

平面骨組の有限ひずみ・有限変位理論の解に 収束する2種類の数値解法と精度特性

—剛体ばねモデルによる手法と剛体変位除去の手法—

後藤芳顯*・吉光友雄**・小畑 誠***・
西野文雄****

構造物の幾何学的非線形問題を解析する場合、有限ひずみ・有限変位理論によるのが厳密であるが、解析手続は複雑になる。ここでは、実用的な手法である剛体変位除去の手法や剛体ばねモデルによって平面骨組の有限ひずみ・有限変位問題を数値的に扱う時の定式化、収束性、精度特性を理論的に検討し、接線剛性行列の対称性を保証するには、微小ひずみでなく有限ひずみ下の定式化を行う必要があることも示した。

Keywords: corotational method, Rigid-Bodies-Spring model, accuracy, geometrical non-linearity

1. ま え が き

変位の大きさに制限をつけない平面骨組の有限変位問題の解析は棒理論の枠内で厳密に定式化された有限ひずみ・有限変位理論¹⁾によるのが正確であるが、支配方程式が高次非線形となるため、大部分は微小ひずみ条件下のもの¹⁾で、有限ひずみ・有限変位問題を扱える実用的かつ汎用的な数値解析手法ならびに、その理論的な精度特性についてはほとんど説明されていないのが現状である。

このような問題を扱えると考えられる手法として、その定式化が最も容易なものは剛体ばねモデルによる手法^{2)~8)}を挙げることができよう。この手法の基本としては、剛体と集中ばねから成る要素ではりを物理近似するもので、主として剛体の運動を正確に評価するだけで、微分方程式を解くことなく簡単に離散化式である剛性方程式を誘導できる。また、弾性物理モデルであるため、剛体運動の評価が正確であれば、接線剛性行列は対称となる。しかしながら、剛体ばねモデルは、上述するように、連続体であるはりを大胆に物理近似するため、制度的にかなり劣るのではないかという認識が一般にあるのも事実であり、平面骨組の汎用解析法としては必ずしも広範囲に利用されていない。

一方、現状で大きな変位領域まで骨組を解析し得る汎用的手法として、最も広く利用されているのは、移動座標による剛体変位除去の手法(近年 Co-rotational Method とよばれている)であるといえよう。この手法の精度特性については、すでに文献 9)~11) で検討

しているが、内容としては微小ひずみ・有限変位問題へ収束する場合が中心で、有限ひずみ・有限変位問題へ収束する場合については、若干触れられているだけである。より厳密な有限ひずみ・有限変位問題を一般的に扱える剛体変位除去の手法については、著者らが示したものを除き、その精度、効率性はいうまでもなく、どの手法が有限ひずみ・有限変位の解に収束するかについても、ほとんど明らかにされていないのが現状である。

本論文では、上記2種類の手法が平面骨組の有限ひずみ・有限変位問題を汎用的に扱える実用的な数値解析法であるという観点から、その収束性ならびに精度特性を理論ならびに数値計算の両面から、詳細に検討することで、この種の解析を効率的に行うための指針を与えることを目的とする。まず、2種類の剛体ばねモデルについてその収束性と精度を検討する。次に要素分割長無限小で有限ひずみ・有限変位問題に収束し得る実用的な3種類の剛体変位除去の手法を明示し、これらの収束性と精度特性を検討する。ここでは、より実状に即した検討という意味から、剛体変位除去の手法では FEM 近似に基づく場合も対象としている。以上の結果より、剛体ばねモデルによる手法と剛体変位除去の手法の精度を対比させながら、効率的な有限ひずみ・有限変位問題の解析を行うための資料を提供する。

2. 剛体ばねモデルによる手法

Bernoulli-Euler はりの解析を対象とした剛体ばねモデルとしては、次の2種類の要素を用いるものに大別される。1つは、図-1に示すように、はりと同じ軸剛性 EA と無限大の曲げ剛性を有するトラスがピン部分において集中回転ばね K_M で結合されたものであり^{2)~7)}、いま1つは剛棒が集中ばね K_M および集中回転ばね K_M で連結されたものである⁸⁾。後者のモデルにおいては、直角保持の仮定を満足するように、図-1b) に示す変形

* 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

** 正会員 工修 三菱重工業(株)

*** 正会員 Ph. D. 名古屋工業大学講師 工学部社会開発工学科

**** 正会員 Ph. D. 東京大学教授 工学部土木工学科

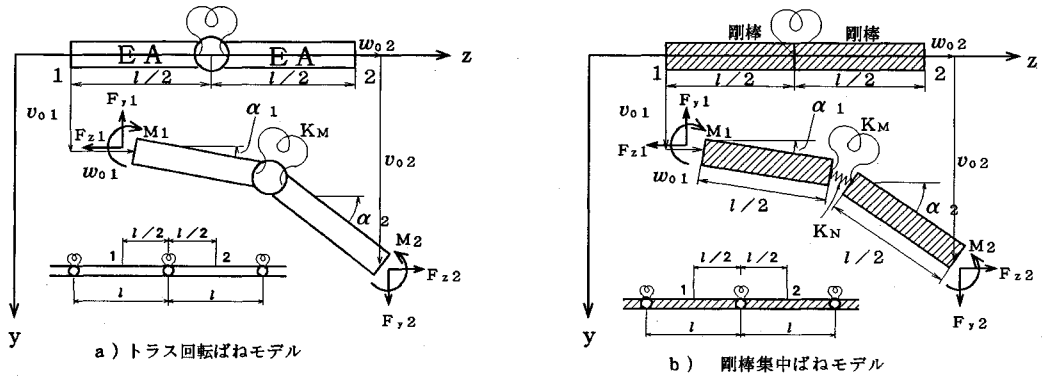


図-1 剛体ばねモデル要素

後において、節点1, 2を結んだ線分と、集中ばね連結点を結んだ線分とが平行になる条件が付加される。以下、便宜上、それぞれのモデルをトラス回転ばねモデル、剛棒集中ばねモデルとよぶことにする。図-1のモデルより、離散化式として解析に用いる1, 2節点の物理量の関係式は、剛体のつり合いとばねの変形を考慮することで、容易に得られる。これらは、全体座標方向成分で表わした節点力 (F_{y1} , F_{y2}) と (F_{z1} , F_{z2}) に関する自明の関係を除き、それぞれのモデルに対応して次のようになる。

〈トラス回転ばねモデル〉

$$\begin{aligned}
 v_{02} &= v_{01} + (\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)l/2 + \{F_{y1}(\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2) \\
 &\quad + F_{z1}(\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\cos\alpha_2)\}l/(2EA) \\
 w_{02} &= w_{01} - l + (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)l/2 + \{F_{y1}(\sin\alpha_1\cos\alpha_1 \\
 &\quad + \sin\alpha_2\cos\alpha_2) + F_{z1}(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2)\}l/(2EA) \\
 \alpha_2 &= \alpha_1 - \{M_1 + (F_{y1}\cos\alpha_1 - F_{z1}\sin\alpha_1)l/2\}/K_M \\
 &\quad - \{(F_{y1}^2 - F_{z1}^2)\sin(2\alpha_1)/4 \\
 &\quad + F_{y1}F_{z1}\cos(2\alpha_1)/2\}l/(EAK_M) \\
 M_2 &= M_1 + F_{y1}(l + w_{02} - w_{01}) - F_{z1}(v_{02} - v_{01}) \\
 &\quad \dots\dots\dots (1-a\sim d)
 \end{aligned}$$

