

時間領域境界要素・有限要素結合法の 不整形地盤波動解析への適用

阿部和久*・吉田 裕**

堆積層を有する不整形地盤の波動解析を対象に、時間領域結合過程の構成等について検討した。解の安定性に対し、結合面を均一な外部領域内に設定することや、有限要素の時間積分に数値減衰を付加することが有効であり、両解法の時間ステップ幅の比を整数値に設定し、境界要素方程式の線形補間と有限要素方程式とを結合することが、互いに特性の異なる解法の結合過程として有効であること等が確かめられた。

Keywords: coupling of boundary-finite element method, time domain formulation, sediment-filled valley

1. はじめに

境界要素法は無限または半無限領域の解析に適しており、特に波動問題に対しては散乱波の放射条件が自動的に満たされるため地盤の振動解析等に広く用いられて来た。一方、有限要素法は対象領域が不均一な場合やその形状が複雑な場合、および非線形問題を対象とする場合などに適した解法である。そのため、堆積層を有する不整形地盤の振動解析や構造物と地盤の動的解析において、不均一な領域や構造物などを有限要素法により離散化し、その外部領域を境界要素法で表現した結合解法が両解法の長所を生かした手法として用いられ、多くの適用例によりその有効性が示されている^{1)~5)}。

波動解析における結合解法の多くは周波数領域での解析に用いられたものであり、時間領域での適用例は比較的少ない。時間領域での解析では境界要素法に関する係数行列が時間ステップの進行に伴い増加して行くため、周波数領域での解法に比べ計算時間や記憶容量の面で不利であり、結合時の安定性といった点にも問題があるが、非定常応答や非線形解析に対し、直接適用が可能であるといった利点があり、実用的な解析過程構成の意義は大きい。

著者らは先に、時間領域型境界要素法を有限要素法と結合して二次元面内波動問題へ適用する場合を対象に、境界要素方程式を有限要素型に変換するまでの過程について検討し、表面力の不連続性の取り扱い方や、要素長および時間ステップ幅のとり方、および時間ステップの進行と共に追加される係数行列成分の切り捨て方法などが解の精度等に与える影響について考察した¹⁰⁾。

時間領域での結合解法の検討は主に解の安定性の観点

から福井⁶⁾および東平・吉田⁷⁾により行われている。福井の方法は、境界要素法における時間ステップ幅を有限要素法の時間ステップ幅の整数倍に設定し、結合部の表面力を前のステップにおける値で仮定して一境界要素時間ステップ間の方程式を解き進め、解が十分に収束するまで同様の計算を繰り返しながら結合解を求めて行くとするものである。一方、東平・吉田の方法は、両解法の時間ステップ幅を等しくとり、時間方向に連続した3ステップ間で結合面の有限要素解と境界要素法の境界値近似解とに対し重み付き残差法を適用し両者を結合するものであり、いずれの手法も解の安定化に対し有効な解法を与えている。

なお、時間領域型の境界要素法に対しては比較的大きな時間ステップ幅 Δt_B に対しても良好な精度の解を得ることができる。その反面、1ステップ間の波動の伝播距離 $c\Delta t_B$ を要素長 h_B と比較して短くとする場合に、解の精度や安定性を損なうことがある。例えば、Mansur and Brebbia⁸⁾により、ステップ荷重を受ける一次元棒の解析に二次元境界要素法を適用した場合に、 $c\Delta t_B < 0.6h_B$ に対し固定端の反力の応答に著しいノイズが認められることが示されている。

一方、有限要素法においては、例えば Newmark の β 法⁹⁾のように時間ステップ幅 Δt_F によらず無条件安定な時間積分法を用い、かつ結合時の解の安定性を得ることができたとしても、境界要素法と同程度の精度を与えるのに必要な時間ステップ幅は一般に境界要素法側の時間ステップ幅と異なり、多くの場合 $\Delta t_F \leq \Delta t_B$ であると考えられる。したがって、 Δt_F を Δt_B より短く設定して、両解法を結合することが可能であれば、より実用的な結合過程を構成することができる。

そこで本論文では、時間方向の結合方法として、結合解の精度向上を図る目的で、福井と同様に境界要素法の時間ステップ幅を有限要素法のステップ幅の整数倍にと

* 正会員 工修 新潟大学講師 工学部建設学科 (〒950-21 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

** 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

り、連続した2つの時間ステップにおける境界要素方程式を内挿して得られる方程式を有限要素方程式と結合して繰り返し計算を用いずに解を解き進める方法を構成した。さらに、有限要素法の時間積分法に Hilber-Hughes-Taylor 法 (H-H-T 法)¹¹⁾を用い有限要素解の高次モードに減衰を付加することにより、結合時の安定化を試みた。

また、波動の入射を受ける不整形地盤の非定常解析に時間領域での結合解法を適用する場合を対象に、結合面を設定する位置や、境界要素法と有限要素法の時間ステップ幅の比、および有限要素の分割などが結合解に及ぼす影響など、解の安定性と解析精度向上の観点から、解析を通し本論文で構成した結合過程の有する特徴や適用性を定性的に調べた。

2. 解析方法

(1) 基礎方程式

本論文では二次元波動問題について考える。解析領域 Ω および変位、表面力が規定された境界 Γ_u, Γ_p に対する動弾性問題の基礎方程式は、物体力をゼロとすれば以下の式で与えられる。

支配方程式

$$(\lambda + \mu)u_{i,jj} + \mu u_{i,jj} - \rho \dot{u}_i = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad \dots\dots\dots (1)$$

境界条件

$$\left. \begin{aligned} u_i(x, t) &= \bar{u}_i(x, t) \quad (x \in \Gamma_u) \\ [\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})] n_j &= p_i(x, t) = \bar{p}_i(x, t) \quad (x \in \Gamma_p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

初期条件

$$\left. \begin{aligned} u_i(x, 0) &= u_{0i}(x) \\ u_i(x, 0) &= v_i(x, 0) = v_{0i}(x) \end{aligned} \right\} (\text{in } \Omega) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 u_i, p_i はそれぞれ変位および表面力成分、 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot) / \partial x_i, (\dot{\cdot}) = \partial(\cdot) / \partial t, \delta_{ij}$ は Kronecker のデルタ、 λ, μ は Lamé 定数、 ρ は質量密度、 n_j は境界外向き単位法線ベクトル成分である。なお、繰り返し指標は総和規約に従うものとする。

