

空間での有限回転を伴う弾性座屈現象を利用したリングのたたみ込み

後藤芳顯*・渡辺康人**・春日井俊博***・
松浦 聖****

柔骨組構造物のたたみ込みは、宇宙構造物等の輸送、展開に関連して重要である。ここでは、3次元空間の弾性座屈現象を利用したリングのたたみ込みについて理論的に検討した。これはリング面外に曲げモーメントが作用したときに生ずる大きな有限回転を伴う座屈現象で、少なくとも理論的に取り扱われたことはない。この座屈の結果、リングは直径が1/3の小さなリングにたたみ込まれる。

Keywords: deployable ring, finite rotation, elastic buckling, space structure

1. ま え が き

三次元空間での弾性座屈現象を利用した一次元柔構造部材のたたみ込みについては、宇宙構造物の輸送、展開に関連して研究されている^{1),2)}。しかしながら、これら座屈現象は、三次元空間での有限回転を伴うため高次非線形問題となり理論解析自体容易でなく、たたみ込みに対して有効な現象の発見、力学特性の理論的検討はかなり困難なものと考えられる。この種の研究は、従来、構造要素として重要な、いわゆる直線はり・柱部材を対象としたものが中心で、軸圧縮力下の Euler 座屈、ねじり座屈やねじりによる曲げ座屈 (Greenhill 問題³⁾) を巧妙に利用した方法が報告されている^{1),2)}。

本論文では、座屈現象を利用した、薄肉断面を有するリングのたたみ込みについて、比較的有用で、かつ座屈現象としても、ほとんど取り扱われていないと思われる興味深い挙動を見出し、その力学特性を理論的に検討したので報告する。このたたみ込み方法は、図-1のようにリングに面外曲げモーメント M を作用させたときに生ずる屈服現象を利用するもので、三次元空間での非常に大きな有限回転を伴う。長方形薄肉断面のリングの模型でこの挙動の概略を示したのが写真-1 (a)~(f) である。写真からわかるように、リングは三次元空間での大きな回転を伴いながら変形し、最終的に初期のリングから半径が1/3、容積が1/9のリングにまで小さくたたみ込まれ、さらに特徴的であるのは、この形状が、無荷重状態 ($M=0$) で保持されていることである。なお、

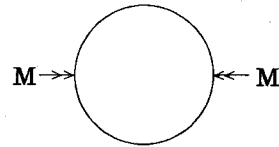


図-1 たたみ込みの方法

このような挙動は、任意断面のリングについて常に現われるというわけではなく、リング面外の曲げ剛性に比べ、面内の曲げ剛性が小さいほど生じやすい傾向にあるが、その詳細については、本研究を通じて明らかにされる。

このような三次元空間の大回転を伴うリングの座屈挙動を理論的に正しく解析するためには、精度の良い立体棒材の解析手法を用いる必要がある。この解析手法としては、すでに著者らが示した棒の三次元空間での有限回転を厳密に考慮した Lagrange 表現の微小ひずみ・有限変位の支配微分方程式^{5),6)} に直接基づく、高精度の非線形伝達マトリックス法^{5),7)} を採用する。ここでは、さらに座屈後の不安定挙動の解析に対応するため、Newton-Raphson 法の収束過程を含む弧長増分法を導入し、数値計算上の安定性を向上させている。

2. リングのたたみ込みの解析モデル

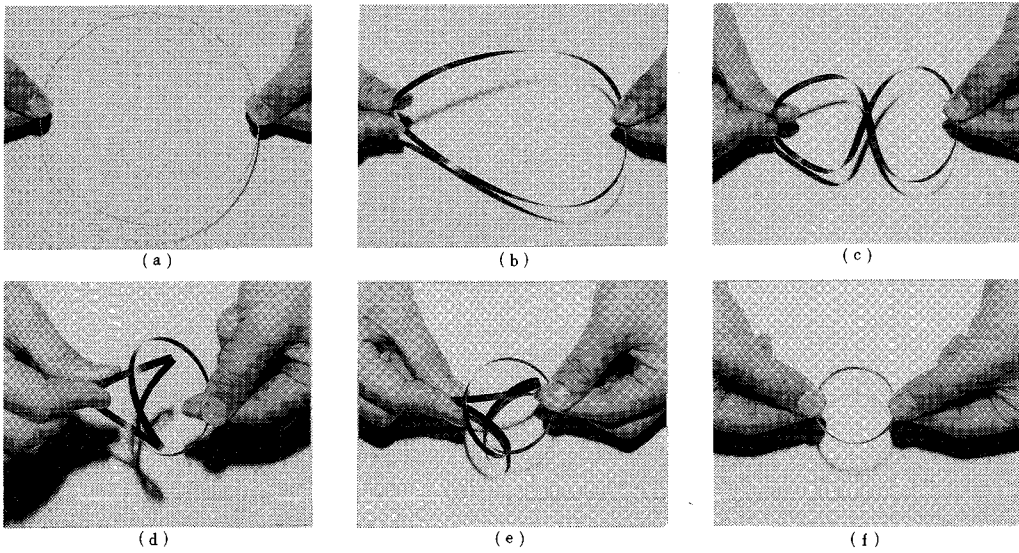
リングのたたみ込み過程を理論的に解析するためのモデルと全体座標系 (X, Y, Z) を図-2に示す。このモデルでは、リングの一端を固定し、他端に Y 軸回りのモーメント M を作用させるのであるが、モーメント作用点でリングは、 Y 軸回りの回転と Y 軸に沿う並進変位が自由で、他の回転および並進変位の自由度は固定されている。この問題は、構造の対称性と荷重の逆対称性を考慮すると、1/2 構造で解析が可能となる。すなわち、図-3に示すように、支持条件は変更せず、 Y 軸に関して対称な1/2部分を除き作用モーメントも1/2としたも