ここに

$$K_M = EI/l \dots\dots\dots (1-e)$$

〈剛棒集中ばねモデル〉

$$\begin{aligned}
 v_{02} &= v_{01} + (\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)l/2 + [F_{y1}\{1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)\} \\
 &\quad + F_{z1}\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]l/(2K_N) \\
 w_{02} &= w_{01} - l + (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)l/2 + [F_{y1}\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\
 &\quad + F_{z1}\{1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)\}]l/(2K_N) \\
 \alpha_2 &= \alpha_1 - \{M_1 + (F_{y1}\cos\alpha_1 - F_{z1}\sin\alpha_1)l/2\}/K_M \\
 &\quad - \{(F_{y1}^2 - F_{z1}^2)\sin(\alpha_1 + \alpha_2)/4 \\
 &\quad + F_{y1}F_{z1}\cos(\alpha_1 + \alpha_2)/2\}/(K_N K_M) \\
 M_2 &= M_1 + F_{y1}(l + w_{02} - w_{01}) - F_{z1}(v_{02} - v_{01}) \\
 &\quad \dots\dots\dots (2-a\sim d)
 \end{aligned}$$

ここに

$$K_N = EA/l, K_M = EI/l \dots\dots\dots (2-e, f)$$

式(1), (2)を比較すると、モーメントに関する離散化式が一致する以外は両モデルによる離散化式は微妙に異なっている。なお、これらの式はいずれも弾性物理モデルより厳密に誘導されているので、節点物理量の増分をとることによって得られる接線剛性行列は対称となる。

断面力成分については、上記2種類のモデルいずれも節点力の全体座標方向成分を用い次のように計算できる。

$$\begin{Bmatrix} V_k \\ N_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{yk} \\ F_{zk} \end{Bmatrix} \quad (k=1, 2) \dots\dots (3)$$

3. 有限ひずみ・有限変位問題の解に収束する剛体変位除去の手法

著者らが明らかにしたように^{9),11)}、剛体変位除去後の局所系の支配方程式として、微小変位の式や、はり・柱の式をそのまま用いる剛体変位除去の手法では、表-1に示すような有限ひずみ・有限変位の支配方程式の解に収束せず、同表中のつり合い式において軸線の伸張変形を無視した微小ひずみ・有限変位の解に収束する。有限ひずみ・有限変位の解に収束するには、剛体変位として除去できない変形の影響を局所系の支配方程式に考慮しなければならない。具体的には、図-2に示す局所移動座標系を用い、局所系の方程式として微小変位の式に相当する最低次のもので考えれば、次のように少なくともモーメントのつり合い式に、軸方向変形の影響を考慮することが必要となる。

$$\{M'/(1 + \bar{w}_0)\}' = 0, N' = 0 \dots\dots\dots (4-a, b)$$

ここに (\cdot)' は $d(\cdot)/dz$ を意味する。

上記事実は、著者らによって文献9)に提示されてい

表-1 はりの有限変位理論と支配方程式

はりの理論	つり合い式	構成則
a) 有限ひずみ・有限変位	$(N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha)' = 0$ $(N \cos \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha)' = 0$	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $M = EI \alpha'$
b) 微小ひずみ・有限変位	$(N \sin \alpha + M' \cos \alpha)' = 0$ $(N \cos \alpha + M' \sin \alpha)' = 0$	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $M = EI \alpha'$

$\sqrt{g_0} = \sqrt{(1+w_0')^2 + v_0'^2}$ 、 $(\cdot)' = d(\cdot)/dz$

る。一方、式(4-a, b)のような局所系の支配微分方程式として陽な表示は行っていないが、等価な定式化は、それ以前にOran¹²⁾によっても示されている。ただ、Oranは接線剛性行列の対称化を目的としており、有限ひずみ・有限変位の解への収束に対しては何ら言及していない。しかしながら、有限ひずみ・有限変位問題への収束と接線剛性行列の対称性は補遺に示すように密接に関係している。

Oranの定式化を要約すると次のようになる。まず、はり・柱の微分方程式に基づき、要素両端の節点モーメントと剛体回転除去後の局所系の節点回転角の離散化関係式を求める。次に \bar{y} 方向の節点力 \bar{F}_{y1} , \bar{F}_{y2} と局所系の節点回転角の関係については、はり・柱の微分方程式によらず、先に求めた節点モーメントと局所系の節点回転角の離散化関係式を用い、要素の軸方向変形の効果を補正した次のつり合い式によって求める。

$$\bar{F}_{y1} = \bar{F}_{y2} = (M_2 - M_1) / (l + \bar{w}_{02}) \dots \dots \dots (5)$$

ここに \bar{w}_{02} については、局所系で、はり・柱の式を用いる場合はBowlingの効果を次のように考慮する。

$$\bar{w}_{02} = \frac{\bar{F}_{z1}}{EA} l - \frac{1}{2} \int_{z1}^{z1+l} \left(\frac{d\bar{v}_0}{dz} \right)^2 dz \dots \dots \dots (6)$$

微小変位の式をもとに、さらに式(6)のBowlingの効果を見捨て、Oranと同様の定式化を行えば、得られる局所系の離散化式は、式(4-a, b)を用いた場合と一致する。このことから、式(4-a, b)を用いる定式化とOranの定式化とは、本質的には等価であるといえる。

なお、式(5)において、 $\bar{w}_{02} \ll l$ として \bar{w}_{02} を無視すれば^{13), 14)}、局所系の微小変位の式あるいは、はり・柱の式で直接節点力を評価した場合と等価になり、解は要素分割長無限小で、つり合い式において軸線の伸張変形を見捨てた微小ひずみ・有限変位の解に収束する^{9), 11)}。

ここで、精度検討の対象とする有限ひずみ・有限変位の解に収束する実用的な剛体変位除去の手法としては、局所系の式として、最低次の非線形式である式(4-a, b)を用いる場合と、より高次のはり・柱の式を用いるOranの定式化を取り上げる。Oranの定式化では局所系の離散化式がはり・柱の式より解析的に導かれている

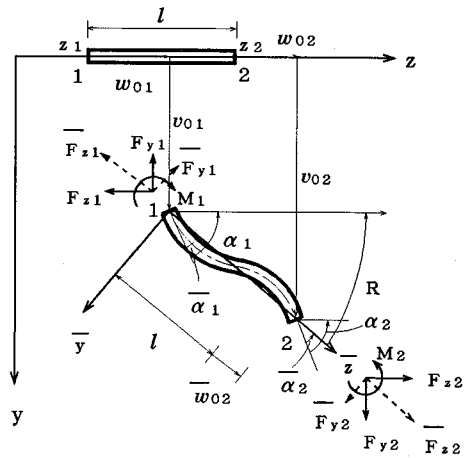


図-2 剛体変位除去の手法とはり要素

が、ここでは、さらに通常の3次-1次のはりの変位関数によりFEM近似を行う場合についても検討する。これは、剛体変位除去の手法で大変位領域まで精度よく解析するには、部材を有限要素に細分割せねばならず⁹⁾、解析解を用いずとも簡単なFEM近似で十分である可能性が考えられるからである。以上、本研究で取り上げる剛体変位除去の手法で用いる局所系の離散化式を剛性方程式の形式で表示すると次のようになる。