(2) 有限要素方程式

式 (1) の支配方程式に対し有限要素法を適用し、時間積分法として H-H-T 法を用いる場合、第 n ステップでの解 $\{u_n\}$ と $\{n+1\}$ ステップ目の解 $\{u_{n+1}\}$ との間の関係式は以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} [M] \{\dot{u}_{n+1}\} + (1 + \alpha) [K] \{u_{n+1}\} &= \{F_{n+1}\} + \alpha [K] \{u_n\} \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{u}_{n+1}\} &= \frac{1}{\beta \Delta t_F} \{u_{n+1}\} + \{\alpha_n\} \\ \{u_{n+1}\} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t_F} \{u_{n+1}\} + \{\delta_n\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5-a)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_n\} &= -\frac{1}{\beta \Delta t_F^2} \{u_n\} - \frac{1}{\beta \Delta t_F} \{\dot{u}_n\} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \{\ddot{u}_n\} \\ \{\delta_n\} &= -\frac{\gamma}{\beta \Delta t_F} \{u_n\} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \{\dot{u}_n\} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t_F \{\ddot{u}_n\} \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5-b)$$

式 (4) で $[M], [K]$ はそれぞれ質量および剛性行列であり、 $\{F_{n+1}\}$ は節点力ベクトルである。なお、本研究では有限要素に三節点三角形要素を用い、質量行列には整合質量行列を用いた。また、 Δt_F は有限要素法の時間ステップ幅であり、 γ, β は \dot{u}_{n+1} の u_{n+1}, \ddot{u}_{n+1} への寄与の度合いを示すパラメーターである。なお、式 (4) で $\alpha=0$ とすれば、式 (4), (5) は Newmark の β 法に一致する。

式 (5) を式 (4) に代入すると、以下の $\{u_{n+1}\}$ に関する方程式を得る。

$$[\bar{K}] \{u_{n+1}\} = \{F_{n+1}\} + \{\bar{F}_{n+1}\} \quad \dots\dots\dots (6-a)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} [\bar{K}] &= \frac{1}{\beta \Delta t_F^2} [M] + (1 + \alpha) [K] \\ \{\bar{F}_{n+1}\} &= \alpha [K] \{u_n\} - [M] \{\alpha_n\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6-b)$$

である。

(3) 境界要素方程式

ここでは波動の入射を受ける半無限領域について考え、全体場を u 、散乱場を u^s 、入反射場を u^o とする。ゼロ初期条件を仮定すれば散乱場に対する境界積分方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} c_{ij}(x) u_j^s(x, t) &= - \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} p_j^o(x, t; y, \tau) u_j^s(y, \tau) d\tau d\Gamma_y \\ &+ \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u_j^o(x, t; y, \tau) p_j^s(y, \tau) d\tau d\Gamma_y \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $c_{ij}(x)$ は境界上の点 x における境界の滑らかさによる係数であり、境界が滑らかな場合 $1/2 \delta_{ij}$ となる。また、 u_j^o, p_j^o は式 (1) に対する時間依存の基本解であり、次式で与えられる¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} u_j^o(x, t; y, \tau) &= \frac{1}{2\pi\rho c_T} [f_{1ij}(r, t'; c_T) + f_{2ij}(r, t'; c_T)] \\ &\cdot H(c_T t' - r) - \frac{1}{2\pi\rho c_L} f_{2ij}(r, t'; c_L) \\ &\cdot H(c_L t' - r) \quad \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8-a)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{1ij}(r, t'; c) &= \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{t'^2 c^2 - r^2}} \\ f_{2ij}(r, t'; c) &= \frac{\delta_{ij} \sqrt{t'^2 c^2 - r^2} - r_i r_j (2t'^2 c^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{t'^2 c^2 - r^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8-b)$$

$$p_i^*(x, t; y, \tau) = \rho n_k [(c_t^2 - 2c_r^2) \delta_{ki} u_{i,m}^* + c_r^2 (u_{ij,k}^* + u_{ik,j}^*)] \dots\dots\dots (8-c)$$

式(8)において $r = |x - y|$, $t' = t - \tau$, $r_i = x_i - y_i$ であり, c_r, c_t はそれぞれ横波と縦波の伝播速度, $H(\)$ は Heaviside 関数である.

式(7)で, u_i^j, p_i^j を境界方向および時間方向に離散化し, さらに $u_i^j = u_i - u_i^0$ の関係を用いれば, 第 $n+1$ ステップ目に対し次の境界要素方程式を得る.

$$[H^1] \{u_{n+1}\} = [G^1] \{\rho_{n+1}\} + \{\bar{u}_n\} \dots\dots\dots (9-a)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \{\bar{u}_n\} &= [H^1] \{u_{n+1}^0\} - [G^1] \{\rho_{n+1}^0\} \\ &+ \sum_{m=2}^{n+1} \{ [G^m] \{\rho_{n+2-m} - \rho_{n+2-m}^0\} \\ &- [H^m] \{u_{n+2-m} - u_{n+2-m}^0\} \} \dots\dots\dots (9-b) \end{aligned}$$

であり, n ステップ目までの解と入反射場より求めることができる. また $[H^m], [G^m]$ は式(7)を離散化することにより得られる係数行列であり, $\{u_m\}, \{\rho_m\}$ は第 m ステップ目の境界節点変位ベクトルおよび表面力ベクトルである. なお, 解の安定性から, 時間方向の離散化における変位の補間関数の次数を表面力の補間関数の次数より高くとる必要があるので^{8),13)}, ここでは境界要素上で変位, 表面力共に区間線形とし, 時間方向には各ステップ間で変位は線形, 表面力は一定となるようにとった.