* 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

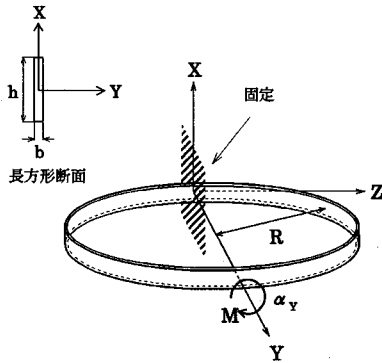
** 正会員 工修 東海旅客鉄道(株)関西支社 工務部施設課

*** 正会員 工修 (株)横河橋梁製作所設計部

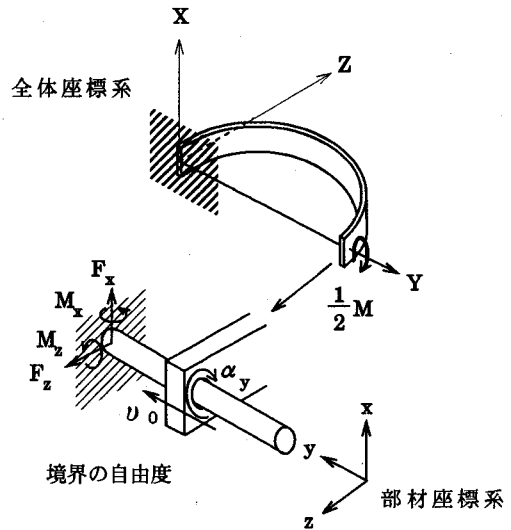
**** 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科



写真—1 リングのたたみ込み過程



図—2 解析モデル



図—3 1/2モデル

のが等価な構造に対応し、2点境界値問題となる。

3. 有限回転を伴う空間棒材の 極限点挙動の解析法

(1) 概 要

対象とする立体骨組構造の解析では、極端に大きな空間での有限回転を伴う不安定現象を取り扱うため、このような領域においても、精度の良い支配方程式を用いる必要がある。著者らは、充実断面空間棒材の有限変位問題に関して、断面不変、直角保持の仮定以外には何ら近似を導入しない厳密な Lagrange 表現の支配方程式^{5),6)}、ならびに、変位と回転の大きさには制限はないが微小ひずみの条件を導入した同様の支配方程式をすでに誘導している⁵⁾。ここでは実用性を考慮して微小ひずみの条件下の支配微分方程式を用いる。先に述べたようにこの支配方程式によれば、ひずみが微小である限り、有限回転の大きさに制限はなく、弾性領域の座屈を扱うことでの

解析に十分適用できる。数値解析法としては、解析対象が2点境界値問題になることを考慮して、上記支配方程式からテーラー展開法によって直接誘導される伝達型の非線形離散化式を用いる高精度の非線形伝達マトリクス法を採用する^{5),7)}。これらの離散化式と、これより増分して得られる増分型の伝達式に基づき荷重増分法と Newton-Raphson 法を併用する解析手法の詳細については、著者らによりすでに文献7)において述べているが、本論文では、さらに、極限点挙動である屈服現象をより正確に解析するために、弧長増分法を新たに導入する。上述したように本離散化式の詳細についてはすでに文献5), 7) に示しているの、ここでは、立体棒材の非線

形伝達マトリックス法への弧長増分法の導入を中心に説明する。

(2) 伝達マトリックス法への弧長増分法の導入

伝達マトリックス法で用いる伝達式は、棒の有限要素の一方の節点から他方の節点へ状態量を伝達する要素伝達式と、集中荷重が節点に作用する場合や隣接有限要素が平行に連結されていない場合、節点の左から右へ（あるいは右から左へ）状態量を伝達する節点伝達式から成り立っている。

まず、ここで用いる要素伝達式は状態量に関して非線型となり、これを有限要素 $i, i+1$ について示すと、次のようになる。

$$\{Q\}_{i+1} = T_i(Q)_i, \lambda \quad (1 \leq j, k \leq 18) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 λ は荷重パラメーターである。また、式 (1) で用いた状態量ベクトル成分の添字の意味は次のようになる。すなわち、これを Q_{ij} と表わした場合、 i 節点における k 番目の状態量ベクトルの成分 ($1 \leq k \leq 18$) であることを意味し、上添字 j は、変形前の有限要素 $j, j+1$ について定義される直交デカルト要素座標系 (x_j, y_j, z_j) についての成分であることを示している。なお周知のように、充実断面立体棒材の状態量ベクトルの独立な成分は 12 成分であるが、ここでは $\{Q\}_{ij}$ は 18 成分からなっている。これは、取扱いの容易さより独立な回転変位 3 成分を 9 成分の方向余弦として表わしたため⁷⁾、独立な方向余弦はやはり 3 成分である。つまり独立な状態量ベクトル成分は 12 成分であることに変わりはない。

次に、節点伝達式を $i+1$ 節点において、有限要素 i から $i+1$ へ伝達する場合について示すと次のようになる。

$$\{Q\}_{i+1} = [P_{i+1}(\lambda)] \{Q\}_i \dots\dots\dots (2)$$

式 (1), (2) に対応する増分型の伝達式は次のようになる。

$$\{\Delta Q\}_{i+1}^m = [\Delta T_i^*(Q)_i^{m-1}, \lambda^{m-1}, \Delta \lambda^m] \{\Delta Q\}_i^m \dots\dots\dots (3)$$

$$\{\Delta Q\}_{i+1}^{m+1} = [\Delta P_{i+1}(\Delta \lambda^m)] \{\Delta Q\}_i^m \quad (1 \leq j \leq 13) \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\{\Delta Q\}_{ij}^m$ は増分 m ステップでの状態量の増分を表わすものであるが、式 (1), (2) で用いた状態量の増分 $\{\Delta Q\}_{ij}^m$ とは回転変位を表わす成分を除いた $j=1 \sim 9$ について一致する。 $\{\Delta Q\}_{ij}^m$ における回転変位成分の増分としては、増分量が微小であることを考慮して、方向余弦の増分ではなく、各有限要素の要素座標 (x_k, y_k, z_k) の 3 軸回りの微小回転 3 成分を採用しており、 j

