

# せん断補強筋を有する鉄筋コンクリートばりの せん断耐力評価に関する解析的研究

## ANALYTICAL STUDY ON THE SHEAR CAPACITY OF REINFORCED CONCRETE BEAMS WITH WEB REINFORCEMENTS

鈴木基行\*・姜 錫和\*\*・尾坂芳夫\*\*\*

By Motoyuki SUZUKI, Suck Hwa KANG and Yoshio OZAKA

The purpose of this study is theoretically to clarify the ultimate shear strengths and the deformations of reinforced concrete beams with web reinforcement, subjected to combined bending moment and shear. To achieve it, ultimate equilibrium method based on the energy principle is applied. The proposed equations which are derived by equilibrium condition of force and moment for the failure surface on the ultimate state are compared with test results and good agreement is noted. And, compatibility condition of strains on the shear element is considered to predict the failure mode of beams. Also, the interaction between bending moment and shear is proposed.

Keywords: reinforced concrete beam, shear capacity, shear crack, energy method, equilibrium method, shear-bending interaction

### 1. ま え が き

鉄筋コンクリートばりのせん断破壊は曲げ破壊と並ぶ代表的な破壊形式である。ところが、せん断破壊機構は曲げ破壊機構に比べ非常に多くの要因がかかわっているため、多くの研究がなされているにもかかわらず、十分に解明されていないのが現状である。

鉄筋コンクリートばりのせん断耐力に対する理論的検討は、1899年に Ritter-Mörsch がトラス理論を提案して以来、数々の実験式、半理論式、あるいはせん断破壊機構や強度を決定する力学モデルによりなされてきた。力学モデルは大別すると、トラス理論<sup>1)</sup>やアーチ理論<sup>2),3)</sup>によるものと、終局強度理論<sup>4)</sup>や塑性理論によるものとに分けられる。1960年代までは、実験データから力学モデルを求める研究に重点が置かれており、塑性理論のせん断破壊機構への適用はほとんど行われていなかった<sup>5)</sup>。しかし、1970年代に入り、Nielsen の塑性理論<sup>6)</sup>や Collins の斜め圧縮場理論<sup>7)</sup>が発表され、せん断抵抗機構の解明に関する研究が飛躍的に進んだ。前者は、塑

性材料に関する極限解析の上下界定理を適用し、せん断耐力を求めており、後者は、応力のつり合い条件およびひずみの適合条件を考慮してせん断耐力を求めている。塑性理論に基づく極限解析法は解析の容易さ、仮定の合理性および力学モデルの理解のしやすさなどの理由から、他の手法に比べより有望と考えられる。

一方、鉄筋コンクリートばりのせん断破壊機構を、非線形有限要素法で究明するマイクロモデルによるアプローチ<sup>8)</sup>も1960年代末から始まり、現在までにいくつもの力学モデルが提案されている。しかし、これらのアプローチにおいても、ひびわれおよび鉄筋とコンクリートとの付着の問題など、まだ十分に解明されていない分野もあり、設計式を導く段階に至っておらず、設計の補足的な手法として使われているのが現状である。

本研究では、曲げモーメントとせん断力とが同時に作用する鉄筋コンクリートばりのせん断耐力および斜めひびわれ角度を解析的に評価することを目的としている。すなわち、塑性理論の上界定理における終局つり合い法に基づいて、力のつり合い条件およびひずみの適合条件を考慮して、斜めひびわれ角度およびせん断耐力に関する理論式を導き、さらに、せん断力と曲げモーメントとの相関関係を表わす関係式を提案した。なお、理論式と実験結果との比較においては、当研究室の実験データお

\* 正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科  
(〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

\*\* 学生会員 工修 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻(同上)

\*\*\* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科(同上)

よび Frantz ら, Regan らなどにより行われた実験結果を用いた。

2. 既往の研究とその問題点

曲げとせん断とを同時に受ける鉄筋コンクリートばりのせん断耐力および変形を塑性解析から求める方法には2つある。1つは、下界定理に基づいた静的アプローチ (Static approach) で、材料の降伏条件下において、外力とつり合っている内部応力状態を決定する方法である。もう1つは、上界定理に基づいた運動学的アプローチ (Kinematic approach) で、材料の降伏条件には関係なく、外力によるエネルギーが内部エネルギーと等しくなる変形状態を定める方法である。上界定理の展開方法には、さらに2つのアプローチがあり、1つは“部材に発生するひびわれは部材内部のひずみエネルギーが最小になるように伝播する”という最小ひずみエネルギー原理に基づいた仕事法 (Work method) である<sup>9),10)</sup>。もう1つは、“部材の破壊は外力に抵抗する内部抵抗力が最小になる方向に起こる”というつり合い法 (Equilibrium method) である。

斜めひびわれの進展方向を解析的に検討することは、ひびわれ面を横切るせん断補強筋の数を推定するうえで重要であるが、鉄筋コンクリートばりのせん断耐力および斜めひびわれの進展方向を仕事法やつり合い法などのエネルギー法から求めた従来の研究を概観すると次のようである。

Kupfer<sup>11)</sup> は、トラス機構をもとに、コンクリート斜材の角度  $\alpha$  はせん断補強筋量 ( $A_v$ ) およびコンクリートの圧縮部と腹部の幅の比 ( $b/b_a$ ) によって変わると考えた。そして、トラス機構における部材全体のひずみエネルギーの和をコンクリート斜材の角度、すなわち、斜めひびわれの角度  $\alpha$  で微分すれば全体のひずみエネルギーが最小になる角度が得られるとしている。