(4) 境界要素法と有限要素法の結合

境界要素方程式(9)は変位と表面力の関係式であるので, 有限要素方程式との結合においては, 変位と節点力の関係式に変換する必要がある. そこでまず, 式(9)の両辺に $[G^1]^{-1}$ をかけ, さらに表面力を節点力に変換する分布マトリックス $[D]$ を両辺にかける. すると境界要素方程式に対し次の有限要素型の方程式を得る.

$$[K_B] \{u_{n+1}\} = \{F_{n+1}\} + \{\tilde{F}_n\} \dots\dots\dots (10-a)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} [K_B] &= [D][G^1]^{-1}[H^1], \{F_{n+1}\} = [D]\{P_{n+1}\}, \\ \{\tilde{F}_n\} &= [D][G^1]^{-1}\{\bar{u}_n\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10-b)$$

である.

次に, 有限要素方程式(6)と有限要素型の境界要素方程式(10)とを結合する際の時間方向の処理について述べる¹⁴⁾.

まず, Δt_B と Δt_F との比を N とし, 境界要素法の時間ステップ n と $n+1$ との間を N 分割する. 次に時刻 $n\Delta t_B + i\Delta t_F (i=1, 2, \dots, N)$ における方程式を $n, n+1$ ステップ目の境界要素方程式の内挿に基づき次式のように定義する.

$$[K_B] \{u_{n+i/N}\} = \{F_{n+i/N}\} + \{\tilde{F}_{n-1+i/N}\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに, $\{u_{n+i/N}\}, \{F_{n+i/N}\}$ は時刻 $n\Delta t_B + i\Delta t_F$ における解であり, それぞれ変位, 表面力が規定された境界上の節点に対しては $n, n+1$ ステップ目の値の線形補間で与えられるものとし, $\{\tilde{F}_{n-1+i/N}\}$ も同様に次式で定義されるものとする.

$$\{\tilde{F}_{n-1+i/N}\} = \frac{N-i}{N} \{\tilde{F}_{n-1}\} + \frac{i}{N} \{\tilde{F}_n\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで $\{\tilde{F}_n\}$ は式(10-b)第3式のように $\{\bar{u}_n\}$ より与えられ, さらに $\{\bar{u}_n\}$ は式(9-b)のように第 n ステップ目までの解より与えられる. したがって, 第 n ステップ目の解が求められた段階において, $\{\tilde{F}_{n-1}\}, \{\tilde{F}_n\}$ は既知であり, 式(12)より $\{\tilde{F}_{n-1+i/N}\}$ を求めることが可能である.

また, 式(11)において結合面 Γ_c 上の変位および節点力は有限要素の変位と節点力とにそれぞれ対応させ, 次の連続条件を与えるものとする.

$$\begin{aligned} \{u_{n+i/N}^B\} &= \{u_{n+i/N}^F\}, \{F_{n+i/N}^B\} + \{F_{n+i/N}^F\} = \{0\} \\ &(\text{on } \Gamma_c) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで, $\{u^B\}, \{F^B\}$ は境界要素解, $\{u^F\}, \{F^F\}$ は有限要素解である.

式(6), (11)を式(13)の条件の下で結合することにより時刻 $n\Delta t_B + i\Delta t_F$ における次の結合方程式を得る.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} K_{B11} & K_{B12} & 0 \\ K_{B21} & K_{B22} + \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} \\ 0 & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{n+i/N}^1 \\ u_{n+i/N}^2 \\ u_{n+i/N}^3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} F_{n+i/N}^{1B} \\ 0 \\ F_{n+i/N}^{3B} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{F}_{n-1+i/N}^1 \\ \tilde{F}_{n-1+i/N}^2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{F}_{n+(i-1)/N}^2 \\ \tilde{F}_{n+(i-1)/N}^3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここで $\{u^2\}$ は結合面上の節点変位, $\{u^1\} \{u^3\}$ はそれぞれ $\{u^2\}$ 以外の境界要素および有限要素節点変位であり, 他の記号も同様の定義に従う. 式(14)より $n\Delta t_B + i\Delta t_F$ での結合解を求めることができる.

なお, 境界要素法のみを用いた場合に式(11)を適用すれば, 解は当然 $n, n+1$ ステップ目の解を内挿した

ものを与えることとなるが、有限要素法と結合した場合、結合面において式 (13) の連続条件を与えることとなるので、境界要素法の時間ステップ間における解の挙動は必ずしも線形的な変化を示さない。

3. 不整形地盤の振動解析への結合解法適用に関する検討

(1) 結合時の解の安定性に関する検討

時間領域型境界要素法の解の安定性については Cole ら¹³⁾により基礎的な考察がなされており、Fukui and Tani¹⁵⁾により外部領域問題における時間ステップ幅のとり方と解の安定性との関係などが実際の解析を通して検討されている。一方、有限要素法との結合解法の安定性については東平・吉田⁷⁾により検討されている。ここでは結合時の方程式の外力項をゼロとし、境界要素方程式における前ステップまでの解からの影響をとり除いて得られる作用素に関する基本的な議論がなされている。結合時を含め、時間領域型境界要素法の解の安定性には前ステップまでの解からの影響が重要な要因をなしており、これらの影響を含めた上での議論がさらに必要と思われるが、一般的議論は非常に困難なものと考えられ、今後検討すべき問題である。

本節においては、堆積層を有する不整形地盤の振動解析に本研究で構成した結合解法を適用する場合を対象に、結合面の位置や、H-H-T法の適用による数値的減衰の付加が結合解の安定性等に与える効果を具体的な解析を通して調べた結果について報告する。

本来、解の安定性の検討には、堆積層の幾何的形狀や物理定数など様々な条件の影響にも配慮すべきであるが、ここでは Fig.1 に示したモデルに対し、外部領域と堆積層との横波の伝播速度比を変えて計算した結果に基づき検討を行った。なお、Fig.1 (a) において a は堆積層の厚さであり、傾斜層境界の角度は 30° とし、 c_{T1} 、 c_{T2} はそれぞれ外部領域と堆積層での横波の伝播速度である。外部領域および堆積層のいずれにおいても質量密度 ρ は同一で、ポアソン比 ν は $1/3$ とした。また、入射波動 u^i は平面波とし、Fig.1 (b) に示したような Sine SV 波一波形を鉛直下方より入射させる場合を対象に計算を行なった。