<微小変位の式>^{9), 11)}

$$\begin{aligned} M_1 &= 4(EI/l) \bar{\alpha}_1 + 2(EI/l) \bar{\alpha}_2 \\ -M_2 &= 2(EI/l) \bar{\alpha}_1 + 4(EI/l) \bar{\alpha}_2 \\ \bar{F}_{z1} = \bar{F}_{z2} &= (EI/l) \bar{w}_{02} \\ \bar{F}_{y1} = \bar{F}_{y2} &= 6(EI/l) (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) / (l + \bar{w}_{02}) \end{aligned} \dots \dots \dots (7-a \sim d)$$

<はり柱の式(解析解)>¹²⁾

$$\begin{aligned} M_1 &= 4(EI/l) \phi_3 \bar{\alpha}_1 + 2(EI/l) \phi_4 \bar{\alpha}_2 \\ -M_2 &= 2(EI/l) \phi_4 \bar{\alpha}_1 + 4(EI/l) \phi_3 \bar{\alpha}_2 \\ \bar{F}_{z1} = \bar{F}_{z2} &= (EA/l) \{ \bar{w}_{02} + l(\beta_1 \bar{\alpha}_1^2 + 2\beta_2 \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 + \beta_1 \bar{\alpha}_2^2) \} \\ \bar{F}_{y1} = \bar{F}_{y2} &= -(EI/l) (4\phi_3 + 2\phi_4) (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) / (l + \bar{w}_{02}) \end{aligned} \dots \dots \dots (8-a \sim d)$$

ここに

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \{ 2\bar{F}_{z1} (l^2/ED) \phi_4 + 8(2\phi_3 + \phi_4)^2 (\phi_4 - 1) \} \\ &\quad / \{ 16\bar{F}_{z1} (l^2/ED) (2\phi_3 + \phi_4) \} \\ \beta_2 &= - \{ 2\bar{F}_{z1} (l^2/ED) \phi_4 - 8(2\phi_3 + \phi_4)^2 (\phi_4 - 1) \} \\ &\quad / \{ 16\bar{F}_{z1} (l^2/ED) (2\phi_3 + \phi_4) \} \end{aligned} \dots \dots \dots (8-e, f)$$

ϕ_3, ϕ_4 は安定関数で \bar{F}_{z1} の正負で次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{F}_{z1} &\leq 0 \\ \phi_3 &= \gamma l (\sin \gamma l - \gamma l \cos \gamma l) / (4\phi_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4 &= \gamma l(\gamma l - \sin \gamma l) / (2\phi_c) \\ \phi_c &= 2 - 2\cos \gamma l - \gamma l \sin \gamma l \\ &\dots\dots\dots (8-g\sim i) \end{aligned}$$

$\bar{F}_{z1} \geq 0$

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \gamma l(\gamma l \cosh \gamma l - \sinh \gamma l) / (4\phi_i) \\ \phi_4 &= \gamma l(\sinh \gamma l - \gamma l) / (2\phi_i) \\ \phi_i &= 2 - 2\cosh \gamma l + \gamma l \sinh \gamma l \\ &\dots\dots\dots (8-j\sim l) \end{aligned}$$

$$\gamma = \sqrt{|\bar{F}_{z1}| / EI} \dots\dots\dots (8-m)$$

〈はり柱の式 (FEM 近似)〉

$$\begin{aligned} M_1 &= 4(EI/l) \bar{\alpha}_1 + 2(EI/l) \bar{\alpha}_2 \\ &\quad + (EA/30)(4\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2) \bar{w}_{02} \\ &\quad + (EAl/280)(8\bar{\alpha}_1^3 - \bar{\alpha}_2^3 - 3\bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_2 \\ &\quad + 2\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2^2) \\ -M_2 &= 2(EI/l) \bar{\alpha}_2 + 4(EI/l) \bar{\alpha}_1 \\ &\quad - (EA/30)(\bar{\alpha}_1 - 4\bar{\alpha}_2) \bar{w}_{02} \\ &\quad - (EAl/280)(\bar{\alpha}_1^3 - 8\bar{\alpha}_2^3 - 2\bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_2 \\ &\quad + 3\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2^2) \\ \bar{F}_{z1} = \bar{F}_{z2} &= (EA/l) \{ \bar{w}_{02} + l(2\bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \\ &\quad + 2\bar{\alpha}_2^2) / 30 \} \\ \bar{F}_{y1} = \bar{F}_{y2} &= - \{ (6EI/l + EA \bar{w}_{02} / 10) (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) \\ &\quad + (EAl/280) (7\bar{\alpha}_1^3 + 7\bar{\alpha}_2^3 \\ &\quad - \bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2^2) \} / (l + \bar{w}_{02}) \\ &\dots\dots\dots (9-a\sim d) \end{aligned}$$

式 (9-d) で \bar{w}_{02} を無視すると文献 13), 14) と一致し, 先に述べたように表-1 の微小ひずみ・有限変位の式の解に収束する。

文献 11) でも示したように, 局所系方向の節点力の成分 ($\bar{F}_{yk}, \bar{F}_{zk}$) と断面力成分 (V_k, N_k) は区別する必要があり, 断面力成分は次式で評価することになる。

$$\begin{Bmatrix} V_k \\ N_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \bar{\alpha}_k & -\sin \bar{\alpha}_k \\ \sin \bar{\alpha}_k & \cos \bar{\alpha}_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_{yk} \\ \bar{F}_{zk} \end{Bmatrix} \quad (k=1, 2) \dots\dots (10)$$

また, 固定座標系 (y, z) の変位成分と局所移動座標系 (\bar{y}, \bar{z}) の変位成分の関係は,

$$\begin{Bmatrix} v_{02} - v_{01} \\ w_{02} - w_{01} + l \\ \alpha_2 - \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos R & \sin R & 0 \\ -\sin R & \cos R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{w}_{02} + l \\ \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (11-a)$$

$$R = \alpha_1 - \bar{\alpha}_1 \dots\dots\dots (11-b)$$

なお, 上記定式化では剛体回転除去後の回転角 $\bar{\alpha}$ の評価式としてはすでに文献 9), 11) で明らかにしたように最も単純で精度のよい線形の評価式 $\bar{v}_0' = \bar{\alpha}$ を使用している。

ここで示した剛体変位除去の手法の定式化では, 接線剛性行列はすべて対称となるが, 式 (7)~(9) で \bar{w}_{02} を無視すれば, 逆にすべて非対称となる。