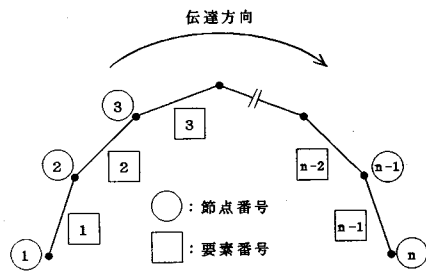


図-4 2点境界値問題における有限要素

$= 10 \sim 12$ が対応する⁷⁾。この回転成分は微小であるのでベクトル的な合成・分解が可能である。以上の $j=12$ までの成分が実質的な状態量である。 $j=13$ については、 $\Delta Q_{13}^m = 1$ つまり定数で、通常の伝達マトリックス法で用いられるように、荷重を伝達マトリックス中に含めるためのものである。また、 λ^{m-1} は増分 $m-1$ ステップでの荷重パラメーターで、 $\Delta \lambda^m$ は $m-1$ から m ステップへの荷重増分パラメーターである。

このように、式 (3), (4) の増分型の伝達式の形式は微小変位問題におけるのと同様で、伝達マトリックス法と全く同一の演算が可能となる。なお、ここで示した式 (1)~(4) の具体的な内容については文献⁷⁾ で詳細に示している。

これらの要素ならびに節点伝達式を用いて、図-4 に示す 2 点境界値問題の弧長増分法による解法を以下に説明する。

まず、増分 m ステップにおける始点である節点 1 と終点である節点 n の状態量の増分関係を求める。この関係は、通常の伝達マトリックス法演算に従い、式 (3), (4) を交互に用いることにより次のようになる。

$$\{\Delta Q\}_n^m = [[\Delta P_n^*] [\Delta T_{n-1}^*] [\Delta P_{n-1}^*] \dots \dots \dots [\Delta P_2^*] [\Delta T_1^*] [\Delta P_1^*]] \{\Delta Q\}_1^m \dots\dots\dots (5)$$

ここで、始点ならびに終点の状態量ベクトル増分の上添字 0, n は、成分が定義される要素座標系を示すものであるが、対応する要素座標が存在しない。したがって、ここでは、それぞれ、隣接の要素座標 (x_1, y_1, z_1) と ($x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$) と一致するように選ぶ。

立体棒材の 2 点境界値問題の場合、始点および終点の 12 成分からなる状態量ベクトル増分のうち、それぞれ 6 成分からなる既知成分ベクトルを $\Delta C_n^m, \Delta C_1^m$ また未知成分ベクトルを $\Delta X_n^m, \Delta X_1^m$ とした場合、式 (5) は行、列の変換により次のように表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_n^m \\ \Delta X_n^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Delta F_n^m] & [\Delta F_n^m] \\ [\Delta F_1^m] & [\Delta F_1^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta C_1^m \\ \Delta X_1^m \end{Bmatrix} + \Delta \lambda^m \begin{Bmatrix} \Delta f_n^m \\ \Delta f_1^m \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、既知成分の増分ベクトル ΔC_n^m , ΔC_n^m の変位成分は通常の固定条件では零となる。また、力学成分も外力がすべて節点力として、節点伝達マトリックス $[AP_n^{*m}]$, $[AP_n^{*m}]$ 内に与えられるため常に零となる。

次に、中間節点 i の状態量増分 $\{\Delta Q^{*i|m}\}$ は式 (5) と同様に節点 1 の状態量と次のように関係づけられる。

$$\{\Delta Q^{*i|m}\} = \begin{bmatrix} [AP_1^{*m}] [\Delta T_1^{*m}] [AP_1^{*m}] \cdots \\ \cdots [AP_i^{*m}] [\Delta T_i^{*m}] [AP_i^{*m}] \end{bmatrix} \{\Delta Q^{*0|m}\} \quad \cdots (7)$$

i 節点の状態量 $\{\Delta Q^{*i|m}\}$ の変位 6 成分を $\{\Delta U_i^m\}$ で表わした場合、これは式 (7) から ΔC_n^m , ΔX_n^m と次のように関係づけられる。

$$\{\Delta U_i^m\} = \begin{bmatrix} [\Delta G_{ai}^m] [\Delta G_{bi}^m] \\ [\Delta X_i^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta C_n^m \\ \Delta X_n^m \end{Bmatrix} + \Delta \lambda^m \{\Delta g_{ai}^m\} \quad \cdots (8)$$

伝達マトリックス法における弧長増分法では式 (6), (8) と次の弧長制御式を用いることになる。

$$\sum_{i=1}^n \{\Delta U_i^m\} \{\Delta U_i^m\} + (\Delta \lambda^m)^2 = (\Delta R^m)^2 \quad \cdots (9)$$

ここに、 ΔR^m は荷重増分 m ステップの弧長である。本解析では、式 (9) によらず、1 つ前の増分ステップでの増分量で線形化した⁸⁾ 弧長制御式を用いる。

$$\sum_{i=1}^n \{\Phi_i^{m-1}\} \{\Delta U_i^m\} + \mu^{m-1} \Delta \lambda^m = (\Delta R^m)^2 \quad \cdots (10)$$

$$\{\Phi_i^{m-1}\} = \frac{\Delta R^m}{\Delta R^{m-1}} \{\Delta U_i^{m-1}\}, \quad \mu^{m-1} = \frac{\Delta R^m}{\Delta R^{m-1}} \Delta \lambda^{m-1} \quad \cdots (11-a, b)$$

式 (8) を式 (10) に代入することで伝達マトリックス法における弧長増分の制御式はすべて始点の量で次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \{\Phi_i^{m-1}\} [[\Delta G_{ai}^m] [\Delta G_{bi}^m]] \\ [\Delta X_1^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta C_n^m \\ \Delta X_n^m \end{Bmatrix} + \Delta \lambda^m \left[\sum_{i=1}^n \{\Phi_i^{m-1}\} \Delta g_{ai}^m + \mu^{m-1} \right] = (\Delta R^m)^2 \quad \cdots (12)$$