一方、離散化方法は Fig.2 (a) のように層境界に結合面を設けた場合 (Mesh-1) と、Fig.2 (b) のように外部領域内に結合面を設けた場合 (Mesh-2) とを考えた。Mesh-2 のように結合面を層境界から離して設ける場合、層境界から生ずる散乱波が複雑な波動である場合に、それが結合面へ及ぼす影響を低減させることができると考えられ、解の乱れを抑える効果が期待できる。また、堆積層の部分を細分割し、外部領域の有限要素を大きく設定することができるので Mesh-1 に比べ境界要素数を

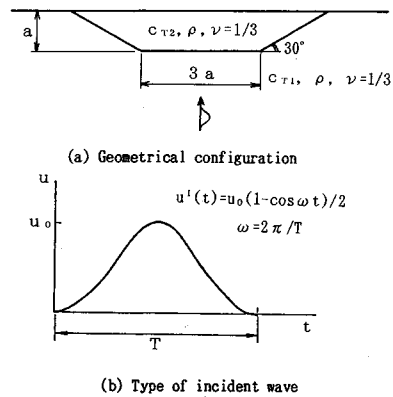
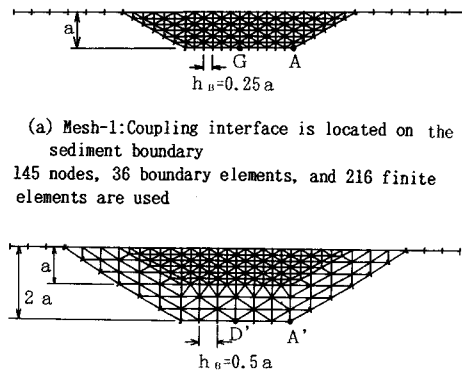


Fig.1 Analyzed condition.



(a) Mesh-1: Coupling interface is located on the sediment boundary
145 nodes, 36 boundary elements, and 216 finite elements are used
(b) Mesh-2: Coupling interface is located in the external region
190 nodes, 24 boundary elements, and 318 finite elements are used

Fig.2 Discretization with boundary and finite elements.

減らすことができ、記憶容量や計算時間節約の面からも有利といえる。

なお、時間、空間方向の離散化は基本的に波動の周期や波長を基準として設定されるべきであるが、堆積層内の波動は回折波の影響で複雑な挙動を示すと思われる。そこで本節では、入射波動を基準として考えることとし、Fig.2 の分割に対して、以下に説明する分割条件をみたすような入射波長と時間ステップ幅を設定し、その下で計算を行なうこととした。

まず、解析精度を大きく損なわないために、境界要素法に対しては時間、空間方向に入射波動の6分割程度の離散化を与えることが必要である¹⁰⁾。また、有限要素法においても同様の分割は必要と考えられるので、ここでは次の分割条件をみたすように、問題を設定する。

$$\Delta t_B \leq \frac{T}{6}, \quad h_B \leq \frac{\lambda_{T1}}{6} \dots \dots \dots (15-a)$$

$$\Delta t_F \leq \frac{T}{6}, \quad h_F \leq \frac{\lambda_{T2}}{6} \dots \dots \dots (15-b)$$

ここで、 T は入射波動の周期であり、 λ_{T1} は境界要素外

部領域での波長, h_B は境界要素長とし, 同様に λ_{T2} , h_F は有限要素により離散化される堆積層領域内での波長および要素の代表長である.

一方, 前述のように境界要素法においては $c_{T1}\Delta t_B$ を h_B と比較して短く設定する場合, 解の精度や安定性を損なう可能性がある. ここではいくつかの報告を参考に^{8),10)} Δt_B の下限値として次の条件を用いた.

$$h_B \leq 2c_{T1}\Delta t_B \dots\dots\dots (16)$$

なお, 本節では $\Delta t_B = \Delta t_F = \Delta t$ の場合について考え, 式 (15) より, $\Delta t = T/6$ と設定して検討を進めることとした. このとき, $c_{T1}T = \lambda_{T1}$ とすると式 (16) は次式のようなになる.

$$h_B \leq \frac{\lambda_{T1}}{3} \dots\dots\dots (16')$$

式 (16') は式 (15-a) がみたされれば無条件に成り立つので, $\Delta t = T/6$ の下では式 (15) より最終的に次の離散化範囲を得る.

$$h_B \leq \frac{\lambda_{T1}}{6} \dots\dots\dots (17-a)$$

$$\frac{c_{T1}}{c_{T2}} \leq \frac{\lambda_{T1}}{6h_F} \dots\dots\dots (17-b)$$

よって, 以下では式 (17) をみたとす入射波長 λ_{T1} のうちで最も波長の短い場合に対して計算を行ない, 解の安定性を検討した.

まず, Mesh-1 において, 横波の伝播速度比を $c_{T1}/c_{T2} = 1, 2, 5$ および 25 と設定し計算を行った. 実際の堆積層においては, 速度比が 25 を越える場合もあり得るが, ここではとりあえず, 上の 4 ケースについて検討する.

結合面上の節点の水平方向変位時刻歴応答を Fig.3 に示す. なお, ここでは有限要素法の時間積分法として Newmark の β 法を用い $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$ とした. 速度比が 5 以下の解においては入射波動の通過後も振動が続いているが, 特に $c_{T1}/c_{T2} = 2$ の場合には高次振動の振幅が次第に増大している. これは Fig.3 (b) のように, 波動の通過時における結合面での入射波動が他の速度比の場合に比べ変動が急激で複雑であったことや, 堆積層の剛性が外部領域のものより比較的近いため, 堆積層内で生じた回折波の影響で層境界の振動が比較的大きなものとなったことなどが原因として考えられる.

また, $c_{T1}/c_{T2} = 25$ の場合には安定な解が得られていることより, 速度比が 25 以上の場合に対する結合解は同様に安定なものになると考えられる.