4. 理論的な精度検討

(1) 精度検討手法の概要

理論的な精度検討手法の概略は文献 9), 11) に準ずる。すなわち, 剛体ばねモデルによる手法, 剛体変位除去の手法によって有限要素 1-2 に関する離散化式が, それぞれ得られるが, これらをすべて, 1 節点の物理量 $Q_j|_1$ を 2 節点の物理量 $Q_j|_2$ へ伝達する形式の有限要素長 l に関する次のべき級数表現へ変換する。

$$Q_j|_2 = Q_j|_1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_j^{(n)}|_1 (l^n/n!) \dots\dots\dots (12)$$

ここに, $Q_j^{(n)}|_1$ は 1 節点における物理量 Q_j の n 階の微係数で, 1 節点における物理量 $Q_j|_1$ ($j=1\sim 6$) で表わされる。物理量 Q_j としては, 重要なものということで, 全体座標系の並進変位, 回転成分ならびに断面力成分とする。すなわち

$$\{Q_j\} = \{v_0, w_0, \alpha, V, N, M\} \dots\dots\dots (13)$$

次に, 厳密解とみなす Lagrange 表現の有限ひずみ・有限変位の高次非線形支配方程式から Taylor の展開法により式 (12) と同じ表現の離散化式を導く。そして, 剛体ばねモデルによる手法, 剛体変位除去の手法の精度は式 (12) のべき級数係数に関して, Lagrange 表現の有限ひずみ・有限変位の支配方程式によるものと, いかに高次まで一致するかによって統一的に評価される。

Lagrange 表現の高次非線形微分方程式から Taylor 展開法により式 (12) を導く過程は文献 9) ですでに説明しているのでここでは, 剛体ばねモデルによる手法, 剛体変位除去の手法による離散化式から, 式 (12) の形へ変換する方法を以下に示す。

(2) 伝達形離散化式の誘導

a) 剛体ばねモデル

まず, トラス回転ばねモデルに対応する式 (1-a~d) の変換について説明する。回転角 α に関する離散化式 (1-c) は式 (12) の形の離散化式になっているので, この式については, 変換する必要はない。並進変位 v_0, w_0 に関する離散化式, 式 (1-a, b) は右辺に α_2 を含んでいるので, 式 (12) の形にするには, この α_2 に式 (1-c) を代入し, l についてべき級数展開する。さらにモーメント M の展開式は式 (12) の形に変換された v_{02}, w_{02} を式 (1-d) の右辺に代入することで得ることができる。

次に, 剛棒集中ばねモデルについて述べる。このモデルについては, 式 (2-c) からわかるように, 回転角に関する離散化式には右辺に α_2 が含まれているので, まずこの式を変換する必要がある。これには式 (2-c) の

α_2 を l の関数と考え、両辺を l で順次微分し、 $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_2^{(2)}$, $\alpha_2^{(3)}$... を計算し $l \rightarrow 0$ として、 $l=0$ での各微係数を求める。これより、 α_2 は式 (12) の形に展開できる。後はトラス回転ばねモデルと同様の手順で、並進変位 v_0 , w_0 , モーメント M の順に、式 (12) の形の離散化式へ展開できる。

断面力成分については、両モデルとも式 (3) と (F_y , F_z) 成分に関する 1-2 節点間の自明の関係を用い、さらに、すでに得た $\sin \alpha_2$, $\cos \alpha_2$ の展開式を代入することによって、べき級数展開式が得られる。なお、これらの展開式に含まれる (F_{y1} , F_{z1}) は式 (3) の逆変換を用いることによりすべて (V_1 , N_1) の成分へ展開できる。

以上、剛体ばねモデルにより得られた各物理量のべき級数係数 $Q^{(n)}|_1$ を Lagrange 表現の厳密な支配微分方程式から得られたものと、さらに後で誘導する剛体変位除去の手法によるものと比較する形で表-2 に示す。表-2 では、簡単のため並進変位の一方の成分 v_0 , 回転成分 α , 軸力成分 N と曲げモーメント M について示し、残りの並進変位成分 w_0 とせん断力成分 V については、一貫性状がそれぞれ v_0 , N と同様であるので省略している。

b) 剛体変位除去の手法

局所系の式として、微小変位相当の式、式 (7-a~d) を用いた場合の式 (12) の形への展開はすでに文献 11) に説明しているの、ここでは、はり・柱相当の式の解析解である式 (8-a~d) および FEM 近似解である式 (9-a~d) を用いた場合の展開について述べる。上記のように微小変位相当、はり・柱相当という表現を用いているが、これは、式 (7-d), (8-d), (9-d) において、節点力成分 \bar{F}_y を微小変位の式やはり・柱の式から直接計算するのではなく、式 (5) によって要素の軸方向変形の効果を補正することにより計算するためである。この表現は以後においても用いる。

まず、 l の関数となる局所系の変位量 $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, \bar{w}_{02} について l に関するべき級数展開を行うために、べき級数係数となる $l=0$ での微係数を計算する。このとき、 $\bar{\alpha}_1$ は、節点 1 での値ではあるものの $\bar{z}=l$ で $\bar{v}_2=0$ なる拘束条件により規定されるので l の関数になる。したがって、微係数の計算では、初期値に対応する M_1 , \bar{F}_{y1} , \bar{F}_{z1} を定数、他の物理量 $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, \bar{w}_{02} を l の関数と考えて式 (8-a~d), または式 (9-a~d) 中の両辺を低次から高次へ l で順次微分することにより求める。このようにして求めた微係数の $l=0$ での値を $l \rightarrow 0$, $\bar{\alpha}_1 \rightarrow 0$, $\bar{\alpha}_2 \rightarrow 0$ の条件より計算し、局所系の各物理量 l^3 項までの展開を示すと解析解、FEM 近似の差によらず、次のように全く同一の表現になる。

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{M_1}{2b}l + \frac{\bar{F}_{y1}}{3b} \left(1 + \frac{\bar{F}_{z1}}{a}\right) \frac{l^2}{2} - \frac{\bar{F}_{z1}M_1}{4b^2} \frac{l^3}{3!} + o(l^4)$$

$$\bar{\alpha}_2 = -\frac{M_1}{2b}l - \frac{2\bar{F}_{y1}}{3b} \left(1 + \frac{\bar{F}_{z1}}{a}\right) \frac{l^2}{2} + \frac{\bar{F}_{z1}M_1}{4b^3} \frac{l^3}{3!} + o(l^4)$$

$$\bar{w}_{02} = \frac{\bar{F}_{z1}l}{a} - \frac{1}{4} \left(\frac{M_1}{b}\right)^2 \frac{l^3}{3!} + o(l^4)$$

..... (14-a~c)

ここに

$$a = EA, b = EI \text{..... (14-e, f)}$$

以上の局所系の展開式をもとに、式 (13) の成分に関する展開式を求める。変位成分については式 (11) の関係が、また断面力成分については式 (5) および式 (10) から得られる次の式が基本となる。

$$M_2 = M_1 + (l + \bar{w}_{02}) \bar{F}_{y1} \text{..... (15)}$$

$$\begin{Bmatrix} V_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2) & \sin(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2) \\ -\sin(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2) & \cos(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ N_1 \end{Bmatrix}$$

..... (16)