また式 (6) より始点の状態量増分と荷重増分の関係は、

$$\Delta C_n^m = \begin{bmatrix} [\Delta F_{an}^m] [\Delta F_{bn}^m] \\ [\Delta X_n^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta C_n^m \\ \Delta X_n^m \end{Bmatrix} + \Delta \lambda^m \Delta f_{an}^m \quad \cdots (13)$$

式 (12), (13) が伝達マトリックス法における弧長増分法の最終的な支配方程式で、これより未知数 ΔX_n^m , $\Delta \lambda^m$ を求めることになる。上記のように、2 点境界値問題に伝達マトリックス法を適用すると、立体棒材の場合でも最終的には、7 元の連立方程式を解くだけでよい。

以上の弧長増分法の支配方程式は線形式であるため、得られる増分量は近似的なものである。したがって、厳密な増分量を求めるためには、これらの近似値を初期値として Newton-Raphson 法によって収束計算を行う必要があり、この過程を次に説明する。

線形の弧長増分の支配方程式で得られる近似的な始点の状態量ベクトル増分を $\{\Delta Q^{*i|m}\}_{(0)}$, 荷重増分パラメータを $\Delta \lambda_{(0)}^m$ とすると、 $\Delta \lambda_{(0)}^m$ および $\{\Delta Q^{*i|m}\}_{(0)}$ より計算される $\{\Delta Q^{*i|m}\}_{(0)}$ により m ステップの状態量、荷重増分パラメータは次のように与えられ、これを Newton-Raphson 法における初期値として用いる。

$$\begin{aligned} \{Q^{*i|m}\}_{(0)} &= \{Q^{*i|m-1}\} + \{\Delta Q^{*i|m}\}_{(0)} \\ \lambda_{(0)}^m &= \lambda^{m-1} + \Delta \lambda_{(0)}^m \quad \cdots (14-a, b) \end{aligned}$$

ここに下添字 (0) は近似的な値であることを示す。

式 (14) の近似的な始点の状態量と荷重パラメータを式 (1), (2) の非線形伝達式に用いることにより、各節点の状態量が計算される。これらより与えられる終点の既知量を C_n^m , また i 節点の変位量を $\{U_i^m\}_{(0)}$ とする。さらに、本増分ステップ m での変位増分を $\{\Delta U_i^m\}_{(0)} (= \{U_i^m\}_{(0)} - \{U_i^{m-1}\})$ とし、これと荷重増分 $\Delta \lambda_{(0)}^m$ を式 (9) に代入して得られる弧長増分量を $\Delta R_{(0)}^m$ とする。先に述べたように、 C_n^m , $\Delta R_{(0)}^m$ は、近似的な終点の状態量ベクトルと弧長増分量のため、設定された既知量 C_n^m , ΔR^m とは必ずしも一致せず、通常次のような誤差を生ずる。

$$\delta C_n = C_n^m - C_n^m, \quad \delta R^m = \Delta R^m - \Delta R_{(0)}^m \quad \cdots (15-a, b)$$

これらの誤差をもとに式 (14-a, b) の始点の未知量 X_n^m ならびに荷重パラメータ $\lambda_{(0)}^m$ の修正量, δX_n^m , $\delta \lambda^m$ を Newton-Raphson 法で求める。これら修正量はすでに求めた増分関係式 (6) から得られる次式

$$\begin{aligned} \delta C_n^m &= [\Delta F_{an}^m(Q^j | \lambda_{(0)}^m, \lambda_{(0)}^m)] \delta X_n^m \\ &\quad + \delta \lambda^m \Delta f_{an}(Q^j | \lambda_{(0)}^m, \lambda_{(0)}^m) \quad \cdots (16) \end{aligned}$$

および弧長制御式の増分式 (12) から得られる

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \{\Delta U_i^m\}_{(0)} [\Delta G_{ai}^m(Q^j | \lambda_{(0)}^m, \lambda_{(0)}^m)] \delta X_n^m \\ + \delta \lambda^m \left[\sum_{i=1}^n \{\Delta U_i^m\}_{(0)} \Delta g_{ai}^m(Q^j | \lambda_{(0)}^m, \lambda_{(0)}^m + \Delta \lambda_{(0)}^m) \right] \\ = \delta R^m \Delta R_{(0)}^m \quad \cdots (17) \end{aligned}$$

をもとに、7 元の連立方程式を解くことにより計算できる。修正量を評価する式 (16), (17) も線形式であるため、 δX_n^m , $\delta \lambda^m$ は近似的にしか評価されないため終点の誤差が許容誤差の範囲におさまるまで式 (16), (17) を用いて繰り返し計算を行う。なお、式 (17) で $\delta R^m \Delta R_{(0)}^m = 0$ とした場合、つり合い曲線の接線と直交

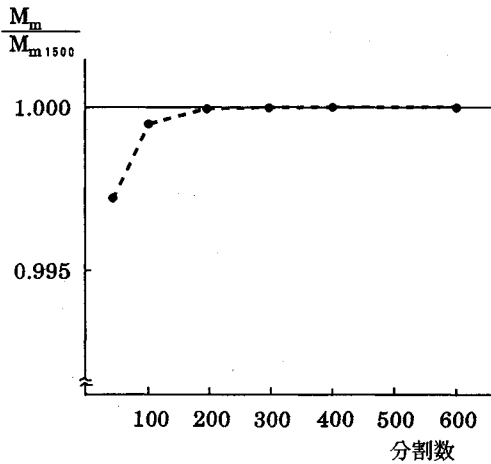


図-5 分割数による収束状況

する平面による制御⁸⁾となり、厳密には設定した弧長増分 ΔR^m に対応するつり合い曲線上の解は得られないが、弧長に対する拘束条件が1つ減るのでつり合い曲線へはより収束しやすくなる。

