散が大きいほど充足期待値は小さい．逆に，目標放流量が 3，4，5 では分散が大きいほど充足期待値も大きい．この理由は，流入量分布は量の小さい方に歪んだ分布形であるため，分散の増大は，わずかながら量の大きい流量の生起確率の増加を意味し，それが充足期待値の増加に連なるのであろう．しかし，充足期待値が最大である目標放流量が 2 の場合には流入量分散は小さいほど充足期待値が大きくなる傾向にあるので，目標充足期待値を大きくするように目標放流量を設定した場合には，流入量分散は小さい方が利水上有効だと判断すべきであろう．

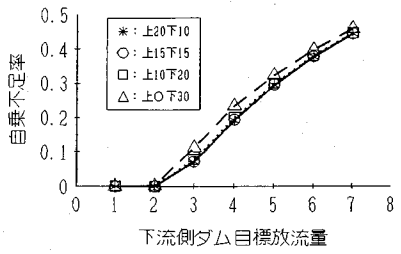
つぎに，図—12 によると，自乗不足率は目標放流量



図—12　目標放流量の相違を考慮した流入量分散と自乗不足率の関係



図—13　容量配分の相違を考慮した下流貯水池目標放流量と充足期待値の関係



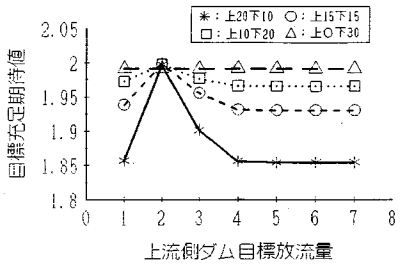
図—14　容量配分の相違を考慮した下流貯水池目標放流量と自乗不足率の関係

に関係せず，流入量分散が大きくなるに伴って増加する．すなわち，放流量全体を評価の対象にした自乗不足率によっても，流入量の分散は小さい方が利水上有効だと思われる．したがって，直列持続の貯水池系は，上流の貯水池によって流入量の変動を減少させ，下流の貯水池に安定した流入量を与え，下流の貯水池は，安定している流況を受けて適切に操作することで，総合的な利水機能を果たすといえよう．

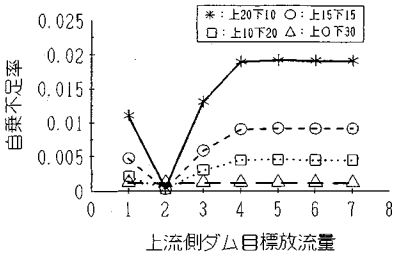
c）　下流貯水池の目標放流量に関する検討

ところで，図—10 によれば，上流貯水池の目標放流量は，2 の場合が最も下流側貯水池への流入量の分散を減少させることが知られていた．そこで，上流貯水池の目標放流量を 2 に固定し，下流貯水池の目標放流量と充足期待値との関係を，図—13 に，自乗不足率との関係を図—14 に示す．

図—13 をみると，どの貯水池容量配分の場合も，目



図—15 容量配分の相違を考慮した上流貯水池目標放流量と充足期待値の関係



図—16 容量配分の相違を考慮した上流貯水池目標放流量と自乗不足率の関係

標放流量2で最大になる．容量配分間の比較では，目標放流量が3，4の場合に，下流単一貯水池の充足期待値が他の容量配分に比べて大きな値を示す．2番目に大きいのは，上流10下流20の組合せで，それ以外はほとんど差がない．このように充足期待値でみる限りは，流入量分散を小さくすることよる利水上の効果よりも，下流の貯水池容量が小さくなることによる負の効果の方が強いと思われる．

図—14をみると，目標放流量が1，2では差がないが，3以上で，下流単一貯水池の場合が一番大きく，それ以外の容量配分の場合はほとんど差がない．したがって，充足期待値の観点とは逆に，自乗不足率からみる限りは，貯水池容量が小さくなる負の効果よりも，流入量の分散を小さくすることにより渇水の厳しさを抑える効果の方が大きいといえよう．

d） 上流貯水池の目標放流量に関する検討

最後に，下流貯水池の目標放流量を2に固定して，上流貯水池の目標放流量と充足期待値，自乗不足率との関係を**図—15**，16に示す．**図—15**によると，上流目標放流量が2の場合に限って，単一の貯水池より貯水池を二つ設けたものの方がわずかながら値が大きくなっている．しかし，その他の場合は単一貯水池が貯水池が二つあるものよりも値が大きくなっており，貯水池を二つにした場合の比較でも，下流の貯水池に容量を大きく配したものが値が大きくなる．自乗不足率が充足期待値とは逆に，小さいほど渇水の厳しさが弱いことを考えると，**図—15**と**図—16**とは，同じ傾向を示している．これらの結果より，上流に貯水池を配することは，下流貯水池への流入量の変動を抑えるという意味で効果はあるが，上流貯水池の操作そのものをかなり精密にしなければならないといえよう．