これらの式に式 (14) を代入し、 l について展開するが、このとき式 (12) の形となるには式 (14) に含まれる \bar{F}_{y1} , \bar{F}_{z1} を V_1 , N_1 に変換することが必要である。この変換は、式 (14-a, b) と式 (10) の逆変換とを交互に繰り返し用いることで、 l に関するより高次の展開式として求めることができる。上記のようにして l^3 までの展開式として求められた \bar{F}_{y1} , \bar{F}_{z1} の V_1 , N_1 への変換式、およびこの手続きの中で得られる $\sin \bar{\alpha}_1$, $\cos \bar{\alpha}_1$ の展開式を以下に示す。

$$\begin{aligned} \bar{F}_{y1} = & V_1 + \frac{N_1 M_1}{2b} l - \left\{ \frac{V_1}{4} \left(\frac{M_1}{b}\right)^2 - \frac{N_1 V_1}{3b} \left(1 + \frac{N_1}{a}\right) \right\} \frac{l^2}{2} \\ & + \left\{ \left(\frac{M_1}{4b^2} + \frac{N_1 M_1}{2ab^2}\right) (N_1^2 - 2V_1^2) - N_1 \left(\frac{M_1}{2b}\right)^3 \right\} \frac{l^3}{3!} \\ & + o(l^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{z1} = & N_1 - \frac{V_1 M_1}{2b} l - \left\{ \frac{V_1}{4} \left(\frac{M_1}{b}\right)^2 + \frac{V_1}{3b} \left(1 + \frac{N_1}{a}\right) \right\} \frac{l^2}{2} \\ & - \left\{ \frac{3V_1 M_1 N_1}{4b^2} + \frac{V_1 M_1}{2ab^2} (2N_1^2 - V_1^2) - V_1 \left(\frac{M_1}{2b}\right)^3 \right\} \frac{l^3}{3!} \\ & + o(l^4) \end{aligned}$$

..... (17-a, b)

$$\begin{aligned} \sin \bar{\alpha}_1 = & \frac{M_1}{2b} l + \frac{V_1}{3b} \left(1 + \frac{N_1}{a}\right) \frac{l^2}{2} + \left[\frac{M_1}{2b} \left\{ \frac{N_1}{2b} + \frac{1}{ab} (N_1^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - V_1^2) \right\} - \left(\frac{M_1}{2b}\right)^3 \right] \frac{l^3}{3!} + o(l^4) \end{aligned}$$

$$\cos \bar{\alpha}_1 = 1 - \left(\frac{M_1}{2b}\right)^2 \frac{l^2}{2} - \frac{M_1 V_1}{b^2} \left(1 + \frac{N_1}{a}\right) \frac{l^3}{3!} + o(l^4)$$

..... (18-a, b)

このようにして幾分複雑な手続きを経て得られた各物

表-2 各解析手法による物理量の微係数

a) v_0 の微係数

各種解析法			$v_0' _1$	$v_0'' _1$	$v_0''' _1$
Lagrange表現の有限ひずみ・有限変位の支配方程式			λs	$-\lambda \kappa c - V_1 \kappa s/a$	$-\lambda^2 V_1 c/b - \lambda \kappa^2 s + 2V_1 \kappa^2 c/a - N_1 \kappa^2 s/a - \lambda V_1^2 s/ab$
剛体ばねモデル	剛棒集中ばねモデル				$-\frac{3}{2} \lambda^2 V_1 c/b - \frac{3}{2} \lambda \kappa^2 s + \frac{3}{2} V_1 \kappa^2 c/a - \frac{3}{2} \lambda V_1^2 s/ab$
	トラス回転ばねモデル				$-\frac{3}{2} \lambda^2 V_1 c/b - \frac{3}{2} \lambda \kappa^2 s + 3V_1 \kappa^2 c/a - \frac{3}{2} N_1 \kappa^2 s/a - \frac{3}{2} \lambda V_1^2 s/ab$
剛体変位除去手法	局所系配方程式	微小変位相当の式			$-\lambda^2 V_1 c/b - \frac{3}{4} \lambda \kappa^2 s + \frac{3}{2} V_1 \kappa^2 c/a - \frac{3}{4} N_1 \kappa^2 s/a - \lambda V_1^2 s/ab$
		はり柱相当の式	$-\lambda^2 V_1 c/b - \lambda \kappa^2 s + \frac{3}{2} V_1 \kappa^2 c/a - \frac{1}{2} N_1 \kappa^2 s/a - \lambda V_1^2 s/ab$		
		解析解 FEM			

b) α の微係数

各種解析法			$\alpha' _1$	$\alpha'' _1$	$\alpha''' _1$
Lagrange表現の有限ひずみ・有限変位の支配方程式			$-\kappa$	$-\lambda V_1/b$	$-\lambda N_1 \kappa/b + V_1^2 \kappa/ab$
剛体ばねモデル	剛棒集中ばねモデル				$-\frac{3}{2} N_1^2 \kappa/ab + \frac{3}{2} V_1^2 \kappa/ab$
	トラス回転ばねモデル				0
剛体変位除去手法	局所系配方程式	微小変位相当の式			$-\frac{3}{2} \lambda N_1 \kappa/b + \frac{3}{2} V_1^2 \kappa/ab$
		はり柱相当の式	$-\lambda N_1 \kappa/b + \frac{3}{2} V_1^2 \kappa/ab - \frac{1}{2} N_1^2 \kappa/ab$		
		解析解 FEM			

c) N の微係数

各種解析法			$N' _1$	$N'' _1$	$N''' _1$
Lagrange表現の有限ひずみ・有限変位の支配方程式			$-V_1 \kappa$	$-N_1 \kappa^2 - \lambda V_1^2/b$	$V_1 \kappa^3 - 4 \lambda V_1 N_1 \kappa/b + V_1^3 \kappa/ab$
剛体ばねモデル	剛棒集中ばねモデル				$V_1 \kappa^3 - 3 \lambda V_1 N_1 \kappa/b + \frac{3}{2} V_1^3 \kappa/ab - \frac{3}{2} N_1^2 V_1 \kappa/ab$
	トラス回転ばねモデル				$V_1 \kappa^3 - 3 \lambda V_1 N_1 \kappa/b$
剛体変位除去手法	局所系配方程式	微小変位相当の式			$V_1 \kappa^3 - \frac{9}{2} \lambda V_1 N_1 \kappa/b + \frac{3}{2} V_1^3 \kappa/ab$
		はり柱相当の式	$V_1 \kappa^3 - 4 \lambda V_1 N_1 \kappa/b + \frac{3}{2} V_1^3 \kappa/ab - \frac{1}{2} N_1^2 V_1 \kappa/ab$		
		解析解 FEM			

d) M の微係数

各種解析法			$M' _1$	$M'' _1$	$M''' _1$
Lagrange表現の有限ひずみ・有限変位の支配方程式			λV_1	$\lambda N_1 \kappa - V_1^2 \kappa/a$	$\lambda^2 V_1 N_1/b - \lambda V_1 \kappa^2 - 3V_1 N_1 \kappa^2/a - \lambda V_1^3/ab$
剛体ばねモデル	剛棒集中ばねモデル				$\frac{3}{2} \lambda^2 V_1 N_1/b - \frac{3}{2} \lambda V_1 \kappa^2 - \frac{3}{2} V_1 N_1 \kappa^2/a - \frac{3}{2} \lambda V_1^3/ab$
	トラス回転ばねモデル				$\frac{3}{2} \lambda^2 V_1 N_1/b - \frac{3}{2} \lambda V_1 \kappa^2 - \frac{9}{2} V_1 N_1 \kappa^2/a - \frac{3}{2} \lambda V_1^3/ab$
剛体変位除去手法	局所系配方程式	微小変位相当の式			$\lambda^2 V_1 N_1/b - \frac{3}{4} \lambda V_1 \kappa^2 - \frac{9}{4} V_1 N_1 \kappa^2/a - \lambda V_1^3/ab$
		はり柱相当の式	$\lambda^2 V_1 N_1/b - \lambda V_1 \kappa^2 - 2V_1 N_1 \kappa^2/a - \lambda V_1^3/ab$		
		解析解 FEM			