次に解が不安定となった $c_{T1}/c_{T2} = 2$ の場合に対し前述の理由により解の安定化を得る目的で Mesh-2 を用いた場合と, Mesh-1 で有限要素法の時間積分法に H-H-T 法を用いた場合の 2 つのケースについて解の安定性

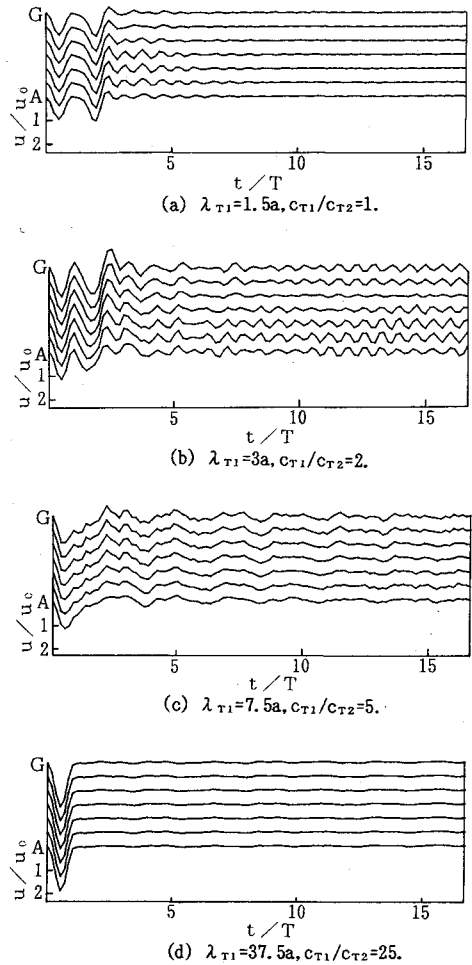
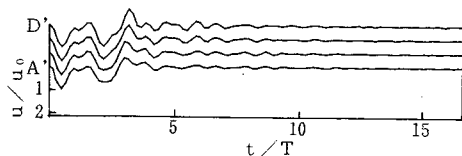


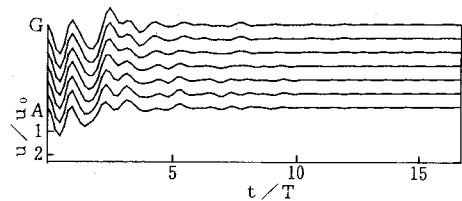
Fig.3 Horizontal displacement response at coupling interface in Mesh-1 ($\Delta t = T/6$, $\alpha = 0$, $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.25$).

を調べてみた. なお, ここでは H-H-T 法の時間積分パラメーターとして $\gamma = 0.6$, $\beta = 0.3025$, $\alpha = -0.1$ を用いた. この設定値に対しては, 時間積分の近似作用素のスペクトル半径 ρ は固有周期 T が $T > 10\Delta t$ でほぼ 1 であり, $T < 10\Delta t$ で減少しだし, その値は $T/\Delta t$ の減少と共に $\rho = 0.8i$ へ近づいて行く. スペクトル半径は各モードの減衰性を示し, $\rho < 1$ では正の減衰を生ずることとなるので, この設定においては $10\Delta t$ 以下の振動において減衰を伴うこととなる.

両ケースにおける解析結果を Fig.4 に示す. なお, 結合解の応答を比較する目的で, Mesh-2 においては層境界上の点ではなく結合面上の点, A'~D' での変位応答を図示した. いずれの場合も Mesh-1 で Newmark の β 法を用いた際に生じたような不安定振動は認められず, 安定な結果を与えている. Mesh-2 を用いた場合に安定な結果を得ることができた理由の一つには前述のように



(a) The case of Mesh-2($\alpha=0, \gamma=0.5, \beta=0.25$)



(b) The case of Mesh-1, using H-H-T method ($\alpha=-0.1, \gamma=0.6, \beta=0.3025$)

Fig.4 Horizontal displacement response at coupling interface ($\Delta t = T/6, \lambda_{T1} = 3a, c_{T1}/c_{T2} = 2$).

結合面を層境界から離すことで散乱波の結合面への影響を和らげる結果となったことが考えられる。なお、Mesh-2で他の伝播速度比に対し解析を行った結果、いずれにおいても安定な解を得ることができた。また、H-H-T法を用いた有限要素解の高次モードに減衰を付加することで結合時の解の安定性を増やすことが十分可能であることも確かめられた。

(2) 境界要素法と有限要素法の時間ステップ幅の設定に関する検討

有限要素法の時間積分法にH-H-T法を用いた場合、解は高次モードの減衰と振動周期の誤差とを伴うこととなるが、主要な振動に対するいずれの影響も時間ステップ幅 Δt_F を十分に短く設定することで解決することができる。

一方、前述のように時間領域境界要素法では解の精度、安定性の面から時間ステップ幅 Δt_B は大きくとり過ぎても小さくとり過ぎても問題があり、 Δt_B の設定には上限と下限とが与えられる。

また、2. で述べた手順で境界要素法と有限要素法を結合する場合、基本的には境界要素方程式を時間ステップ間で線形補間したものと有限要素方程式とを結合することとなる。そこで、境界要素法と有限要素法の時間ステップ幅の比 $\Delta t_B/\Delta t_F = N$ の設定の仕方が解の精度に及ぼす影響について、実際の計算を通しその傾向を調べた。なお、ここでは境界要素の時間ステップ幅は $\Delta t_B = T/12$ で一定とし、その下で Δt_F を $\Delta t_B, \Delta t_B/2, \Delta t_B/3$ と変えて計算を行なった。

また、前節に示した結果に基づき、結合面を外部領域にとる場合を想定し、Fig.5に示すような均一な領域に前節と同様の波動が入射する場合を考え、結合面上の解

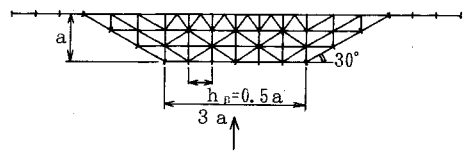


Fig.5 Discretization of homogeneous half-infinite space with boundary and finite elements.

Table 1 Influence of time increment ratio $\Delta t_B/\Delta t_F$ on the accuracy ($\Delta t_B = T/12$).