4. リングのたたみ込み過程の解析と力学特性

(1) 支配パラメーター

リングのたたみ込みにおける力学特性を一般的に検討するために、図-2に示すリングの支配パラメーターを明らかにする。ここでは、リングを直線材近似によって解析するが、少なくともそりねじりの影響を無視する充実断面材の理論においては要素分割数を増加させると曲線材の解に収束し、十分な解析が可能となる^{9), 10)}。重要な物理量として、部材座標系 (x, y, z) で定義される変位成分を (u_0, v_0, w_0) 、回転変位成分を表わす方向余弦を $[l_{ab}]$ 、断面力成分を $(\hat{F}_x, \hat{F}_y, \hat{F}_z)$ 、断面モーメント成分を $(\tilde{M}_y, -\tilde{M}_x, \tilde{M}_z)$ と文献5), 7) に従って表わす。これより、すでに無次元量である方向余弦 $[l_{ab}]$ を除く各物理量の無次元化量を次のように定義する。

$$\begin{aligned} & (u_0/R, v_0/R, w_0/R), \\ & (\hat{F}_x/EA, \hat{F}_y/EA, \hat{F}_z/EA), \\ & (\tilde{M}_yR/(EI_{yy}), -\tilde{M}_xR/(EI_{xx}), \tilde{M}_zR/GJ) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18-a\sim c)$$

ここに、 R はリングの半径、 EA は軸剛性、 EI_{xx} 、 EI_{yy} はそれぞれ、 y および x 軸回りの曲げ剛性、 GJ は St. Venant のねじり剛性である。

式 (18-a~c) のような無次元物理量を用いて、離散化式である式 (1) の要素伝達式⁷⁾ を無次元化した場合、要素の独立な支配パラメーターにリング構造としてのパ

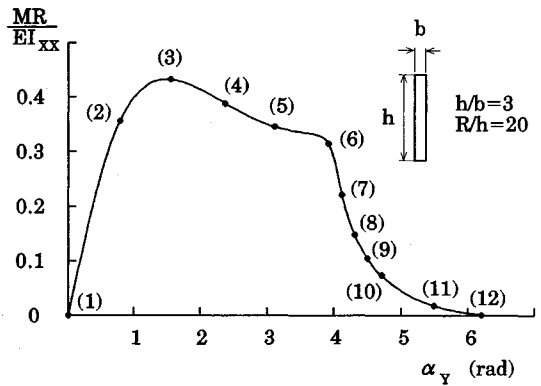


図-6 荷重-回転変位曲線

ラメーター A/R^2 を加えて考えると支配パラメーターは最大限次のようになる。

$$\frac{I_{xx}}{J}, \frac{I_{yy}}{J}, \frac{J}{AR^2}, \frac{E}{G}, \frac{A}{R^2} \dots\dots\dots (19-a\sim d)$$

ここで、鋼材を対象に $\nu=0.3$ として E/G を定数とみなすとともに、リングの断面形状を長方形 ($b \times h$) に限定し、断面定数が、それぞれ

$$A=bh, I_{xx}=bh^3/12, I_{yy}=b^3h/12$$

$$J = \frac{b^3h}{3} \left(1 - \frac{192b}{\pi^5h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \tanh \frac{(2n-1)\pi h}{2b} \right) \dots\dots\dots (20-a\sim d)$$

となる¹¹⁾ ことに注意すれば、式 (19-a~d) の独立な支配パラメーターは次の2つに減少する。

$$h/b, R/h \dots\dots\dots (21-a, b)$$

(2) 理論解析の適用について

ここでは、 $h/b=3$ 、 $R/h=20$ の長方形断面のリングを例にとり、本解析法のたたみ込み過程の解析への適用について言及する。

本解析では3. で説明したように伝達マトリックス法による離散化解析に基づくため、まず所定の精度を得るに必要なリングの要素分割数を明らかにすることが重要である。要素分割数を決定する指標として、ここではたたみ込み過程での図-2に示す作用モーメント M の最大値 M_m に着目し、このモーメントの要素分割による収束性を示したのが図-5である。この図では図-3のリングの1/2モデルを1500要素に分割した場合の最大作用モーメント M_{m1500} を収束解と考え、これとの比で示している。図-5からわかるように作用モーメントの最大値は、実用上200要素以上ではほぼ収束していると考えられることから、リングの1/2を200の直線要素に分割して解析する。