注: $\kappa = M_1/EI$, $\lambda = \sqrt{g_0} = 1 + N_1/EA$, $s = \sin \alpha_1$, $c = \cos \alpha_1$, $EA = a$, $EI = b$

理量の展開式の3次までのべき級数係数を厳密解ならびに剛体ばねモデルと比較する形で表-2に示す。

(3) 理論的な精度特性

剛体ばねモデルによる手法,あるいは剛体変位除去の手法で計算される式(13)に示す物理量の精度特性は,(1)で述べたように,各物理量に関する式(12)のべき級数係数,すなわち,微係数が,厳密解と比較して,いかに高次項まで一致するかで知ることができる。表-2には各種解析法によって得られた物理量の微係数を具

体的に示しているが,表-3には,これに基づき厳密解によるものと一致する最高次の微係数の次数をとりまとめている。さらに,通常の骨組では,中心軸線の伸張変形が微小であることを考慮し,その極端な場合として,表-3の()内には,中心軸線が不伸張である場合の一致状況も示している。なお,この場合の物理量の微係数はすでに得た中心軸線伸張の場合の表-2に示す微係数から, $EA \rightarrow \infty$ あるいは $\sqrt{g_0} = 1$ とすることによって誘導できる。

この表-3より検討すると、中心軸線の伸張変形が無視できない一般の場合には、剛体ばねモデル、剛体変位除去の手法にかかわらず、いずれも微係数はLagrange表現の有限ひずみ・有限変位の支配方程式に基づく厳密解と、2次の項まで一致する。したがって、表-3中どの手法も要素分割長無限小で有限ひずみ・有限変位の厳密解に収束するとともに、厳密解に対して簡易Runge-Kutta法レベルの2次の近似解となることがわかる。

一方、中心軸線の伸張変形が無視できる場合には、剛体ばねモデル、局所系に微小変位相当の式を用いた剛体変位除去の手法では軸線の伸張を無視した厳密解に対して2次の近似解のみであるが、はり・柱相当の式を用いた剛体変位除去の手法は、解析解、FEM近似によらず、Runge-Kutta法レベルの4次の近似解となり、他の数値解析法に比べかなり高精度となる。このような軸線の伸張が微小で無視できるときには、式(5)で \bar{w}_{02} を無視するいわゆる微小ひずみ・有限変位の解に収束する剛体変位除去の手法^{9),11),13),14)}でも扱うことができる。

しかしながら、この場合、文献11)で示したように、局所系の支配方程式としてBowlingを考慮したはり・柱の式を用いても表-3に示す物理量(V, N), M, (v_0, w_0), α の微係数は、厳密解とそれぞれ、3次、2次、4次、3次までしか一致しない。すなわち、本論文で示したように、局所系でのモーメントのつり合いに要素の軸方向変形 \bar{w}_{02} を考慮した正確な定式化を行うと、有限ひずみ・有限変位の解に収束するとともに、軸線不伸張の場合の精度も大幅に向上することがわかる。

次に、変位が微小な場合、いわゆる微小変位問題における精度を検討してみる。この場合の、各解析手法により計算される物理量の微係数は、表-2に示す有限ひずみ・有限変位の微係数に対して非線形項を無視することによって得ることができる。このようにして得られた各物理量の微係数の厳密解との一致性状を表-4に示す。さらに、この表中〈 〉には、各物理量の厳密解の1に関する次数を示しており、この数値と各数値解析法による厳密解との一致次数が同一の場合、厳密解と数値解が完全に一致することを意味している。表-4より当然のことではあるが、微小変位の式、はり・柱の式を局所系の式として用いる剛体変位除去の手法は厳密解と一致する。一方、剛体ばねモデルでは、y方向変位以外の物理量は厳密解と一致するがy方向変位については、2次までしか一致しない。このことは、剛体ばねモデルの各変位成分の自由度が3で、これを表す関数は、高々2次関数であることから理解できよう。

このような結果をもとに、骨組の有限ひずみ・有限変位問題の実用的な数値解析法の精度特性について考察する。本論文で検討対象とした剛体ばねモデルによる手法

表-3 厳密解と一致する最高次の物理量の微係数

各種数値解析法			V, N	M	v_0, w_0	α
剛体ばねモデル	剛棒集中ばねモデル		2 (2)	2 (2)	2 (2)	2 (2)
	トラス回転ばねモデル		2 (2)	2 (2)	2 (2)	2 (2)
剛体変位除去の手法	局所系支配方程式	微小変位相当の式	2 (2)	2 (2)	2 (2)	2 (2)
		はり・柱解析解相当の式	2	2	2	2
		FEM	(4)	(4)	(4)	(4)

() : 軸線不伸張の場合

ならびに剛体変位除去の手法は、厳密解に対していずれも2次の近似解となり、理論的な精度は同レベルである。しかしながら、実際の骨組の特性を考慮した、中心軸線不伸張の条件下、および微小変位の条件下の精度を総合してみると剛体変位除去の手法において、局所系の式に、はり・柱相当の式を用いる場合の精度が最も優れているといえる。この議論は、軸線不伸張の条件下においては、微小ひずみ・有限変位の解に収束する剛体変位除去の手法も含めて成り立つ。一方、2種類の剛体ばねモデルは、表-2よりいずれの条件下においても厳密解に対して常に2次の近似解となる。すなわち、その精度は、局所系にはり・柱相当の式を用いた剛体変位除去の手法と比較して、明らかに劣るが、局所系に微小変位相当の式を用いる場合とはほぼ等価であるといえる。ここでの検討は、剛体変位除去のための局所座標系として一般的な、変位系の要素節点1, 2方向にz軸を選ぶ場合を対象としたが、節点1での変形後の中立軸接線方法にz軸を選ぶ場合、文献9)~11)で明らかにしたように、剛体変位除去の手法の精度は低下する。特に、この場合、局所系の式として、微小変位相当の式を用いると、軸線の不伸張の条件下においてもEuler法レベルの1次の近似解にしかならず、このような剛体変位除去の手法の精度は、剛体ばねモデルによる手法よりも低下し、厳密解に対して十分な収束が得られない場合もあり得る。