$\Delta t_B/\Delta t_F$	1	2	3
$\lambda_{T1} = 6a$	0.0333	0.0128	0.0185
12a	0.0200	0.0145	0.0189

の精度について比較検討することとした。なお、その際の精度を定量的に比較するために次式のような規格化したノルムを導入した。

$$\|E\| = \frac{\sqrt{\sum (u_{ij} - \bar{u}_{ij})^2}}{\sqrt{\sum u_{ij}^2}} \dots \dots \dots (18)$$

ここで u_{ij}, \bar{u}_{ij} はそれぞれ水平結合面上の節点 i の時間ステップ j における水平方向変位の真の解と数値解とであり、和は各節点について境界要素法の時間ステップで50ステップまでとった。

入射波長 $\lambda_{T1} = 6a, 12a$ に対して得られた誤差ノルム $\|E\|$ を Table 1 に示す。いずれの波長に対しても $\Delta t_B/\Delta t_F = 2$ の場合が最も精度の良い結果を与えており、特に $\lambda_{T1} = 6a$ の場合に $\Delta t_B/\Delta t_F = 2$ とすることで $\|E\|$ が約 1/3 にまで改善されているのがわかる。また、 $\Delta t_B/\Delta t_F = 1$ において、 $\lambda_{T1} = 6a$ の場合と $12a$ の場合とで精度に差が認められるが、これは入射波長の違いによる空間方向の離散化の相対的な差によるものと考えられる。

なお、 $\Delta t_B/\Delta t_F = 3$ の場合にむしろ精度が低下する結果となったが、この理由としては結合の際に用いた境界要素方程式が相前後する境界要素時間ステップでの方程式の線形補間より与えられるものであり、 Δt_B 間での応答をほぼ線形なものに拘束することとなるため、 $\Delta t_B/\Delta t_F$ を大きくとり過ぎてもむしろ精度の低下につながる結果となったことが考えられる。

以上に示したように、ここで用いた例題においては $\Delta t_B/\Delta t_F = 2$ とする場合に最も精度の良い結果を得ることができた。なお、ここに得られた結果だけからすべての場合に対しても $\Delta t_B/\Delta t_F = 2$ の場合に誤差が最小になるとは直ちに結論づけられないが、本論文で構成した結合過程の有する特徴として、基本的に $N > 1$ とすることは精度向上に対し効果があること、ただし、 $\Delta t_B/\Delta t_F$ を大きくして行った場合、解の精度がそれに伴い改善されるとは限らず、誤差が最小となる時間ステップ幅比が存在

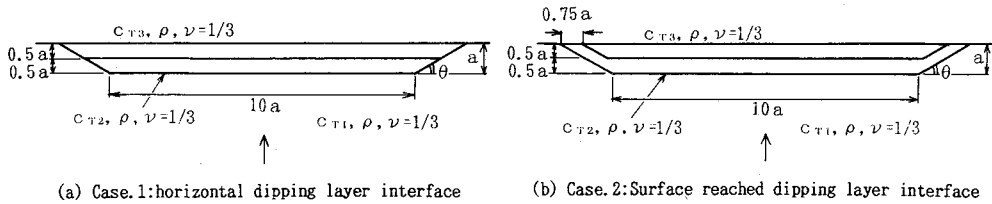


Fig.6 Geometrical configuration of valleys consist of two dipping layers.

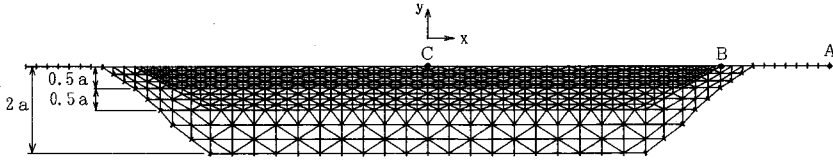


Fig.7 Discretization with boundary and finite elements in Case.1 ($\theta=30^\circ$): 680 nodes, 50 boundary elements, and 1228 finite elements.

Table 2 Comparison of the accuracy for several incident wave length ($\Delta t_B = T/12$, $\Delta t_B/\Delta t_F = 2$).

λ_{T1}/a	3	4	5
$\ E\ $	0.0389	0.0182	0.0147
λ_{T1}/a	6	12	
$\ E\ $	0.0128	0.0145	

し得ることが確かめられた。

(3) 空間方向の離散化が計算精度へ与える影響

堆積層を有する不整形地盤の振動解析においては入射波動が境界要素領域から有限要素領域へ円滑に伝わるように要素分割に配慮することも必要である。そこで、まず初めに Fig.5 と同様の方法で有限要素領域を鉛直方向に 5 層に等分割した場合と、結合面近傍を鉛直方向に細分割し、やはり 5 層で離散化した場合とに対し、解の精度の比較を行った。波長 $\lambda_{T1} = 3a$ の波動の入射に対し比較した結果、等分割では $\|E\| = 0.0185$ であったのに対し、不等分割では $\|E\| = 0.0241$ であり、ここで用いた分割に関する限り、同一自由度の下では有限要素領域を等分割の方が良好な結果を与えた。

そこで次に、有限要素領域を鉛直方向に 3 等分割した Fig.5 の離散化の下で入射波長 λ_{T1} を変え、相対的に入射波動に対する空間方向の離散化条件を変化させて結合時の解の精度へ及ぼす影響について調べた。なお、ここで用いた入射波長は $\lambda_{T1}/a = 3, 4, 5, 6, 12$ の 5 通りであり、波動が伝播する鉛直方向の有限要素長 h_F との比はそれぞれ $\lambda_{T1}/h_F = 9, 12, 15, 18, 36$ である。また、いずれにおいても時間ステップ幅の設定は $\Delta t_B = T/12$, $\Delta t_B/\Delta t_F = 2$ とし 50 ステップまで計算をし、水平結合面上の節点での水平方向変位応答の精度に基づき比較を行った。