図-2のモデルに対するたたみ込み過程の解析結果を代表させて、図-6に無次元化した作用モーメント

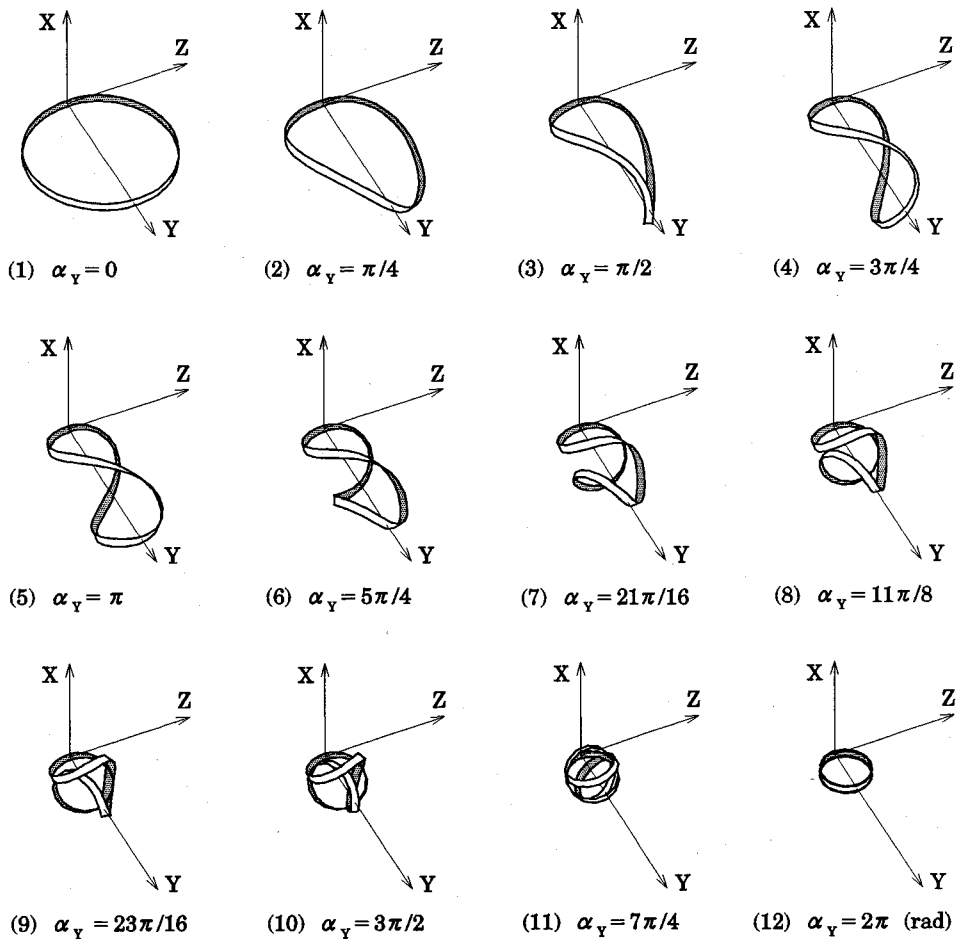


図-7 リングのたたみ込み過程の解析結果 ($h/b=3, R/h=20$)

MR/EI_{xx} とモーメントの作用点でのリングの Y 軸回りの回転角 α_Y の関係を $\alpha_Y=2\pi$ に至るまで示している。また図-7 には、図-6 のつり合い曲線上に記入した点 (1)~(12) での本解析で得られたリングの変形形状を立体的に図示している。ここに、形状変化が急激に起こる (6)~(10) 間は α_Y は $\pi/16$ ごとに、他は $\pi/4$ ごとに示している。図-6、図-7 からわかるように本解析結果はリングが大回転を伴いながら変形し、最終的には初期容積の $1/9$ にまで小さくたたみ込まれ、またこの状態が、無荷重状態で保持されるという 1. で述べた実現象の重要なポイントをすべて的確に表わしている。

(3) 力学特性の検討

ここでは、(2) での解析結果を踏まえ構造パラメータ $h/b, R/h$ を変化させ長方形断面リングのたたみ込み過程を解析し、これらのパラメーターが、力学特性に及ぼす影響を検討する。

まず、 $1 \leq h/b \leq 5, 5 \leq R/h \leq 50$ の範囲で解析し、結果として図-6 に示した作用モーメント MR/EI_{xx} と

モーメント作用点の Y 軸回りの回転角 α_Y の関係が、構造パラメーターによりどのように変化するかを図-8 に示している。この図中には参考のために円形断面の結果も破線で示している。図-8 からわかるように、 h/b によりたたみ込み挙動は大きく影響を受け、 h/b が大きい薄肉のリングほど小さなモーメント M でたたむことができる。一方 h/b が小さくなると M が増加し、 $h/b \geq 1.54$ まではたたみ込み可能であるが、 $h/b \leq 1.51$ の場合や円形断面の場合には、図-9, 10 に示す $h/b=1, R/h=20$ のリングのつり合い曲線と変形形状の推移からもわかるように、たたみ込むことができない。なお、図-10 には図-7 と異なり $\alpha_Y=3\pi/2$ までしか変形形状を示していないが、これは $\alpha_Y \geq 3\pi/2$ ではリング部材が互いに交差して接触し、現在の解析では正しい変形形状が求められないからである。

上述のように長方形断面リングのたたみ込みの可、不可の境界は、 $1.51 \leq h/b \leq 1.54$ に存在すると考えられる。この境界では、図-7 と図-10 の両方の変形モードが可