5. 数値解析による精度検証

ここでは、剛体ばねモデルによる手法と剛体変位除去の手法について、4.で明らかにした理論的な精度特性を数値的に検証し、その定量的な把握を行うことを目的とする。

精度比較の基準となる厳密解には、著者が文献15), 16)ではりの有限ひずみ・有限変位の式から誘導した、楕円積分表現の閉じた解を用いる。また、解析対象とする構造物としては、幾何学的非線形性に部材軸力が大きな影響を与えることを考慮して、図-3に示す圧縮軸力ならびに引張軸力が卓越する2種類の簡単な構造物を選ぶ。図-3(a)の片持はりでは、一定の微小端部モー

表-4 微小変位下の物理量の微係数の一致性状

各種数値解法		V, N <0>	M <1>	v_0 <3>	w_0 <1>	α <2>
剛体ばねモデル	剛棒集中ばねモデル	0	1	2	1	2
	トラス回転ばねモデル	0	1	2	1	2
剛体変位除去手法	局所系配方式 微小変位相当の式	0	1	3	1	2
	はり・柱相当の式 解析解 FEM	0	1	3	1	2

() : 厳密解の l に関する次数

メント作用下で、軸圧縮力を増加させたときの、また図-3 (b) に示す両端ピン固定のはりでは、スパン中央に作用する鉛直荷重を増加させたときのそれぞれの非線形挙動を解析する。解析する構造の諸元としては l/\sqrt{IA} で表わされる細長比に関して 10, 100 の2種類のもの considering する。

以上の構造の非線形挙動を解析した結果として、有限ひずみの影響がより大きいと考えられる細長比 10 の場合について、要素分割数と近似解法の厳密解への収束状況を図-4 に示す。図中には当該荷重での構造の変形状態ならびに比較のため、微小ひずみ・有限変位の式の解析解^{15), 16)} の値も記入している。収束状況を検討した載荷荷重レベルとしては、構造の変形状態からわかるように、幾何学的非線形性が大きく現われる場合を選んでいる。なお、細長比 100 の場合は図示していないが、近似解法の収束状況は、細長比 10 の場合とほぼ同様である。

図-4 より、まず、微小ひずみ・有限変位の解との対比からわかるように、理論検討どおりいずれの近似手法の解も有限ひずみ・有限変位の解に収束する。

さらに、精度の観点からみると、局所系の離散化式にはり・柱相当の式の解析解を用いる剛体変位除去の手法の精度が最も優れ、ついで、はり・柱相当の式の FEM 近似解を用いた場合の精度がよい。特に、局所系ではり・柱相当の式の解析解を用いると、部材を 3 要素程度に分割するだけでいずれも厳密解へ収束している。一方、局所系に微小変位相当の式を用いる剛体変位除去の手法と、2 種類の剛体ばねによる手法の精度はほぼ同等であるが、局所系にはり・柱相当の式を用いた剛体変位除去の手法の精度に比べると劣り、厳密解に収束するには、部材を 10 要素には分割せねばならない。

以上のように、数値計算例では各近似手法により、厳密解への収束性は異なる。この精度特性の根拠は表-3 の中心軸線の伸縮を考慮する一般的な場合のべき級数係数の厳密解への一致性状からは明瞭ではないが、中心軸線の伸張が小さく曲げ変形が卓越するはり特有の変形性状を考慮すると明らかになる。すなわち、数値計算での精度特性は上記変形特性の極端な場合である軸線不伸張

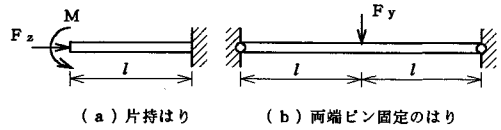


図-3 解析対象

の棒材に対する表-3 に示す精度特性とほぼ一致している。

6. まとめ

平面骨組の有限変位解析では、棒理論の枠内で正確に定式化された有限ひずみ・有限変位理論を用いるのが厳密であるが、その支配方程式は高次非線形となり、この式から、直接何らかの数学的手法で汎用的な変位法として離散化するのは非常に繁雑で実用的でない。したがって、何らかの物理的な近似により解析するのがより現実的である。ここでは、物理的な近似手法として、剛体ばねモデルによる手法と剛体変位除去の手法を取り上げ、まず、どのような定式化を行えば、有限ひずみ・有限変位問題を扱えるかを言及した。次に、これらの精度特性を理論ならびに、数値計算の両面から明らかにし、効率的な有限ひずみ・有限変位解析を行うための資料を提示した。得られた主な結果を以下にまとめる。

(1) 剛体ばねモデルによる手法では、ばねに対しては既存の値を用い、トラスあるいは剛体の運動を正確に評価すれば、有限ひずみ・有限変位問題を扱い得る。

(2) 剛体変位除去の手法では、剛体運動を正確に評価し、要素の軸方向変形の影響をモーメントに関するつり合いに考慮すれば有限ひずみ・有限変位問題を扱え、接線剛性行列も対称となる。一方、この影響を無視すれば、微小ひずみ・有限変位問題の解となり、接線剛性行列は非対称となる。

(3) 棒材の中心軸線の変形が大きい場合、剛体ばねモデルによる手法ならびに、ここで扱った実用的な剛体変位除去の手法の範囲では、いずれも、有限ひずみ・有限変位問題の解に対し、簡易 Runge-Kutta 法レベルの 2 次の近似解となり、理論的な精度に差はない。

(4) 現実の骨組では、部材の中心軸線の変形は小さく、また変位もそれほど大きくないと考えられるが、このような条件下では、剛体変位除去の手法の精度はかなり向上する。すなわち中心軸線の変形が十分無視できるとき、局所系に、はり・柱相当の式を用いる剛体変位除去の手法では、解析解、FEM 近似によらず Runge-Kutta 法レベルの 4 次の近似解となる。また、変位が微小な場合、剛体変位除去の手法はいずれも厳密解を与える。なお、中心軸線不伸張の場合は、微小ひずみ・有限変位の解に収束する剛体変位除去の手法によっても解析できるが、本文で示したような有限ひずみ・有限変位問