各計算結果における精度 $\|E\|$ は Table 2 に示すとおり

である。値に多少のばらつきはあるが、入射波長を増加させるに伴い誤差は減少し、ほぼ一定の値に収束して行く様子がわかる。ここでは入射波動に対する時間方向の分割条件をいずれの波長に対しても同一に設定してあるため、入射波長と要素長との比を増大させて行った場合、 $\|E\|$ は時間方向の離散化の影響により生ずる誤差へと近づいて行くこととなる。

なお、ここで用いた解析条件においては、 $\lambda_{T1}/a = 3$ と $\lambda_{T1}/a = 4$ との間で大きな差が認められ、 $\lambda_{T1}/a \geq 4$ での $\|E\|$ に対しては 0.015 前後の値に収束する結果が得られた。

4. 結合解法による不整形地盤の非定常波動解析

ここでは前章の検討結果に基づいて構成した結合過程の適用性を確認する目的で、不整形地盤の非定常解析に結合解法を適用した結果について示す。

不整形地盤における波動解析はこれまで数多く行われて来ている^{16), 17)}。特に堆積層を有する不整形地盤においては堆積層内での波動の増幅の他に、傾斜層境界より発生する表面波による局所的な波動を伴う可能性があり、工学的に重要な問題である¹⁸⁾。

そこで解析例として Fig.6 (a), (b) に示すように二層の堆積層を有する不整形地盤に Fig.1 と同様の SV 波が鉛直下方より入射する場合について考え、層境界端の形状の違いが応答に与える影響について調べた。また層境界の形状としては上下の堆積層の境界が水平なもの Case.1 と両端において層境界が地表面まで達しているもの Case.2 とを考え、層境界端の傾斜角度には 30° と 60° の 2 通りを用いた。なお解析にあたり、各層の波動の伝播速度比は $c_{T1}/c_{T2} = 2$, $c_{T1}/c_{T3} = 4$, 質量密度 ρ は一定、ポアソン比 ν は $1/3$, 入射波長は $\lambda_{T1} = 4a$, $\Delta t_B = T/12$, $\Delta t_B/\Delta t_F = 2$ とした。また Fig.7 に Case.1 ($\theta = 30^\circ$) の場合を例とした要素分割の様子を示す。

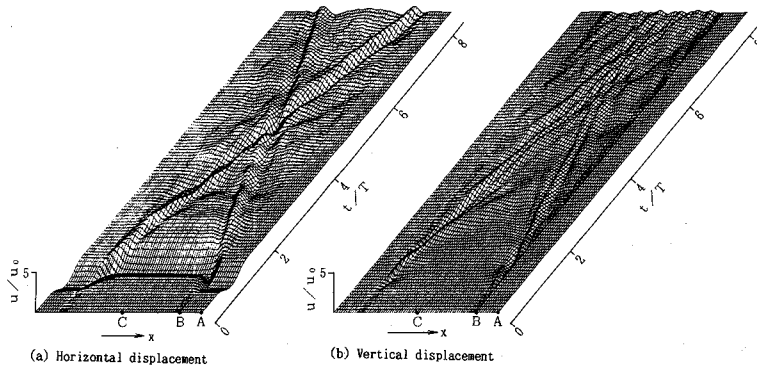


Fig.8 Surface displacement response in case.1 ($\theta=30^\circ$).

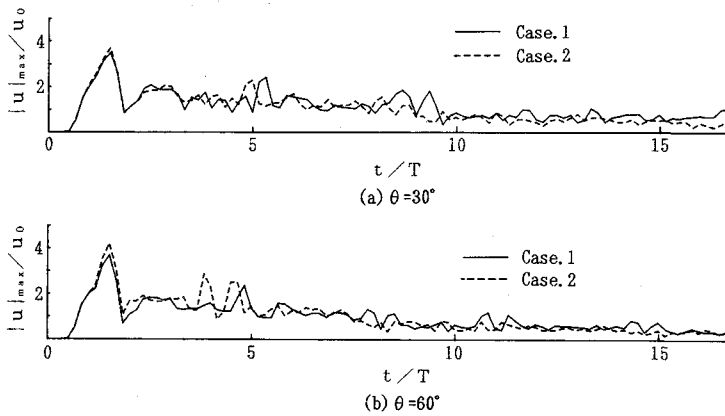


Fig.9 Influence of geometrical condition of dipping layer boundary on maximum displacement response.

Case.1 ($\theta=30^\circ$)における地表面の水平方向変位の時刻歴応答は Fig.8 のようであった。Fig.8 (a) より、入射した波動が通過した後に傾斜層境界付近から局所的な波が発生し、反対側の傾斜層境界へ向かって伝わって行く様子がわかる。Fig.8 (b) の鉛直変位応答を見ると、傾斜層境界付近から発生した波動が堆積層中央へ向かって伝播しており、表面波が発生している様子が得られている。また、この解析条件の下では入射波動通過後の堆積層内の振動は主に表面波による局所的なものであり、波動が地表面と層境界との間を往復することにより生ずる振動は比較的小さいことがわかる。

次に地表面での各時間ステップにおける絶対最大水平方向変位を Case.1, 2 に対し $\theta=30^\circ$ の場合にプロットした結果を Fig.9 (a) に、また $\theta=60^\circ$ の場合にプロットしたものを Fig.9 (b) に示す。いずれの場合においても、最初のピークは入射波動の通過時に対応しており、次のピークは左右両端から発生した表面波が中央で重なり合った際のものであり、その次のピークは表面波が反対側の傾斜層境界端に到達した際に生じたものである。最初のピークに対し、特に $\theta=60^\circ$ の場合に Case.2 に

おいて大きめの値を示しているが、表面波が反対側の傾斜境界端に到達して以降、いずれの傾斜角度の場合に対しても Case.2 において顕著なピークが現れておらず、特にその傾向は $\theta=60^\circ$ の場合に比較的顕著であることがわかる。Case.2 のように堆積層境界が地表面にまで達している場合、地表面付近において最も内側の堆積層から外部領域に至るまでの各層の間の伝播速度比が Case.1 に比べ小さくなるので、堆積層から外部領域への波動の伝達率は相対的に高くなる。その結果表面波の有する波動エネルギーの多くが層境界端から外側へ通過して行き¹⁸⁾それ以降顕著なピークが現れなくなったものと考えられる。