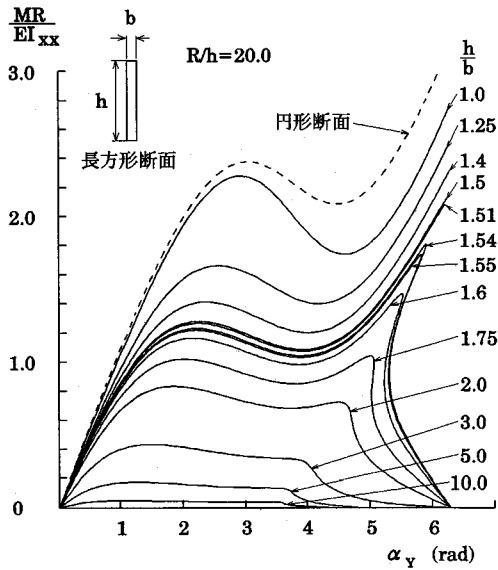


図-8 荷重-回転角変位曲線

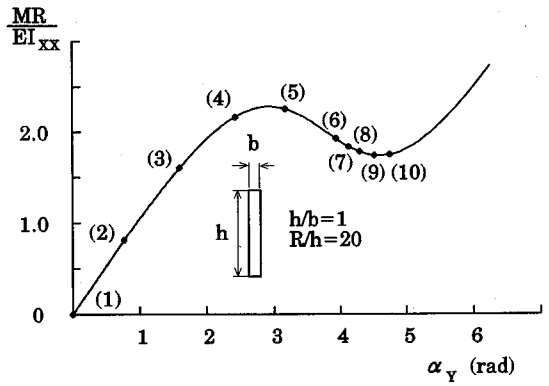


図-9 たたみ込みができない場合の荷重-回転角変位曲線

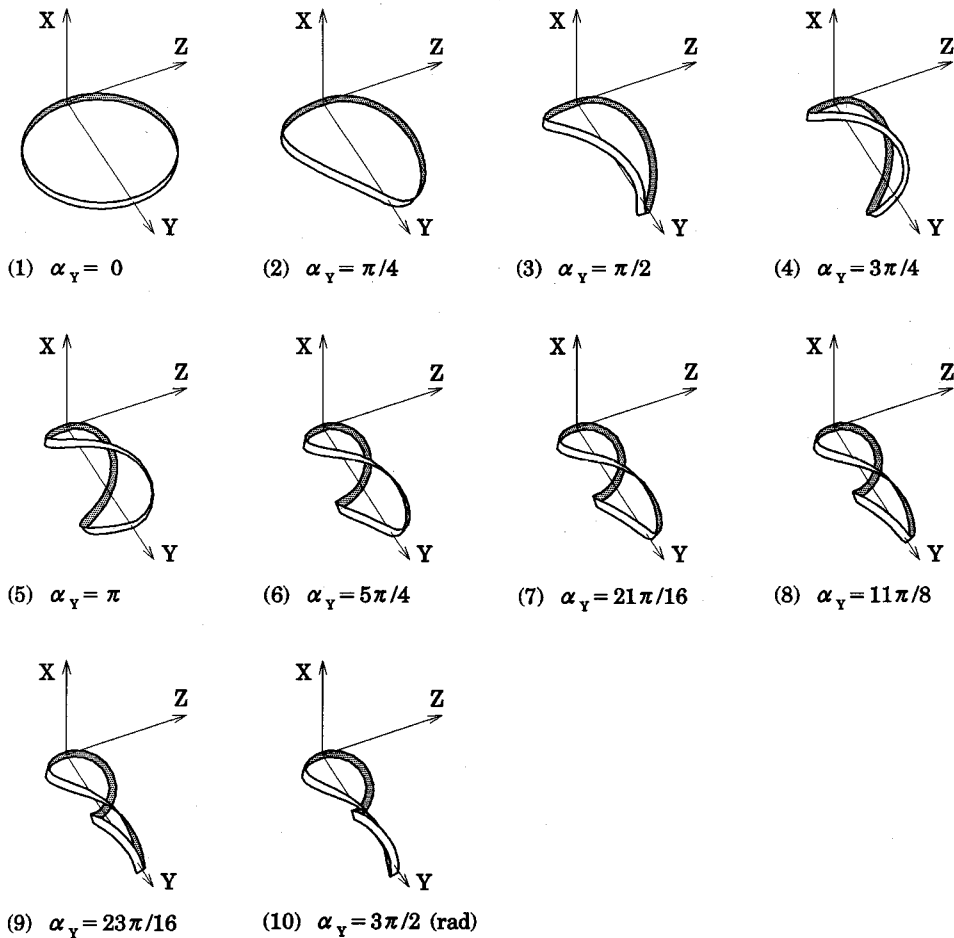


図-10 たたみ込みができない場合の変形挙動の解析結果
($h/b=1, R/h=20$)

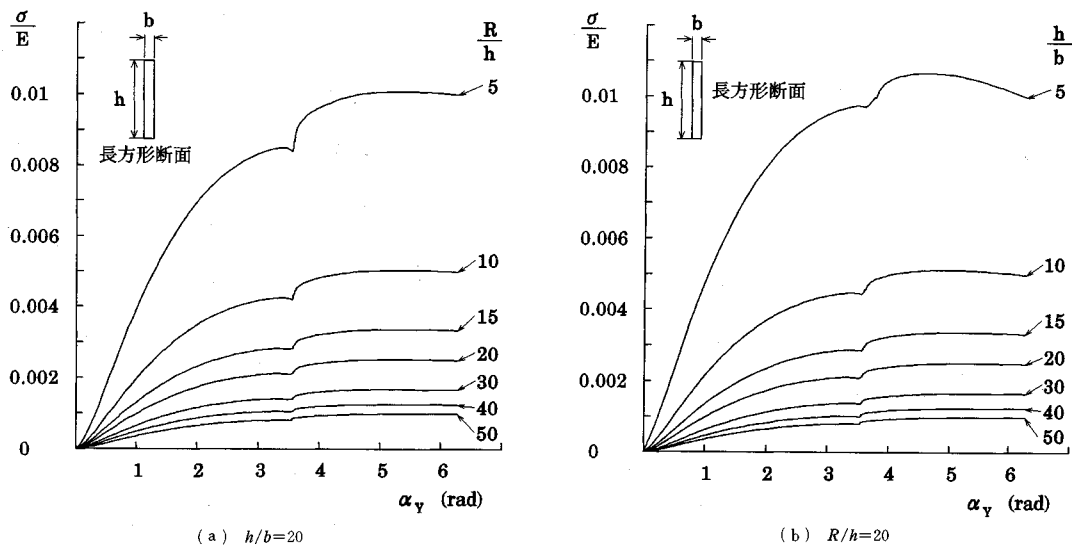


図-11 たたみ込み過程での最大縁応力の推移

能になることを意味しており、両モードへの分岐点が存在することが予想される。しかしながら、 h/b が境界値近傍に近づくと、特異点であるこの分岐点の存在によると考えられる数値計算の不安定が生じ、ここでは、上述した存在領域以内には h/b の境界値を絞り込むことができなかった。

もう1つのパラメーター R/h については、検討した範囲内では $MR/EI_{xx}-\alpha_Y$ 関係に及ぼす影響は数値的には認められず、したがって図-8中にはパラメーター値を記入していない。上記関係に R/h が影響しないことは、充実断面立体棒材の非線形支配方程式の閉じた解が得られないことから、十分な形で理論的に明らかにすることはできないが、半径の大きいリングの微小変位領域に限定すれば α_Y と MR/EI_{xx} の関係は

$$\alpha_Y \doteq \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{EI_{xx}}{GJ} + \frac{8}{\pi^2} \frac{EI_{xx}}{GJ} \right) \frac{MR}{EI_{xx}} \dots\dots\dots (22)$$

と表わされ、部分的には R/h が影響しないことが確認できる。

リングがたたみ込めるためには、形状的に $h/b \geq 1.54$ であることが必要であることが明らかになったが、さらにたたみ込み、展開が自由にできるためには、この過程で材料が塑性化してはならないことも挙げられる。このような意味で、次に、たたみ込み過程で発生する最大の応力が式(21)の支配パラメーターにどのような影響を受けるかについて検討する。ここでは、たたみ込み時に発生する応力からみて非現実的とならない、 $h/b \geq 5$ 、 $R/h \geq 5$ の領域のリングについて解析した。