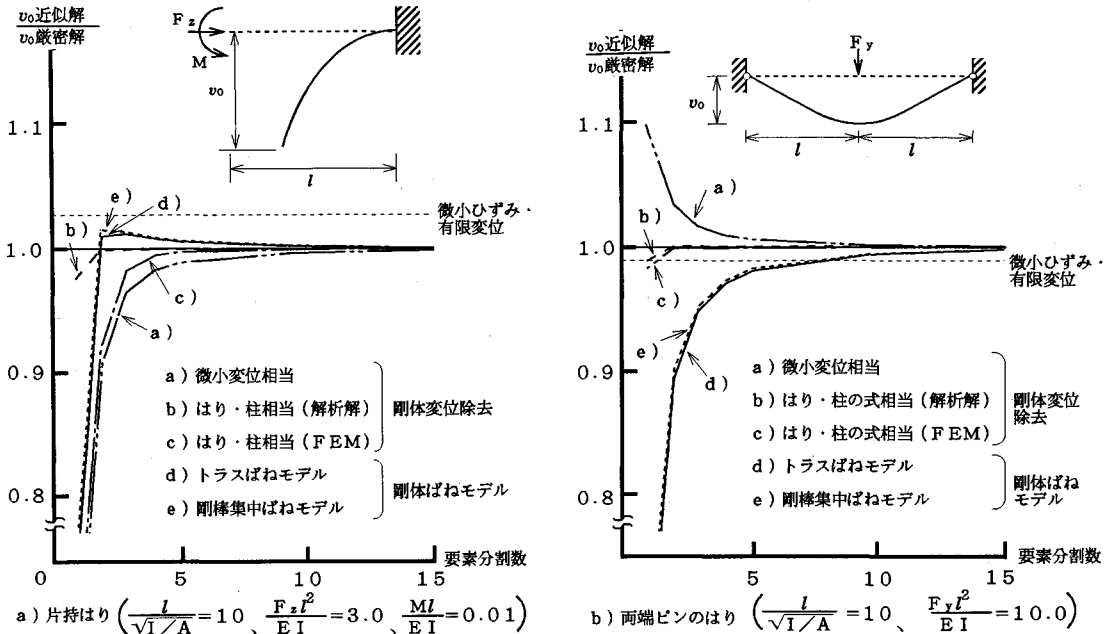


図-4 収束性の数値的検討

題を扱得るより正確な定式化を行った方が精度は向上する。

(5) 剛体ばねモデルによる手法は、現実の骨組を考慮した条件下においても2次の近似解のままであり、局所系にはり・柱相当の式を用いる剛体変位除去の手法に比べると精度はかなり劣る。しかしながら、局所系の式に微小変位相当の式を用いる場合とは、変位が小さいときを除きほぼ同程度の精度は有している。

補遺 (接線剛性行列の対称性と有限ひずみ・有限変位問題への収束)

はりの有限ひずみ・有限変位理論¹⁾では、はりの仮定以外近似が導入されていないため、表-1 a) に示すLagrange表現の支配微分方程式を与えるポテンシャルエネルギー関数が存在する。したがって、剛体変位除去の手法が要素分割長無限小で有限ひずみ・有限変位の解に収束する場合、その接線剛性行列が対称となる可能性は理解できよう。事実、 $Ai^{17)$ によって、剛体変位除去の手法で式(7-a, b)を用いた場合のポテンシャルエネルギーの収束性が確認されている。

一方、表-1 b) に示す微小ひずみ・有限変位理論の場合、変位場は厳密であるのに対し、つり合い式では軸線の伸張が無視されているため、変位場とつり合い式との統一がとれず、ポテンシャルエネルギー関数が存在しない。つまり、微小ひずみ・有限変位の支配方程式から得られる接線剛性行列は非対称となり、当然ながら、これに収束する剛体変位除去の手法(式(5))において、

w_{02} を無視する手法)の接線剛性行列も対称とならない。上記の場合ポテンシャルエネルギー関数を存在させるためには、軸線の不伸張性を変位場においても考慮すれば良いが、この場合はもはや微小ひずみ・有限変位理論ではなく軸線不伸張の理論となる。

参考文献

- 1) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，第237号，pp.11～26，1975年5月。
- 2) Harrison, H.B.: Post-buckling Analysis of Non-Uniform Elastic Columns, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.7, pp.195～210, 1973.
- 3) Miller, R.E.: Numerical Analyses of a Generalized Plane Elastica, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.15, pp.325～332, 1980.
- 4) El-Naschie, M.S., Wu, C.W. and Wifi, A.S.: A Simple Discrete Element Method for the Initial Post-Buckling of Elastic Structures, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.26, pp.2049～2060, 1988.
- 5) Coulter, B.A. and Miller, R.E.: Loading, Unloading and Reloading of a Generalized Plane Plastica, Vol.28, pp.1645～1660, 1989.
- 6) 近藤一夫・川井忠彦：低次の形状関数を用いた梁柱の座屈および大撓み問題の有限要素解析，日本造船学会論文集，第142号，pp.197～207，昭和52年。
- 7) 吉田 博・関 謙二・梶川康男：剛体ばねモデルを用いた伝達マトリックスによる平面骨組の大変形弾性解析，土木学会論文集，第356号/I-3，pp.507～515，1985年4月。
- 8) 伊藤文人・野上邦栄・尾崎浩明：剛体棒要素モデルによ

- るアーチの面内座屈解析, 構造工学論文集, Vol. 33 A, 1987年3月.
- 9) 後藤芳顕・長谷川彰夫・西野文雄: 平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第331号, pp.33~44, 1983年3月.
 - 10) 後藤芳顕・山下時治・春日井俊博・松浦 聖: 平面棒材の有限変位解析の精度に関する数値的検証, 構造工学論文集, Vol. 33 A, pp.15~26, 1987年3月.
 - 11) 後藤芳顕・春日井俊博・西野文雄: 局所移動座標の選択が平面骨組の有限変位解析の精度に及ぼす影響, 土木学会論文集, 第386号, pp.311~320, 1987年10月.
 - 12) Oran, C.: Tangent Stiffness in Plane Frames, *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol.99, No.ST 6, pp.973~985, June, 1973.
 - 13) Jennings, A.: Frame Analysis including Change of Geometry, *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol.94, No.ST 3, pp.627~644, March, 1968.
 - 14) 前田幸夫・林 正・中村 守: 増分法による平面骨組の大変形解析の加速計算法, 土木学会論文報告集, 第223号, pp.1~9, 1974年3月.
 - 15) Goto, Y., Yamashita, T. and Matsuura, S.: Elliptic Integral Solutions for Extensional Elastica with Constant Initial Curvature, *Proc. of JSCE*, No.386, I-8, pp.83~93, Oct. 1987.
 - 16) Goto, Y., Yoshimitsu, T. and Obata, M.: Elliptic Integral Solutions of Plane Elastica with Axial and Shear Deformations, *Int. J. Solids Structures*, Vol.26, No.4, pp.375~390, 1990.
 - 17) Ai, M. and Nishino, F.: On Convergence of Geometrically Nonlinear Discretization at Limit Element Division, *Proc. of JSCE*, No.374, I-6, pp.141~150, Oct. 1986.
- (1980.4.24・受付)

ACCURACY OF THE NUMERICAL METHODS FOR THE ANALYSIS OF PLANE FRAMES CONSIDERING FINITE DISPLACEMENTS AND FINITE STRAINS

Yoshiaki GOTO, Tomoo YOSHIMITSU,
Makoto OBATA and Fumio NISHINO

It is accurate to use the theory of finite displacements and finite strains for the analysis of geometrical nonlinearity of structures. However, the governing equation for this theory becomes highly nonlinear and its direct use makes the solution procedure very much complicated. So approximate numerical methods, respectively referred to as the corotational method and the method with the Rigid Bodies-Spring Model, are often used to simplify the solution procedure for the framed structures. Herein, we precisely examine their theoretical accuracy as well as the convergence to the exact solutions. Based on this result, we further discuss an efficient method to be adopted in the analysis of frames considering finite displacements and finite strains.