このように、地表面近くでの層境界の形状の違いが表面波動の継続時間等に大きく影響を与えていることがわかる。

5. 結 論

時間領域での境界要素法と有限要素法の結合解法を堆積層を有する不整形地盤の非定常波動応答解析に適用する場合に焦点を絞り、解の安定性や精度について計算例

を通して検討を行った。

その結果、堆積層を有限要素法で、外部領域を境界要素法で表現する場合に両解法の結合面を層境界より離し、外部領域内にとることで境界要素数を減らすことが可能となるばかりでなく、解の安定性を増すことにも効果が期待できることがわかった。さらに有限要素法の時間積分法に H-H-T 法を用い有限要素解の高次モードに減衰を付加することで結合時の解をより安定なものにすることが可能であることが確かめられた。

また、境界要素法の時間ステップ幅 Δt_B を有限要素法の時間ステップ幅 Δt_F の整数倍となるようにとり、連続した 2 つのステップにおける境界要素方程式を内挿したものと有限要素方程式とを結合する手順を構成し、時間ステップ幅の比 $\Delta t_B / \Delta t_F$ が計算精度に及ぼす影響について検討した。その結果、上述のようにして結合を行った場合、基本的に解の精度は向上するが、 $\Delta t_B / \Delta t_F$ を増加させて行っても、それに伴い誤差は一樣に減少せず、一連の時間ステップ比の中で最小の誤差を与えるものが存在し得ることがわかった。なお、検討結果では $\Delta t_B / \Delta t_F = 2$ に対し誤差は最小となったが、時間ステップ幅の比をさらに大きく設定すると有限要素解の挙動に線形的な拘束を与えることとなり、これが逆に精度低下を招いたものと考えられる。

さらに、入射波動に対する時間方向の分割条件を一定とし、入射波長を変え、要素長と入射波長との比を相対的に変化させることで、空間方向の分割条件の違いが結合時の応答精度に及ぼす影響について調べた。

参 考 文 献

- 1) Karabalis, D.L. and Beskos, D.E. : Dynamic response of 3-D flexible foundations by time domain BEM and FEM, *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, Vol.4, pp.91~101, 1985.
- 2) Alyagshi Eilouch, M.N. and Sandu, R.S. : A mixed method for transient analysis of soil-structure interaction under SH-motion, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.14, pp.499~516, 1986.
- 3) Mossessian, T.K. and Dravinski, M. : Application of hybrid method for scattering of P, SV, and Rayleigh waves by near-surface irregularities, *Bull. Seism. Soc. Am.* Vol. 77, pp.1784~1803, 1987.
- 4) 上杉真平・大津政康 : BEM-FEM 結合法による二次元弾性定常波動場の解析, *土木学会論文集*, 第 398 号, pp. 295~301, 1988.
- 5) Estorff, O. and Kausel, E. : Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.18, pp.1065~1075, 1989.
- 6) 福井卓雄 : 二次元動弾性問題の時間積分境界要素法による解析, *構造工学における数値解析法シンポジウム*, 第 12 巻, pp.197~202, 1988.
- 7) 東平光生・吉田 望 : 時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析, *土木学会論文集*, 第 410 号, pp.395-404, 1989.
- 8) Mansur, W.J. and Brebbia, C.A. : Further developments on the solution of the transient scalar wave equation. Chap.4 in : *Topics in Boundary Element Research*, Vol.2, Ed. C.A. Brebbia, Springer-Verlag, 1985.
- 9) Newmark, N.M. : A method of computation for structural dynamics, *Proc. of A.S.C.E.*, Vol.EM3, pp.67~94, 1959.
- 10) 吉田 裕・阿部和久 : 面内波動問題時間領域型境界要素法の実用化に向けての一検討, *土木学会論文集*, 第 416 号, pp.265~274, 1990.
- 11) Hilber, M.H., Hughes, T.J.R. and Taylor, R.L. : Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.5, pp.283~292, 1977.
- 12) Mansur, W.J. and Brebbia, C.A. : Transient elastodynamics, Chap.5 in : *Topics in Boundary Element Research*, Vol.2, Ed. C.A. Brebbia, Springer-Verlag 1985.
- 13) Cole, D.M., Kosloff, D.D. and Minster, J.B. : A numerical boundary integral equation method for elastodynamics. I, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.68, pp.1331~1357, 1978.
- 14) 阿部和久 : 動弾性解析のための境界要素・有限要素時間領域結合手法, *構造工学論文集*, Vol.36A, pp.245-254, 1990.
- 15) Fukui, T. and Tani, K. : Error and stability of numerical solution of time marching boundary element method in wave problems, *Advances in Boundary Elements*, Vol.2, pp.221~230, 1989.
- 16) 大槻 明・山原 浩・春海佳三郎 : レーリー波による不整形地盤の挙動, *土木学会論文報告集*, 第 337 号, pp. 27~36, 1983.
- 17) Dravinski, M. and Mossessian, T.K. : Scattering of plane harmonic P, SV, and Rayleigh waves by dipping layers of arbitrary shape, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.77, pp.212-235, 1987.
- 18) Bard, P. and Bouchon, M. : The seismic response of sediment-filled valleys. Part 2. The case of incident P and SV waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.70, pp.1921~1941, 1980.

(1990. 5. 25・受付)

APPLICATION OF TIME DOMAIN BOUNDARY-FINITE ELEMENT HYBRID METHOD TO DYNAMIC ANALYSIS OF SEDIMENT-FILLED VALLEYS

Kazuhisa ABE and Yutaka YOSHIDA

This paper presents several investigations on application of time domain boundary-finite element hybrid method to dynamic problems of sediment-filled valleys. For the sake of stability of the solution, numerical dissipation is introduced into the higher modes of finite element solution by employment of Hilber-Hughes-Taylor (H-H-T) method and the coupling interface is located in the exterior region far from the dipping boundary. In time domain coupling, the interpolation of boundary element equations in two successive time steps is combined with the finite element equation. Under the above-mentioned coupling procedure, influences of the time increment ratio and element size on the accuracy of the solution are examined.