結果として、図-11には、構造パラメーター h/b を20に固定し、 R/h を変化させた場合ならびに、 R/h を20に固定し h/b を変化させた場合について、支配的

軸方向の縁応力の無次元化最大値 σ/E が、たたみ込みの過程でどのように推移するかを示している。なおリング内での縁応力分布の最大値は、図-2のモデルでいえば荷重作用点と固定点とに発生する。図-11よりたたみ込み過程で発生する最大縁応力 σ_{max} は、 h/b が小さい $h/b=5$ 、 $R/h=20$ の場合を除き、たたまれた最終状態で最大縁応力にほぼ等しくなる。この値としては最終状態で初期半径の1/3のリングにたたまれることを考えるとリング内で縁応力は一様分布し、ほぼ

$$\frac{\sigma_{max}}{E} \doteq 1 / \left(\frac{R}{h} \frac{h}{b} \right) \dots\dots\dots (23)$$

となる。これからもわかるように最大縁応力 σ_{max}/E は、 R/h 、 h/b が大きくなるにつれて減少する傾向を示し、たたみ込みがより容易になることがわかる。なお、リングには軸方向応力の他せん断応力も発生するが、前者に比べ後者は1/100程度で、ほぼ無視できるオーダーである。

5. ま と め

弾性座屈現象を利用した一次元部材のたたみ込みのうち、ほとんど報告がなされていないと考えられるリングに関する方法を提示した。ここで用いる座屈現象はそれ自体、力学的にも幾何学的にも興味深い挙動であるが、著者の知る限りでは全く理論的に検討されたことはないと考えられる。本論文では、この座屈挙動を理論的に解析し、座屈挙動の特性を解明するとともに、リングのたたみ込みへの適用性について検討した。得られた知見をまとめると以下ようになる。

(1) リングのたたみ込みでは、空間での非常に大きい回転を伴うため、高精度の立体棒材の有限変位解析が

要求される。今回の解析にはすでに著者らが提示した解析手法に弧長増分法を追加することにより適用したが、解析結果より、この手法は上記の要求を満足する十分な精度を有していることが判明した。

(2) 提示したリングのたたみ込み方法を用いると、リングは初期直径の1/3の直径をもつリングにたたむことができ容積的には1/9になる。また、すでに発表されている直線部材と異なり、リングの場合たたみ込まれた形状は無荷重状態で保持される。

(3) ここでのたたみ込み方法は、任意断面形状を有するリングに常に適用できるわけではなく、断面形状に制限を受ける。すなわち、リング面外の曲げ剛性に比べ、面内の曲げ剛性が小さいほど容易にたたみ込むことができる。長方形断面の場合についていえば、リング面内の断面幅を b 、面外の高さを h とした場合、 $h/b \geq 1.54$ の領域においてはたたむことができるが、 $h/b \leq 1.51$ ではたためない。また円形断面の場合もたたむことができない。

(4) リングのたたみ込み、展開が自由にできるためには、この過程に発生応力が材料の弾性限を越えてはならない。このリングの場合、主要な発生応力は縁応力であり、 h/b が小さい場合を除いて、その最大値はほぼ最終状態での最大応力 $\sigma/E=1/(R/h \cdot h/b)$ に支配される。すなわち発生最大応力は R/h 、 h/b が大きいくほど減少する傾向を示し、たたみ込みがより容易になる。

参考文献

- 1) Natori, M. and Miura, K. : Deployable Structures for Space Applications, Proc. of 26th Structures, Structural Dynamics and Material Conference, Orlando, Florida, pp.1~9, April, 1985.
- 2) 三浦公亮：宇宙構造物と応用力学，第37回応用力学連合講演会，pp.19~24，昭和62年12月。
- 3) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, 2nd. Ed., McGraw-Hill, 1961.
- 4) Ziegler, H. : Principles of Structural Stability, Blaisdell Publishing Company, 1968.
- 5) 後藤芳顕・松浦 聖・長谷川彰夫：充実断面空間棒材の有限変位理論の一定式化，構造工学論文集，Vol.31 A, pp.183~196, 1983年3月。
- 6) Goto, Y., Matsuura, S., Hasegawa, A. and Nishino, F. : A New Formulation of Finite Displacement Theory of Curved and Twisted Rods, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.2, No.2, pp.365~375, Oct., 1985.
- 7) Goto, Y., Morikawa, Y. and Matsuura, S. : Direct Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Space Rods using Transfer Matrix Technique, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.5, No.1, pp.151~160, April, 1988.
- 8) 細野 透：弧長法による弾性座屈問題の解析，日本建築学会論文報告集，No.243, pp.21~30, 1976年5月。
- 9) Goto, Y., Hasegawa, A. and Nishino, F. : Accuracy and Convergence of the Separation of Rigid Body Displacements for Plane Curved Frames, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.1, No.1, pp.29~39, April, 1984.
- 10) Goto, Y., Hasegawa, A. and Nishino, F. : Accuracy and Convergence of the Separation of Rigid Body Displacements for Space Frames, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.2, No.2, pp.85~95, April, 1985.
- 11) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. : Theory of Elasticity, 3rd Edn., McGraw-Hill, New York, pp.309~313, 1970.

(1990. 6. 18・受付)

DEPLOYABLE RINGS UTILIZING AN ELASTIC BUCKLING PHENOMENON ACCOMPANYING FINITE ROTATIONS IN SPACE

Yoshiaki GOTO, Yasuhito WATANABE,
Toshihiro KASUGAI and Sei MATSUURA

Deployable flexible members utilizing an elastic buckling phenomenon have been studied in order to improve the packing efficiency of space structures. However, these studies are primarily restricted to straight members such as columns and beams. Herein, we present an interesting buckling phenomenon of a ring which considerably reduces its original volume and could be applied to a deployable ring. First, we show an accurate method which can be used to analyze this buckling phenomenon accompanying finite rotations in space. Then, with this method, we theoretically examine the effect of structural parameters on the buckling behavior.