今回の計算例は，貯水池容量の和を単一貯水池容量と同じとして比較した結果，上流に貯水池を設けることは下流の貯水池容量を減らすことにつながったため，貯水池を直列にする利点があまり明確にならなかった．しかし，一地点に単独で大きな貯水池が建設できないような場合に，その上流に小さな貯水池を流況調節のために建設することは，大きな単一貯水池を作った場合までには至らないまでも，利水安全度を上げる効果は期待できよう．

また，今回示した結果の他に，並列その他について若干の計算を進めているが，紙数の関係で，詳細は別の機会に示すことにする．

6. まとめ

限られた計算条件ではあるが，得られた成果を箇条書にして以下に示す．

（1） 2段階推移モデルを拡張し，放流量の同時分布や周辺分布を求める手法を示した．

（2） 放流量同時分布を用いて，利水機能評価関数を設定し，定常状態における若干の適用計算を行った結果，貯水池が流況の変動を減少させる効果があること，流況の相関が強いほど，わずかではあるが利水上厳しくなることが分かった．

（3） 放流量同時分布を用いて，貯水池系の最も基礎となる直列接続，並列接続の関係にある貯水池の利水機能評価を行う手法を示した．

（4） 直列接続の関係にある2つの貯水池について若干の適用計算を行った結果，上流の貯水池で流況の変動を減少させ，下流の貯水池に安定した流入量を与えることで，系全体としての利水安全度が上がることがわかった．

7. あとがき

本論文では，無効，溢流を勘案した放流量同時分布を求める手法を示すとともに，その利用例として，貯水池系の利水機能評価を行う手法について述べた．放流量同時分布は利水上の貯水池操作に関連した種々の情報を内包しており，その利用方法は多岐にわたると思われる．また，適用計算例として，定常状態についてのみの提示であったので，初期貯水量などの影響は考察の対象となっていない．しかし，非定常状態についても，本手法の適用によって，利水機能の評価が可能になろう．

参 考 文 献

1) 鈴木正人・長尾正志：2段階推移モデルによる相関離散分布流量を受ける貯水池理論，土木学会論文集，第411号，pp. 161-168，1989.
2) 鈴木正人・長尾正志：相関離散分布流量を受ける貯水池の利水機能評価の研究，土木学会論文集，第417号，pp. 209-217，1990.
3) 高棹琢馬・池淵周一・小尻利治：水量制御からみたダム群のシステム設計に関するDP論的研究，土木学会論文報告集，第241号，pp. 39-51，1975.
4) 神田　徹：水資源計画における貯水池最適操作に関する研究，大阪大学博士論文，1975.
5) 小尻利治・池淵周一・飯島　健：利水システムの安全度評価に関する研究，土木学会論文集，第381号，pp. 91-100，1987.
6) 川口篤昭・長尾正志・鈴木正人：貯水池における溢流量を勘案した放流量の同時分布の導出，土木学会第45回年次学術講演会概要集，1990.
7) 鈴木正人・長尾正志・川口篤昭：放流量同時分布を用いた貯水池の利水機能評価の研究，土木学会第45回年次学術講演会概要集，1990.

(1990. 7. 27・受付)

STOCHASTIC EVALUATION OF WATER UTILITY IN A RESERVOIRS SYSTEM BY USING JOINT PROBABILITY OF DISCHARGE-SERIES FROM RESERVOIR

Masato SUZUKI and Masashi NAGAO

The proper evaluation of water utility is essential for a resonable operation and planning in a reserviors system. Such evaluation is mainly based on a discharge-series released from reservoirs. This study aims at the analitical deduction of joint probability of discharge-series and application for a two-reservoir system. This analysis is carried out by extension of two-step transition model previously proposed by the authors. In case of series connection of reservoirs, a joint probability of discharge-series upstream is combined with that of infow-series down-stream. In case of parallel connection, a joint probability of discharge-series from one reservoir is combined with that from the other. Some numerical example is given for the case of series-connection, and the usefulness of this technique is shown for allocation problem of reservoirs capacities upstream and downstream.