この考え方によると、斜めひびわれの角度は約  $35^\circ \sim 40^\circ$  となる。しかし、この理論はせん断耐力を求めるためのものではなく、作用モーメントに対して、部材がせん断破壊しないようにせん断補強筋を設計する方法として知られている。トラス機構の根本的な問題点でもあるが、この理論の問題点は、圧縮域コンクリートの負担せん断力 ( $V_c$ ) が無視されているため、せん断補強筋のない部材のせん断破壊機構やせん断スパン比の減少によるせん断耐力の増加などを説明し得ないことである。

一方、Collins<sup>12)</sup> は、せん断破壊は常にトラス機構での圧縮斜材の破壊によってもたらされると考えて、Wagner<sup>12)</sup> が金属材料に対して提唱した引張場の考え方を引用し、圧縮斜材の角度が圧縮主ひずみの向きに一致するという仮定に基づいて理論を展開している。この理

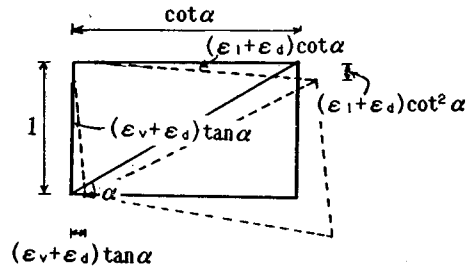


図-1 トラス機構におけるせん断ひずみ

論では、トラス機構における単位長さ当たりの要素のせん断ひずみ  $\gamma$  をひびわれの角度  $\alpha$  で微分して、その機構のせん断ひずみが最小になる角度を計算している。

すなわち、図-1のように、トラス機構におけるある要素に対するせん断ひずみは次式のように表わされる。

$$\gamma = (\epsilon_1 + \epsilon_d) \cot \alpha + (\epsilon_v + \epsilon_d) \tan \alpha \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\epsilon_1$  : 軸方向鉄筋の引張ひずみ、 $\epsilon_v$  : 鉛直方向鉄筋の引張ひずみ、 $\epsilon_d$  : 圧縮斜材の圧縮ひずみである。これを圧縮主ひずみの角度  $\alpha$  で微分して0とおくと、

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

となる。この式を整理すると、次のようなひずみの適合条件が得られる。

$$\tan^2 \alpha = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_d}{\epsilon_v + \epsilon_d} \dots\dots\dots (3)$$

この理論では任意のせん断応力  $\tau$  に対して、力のつり合い条件およびひずみの適合条件を満足する圧縮主応力の傾斜角  $\alpha$  を繰返し計算により求め、この  $\tau$  と  $\alpha$  に対応する応力およびひずみを決定し、コンクリート圧縮斜材の応力度  $f_d$  が、ある限界強度  $f_{du}$  に達するとき部材が破壊すると考えている。しかし、この理論には、せん断スパン比が小さい場合やせん断補強筋量が少ない場合、すなわち、部材がアーチ的な耐荷機構になる場合は推定精度が低下するという問題点がある。

Nielsen<sup>9)</sup> は、塑性理論に基づいて上界値と下界値が合致する、いわゆる正解のせん断耐力式を提案している。上界値は、仮想仕事原理に基づいた降伏線理論により、破壊面での内部発散エネルギーをひびわれ角度  $\alpha$  で微分して、内部発散エネルギーが最小になる角度  $\alpha$  を計算し、それをもとにせん断耐力を求めている (式(4)参照)。

$$P \cdot u = 0.5 f_{ck} b (1 - \cot \alpha) h \cdot u / \sin \alpha + \rho_v \cdot f_{vy} b h \cot \alpha \cdot u \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\rho_v$  : せん断補強筋比、 $f_{vy}$  : せん断補強筋の降伏強度、 $u$  : 仮想変位である。

式(4)の第1項は、降伏線におけるコンクリートの発散エネルギーで、第2項は降伏線を横切るせん断補強

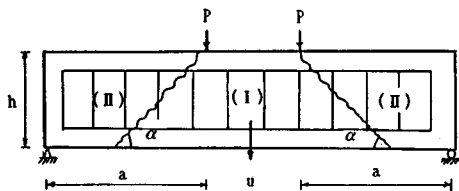


図-2 Nielsenのせん断破壊機構

筋の発散エネルギーである。

すなわち、

$$\frac{d(P \cdot u)}{d\alpha} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

となつて、式(5)を整理すると、

$$\tan \alpha = 2\sqrt{\psi(1-\psi)} / (1-2\psi) \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここで、 $\psi = \rho_v f_{vu} / f_{ck}$  である。

また、そのときのせん断耐力は次式のようになる。

$$V_u = bh f_{ck} \sqrt{\psi(1-\psi)} \dots\dots\dots (7)$$

しかし、 $(a/h)$  が  $\tan \alpha$  より小さい場合、すなわち、

$$\psi < \frac{(\sqrt{a^2+h^2}-a)}{2\sqrt{a^2+h^2}} \text{ の場合は、}$$

$$V_u = bh f_{ck} \{0.5\sqrt{1+(a/h)^2} - a/h\} + \psi \cdot a/h \dots\dots (8)$$

となる。この理論ではT形ばりと矩形ばりを同一に取り扱っている。これについて、 $a/d$  がほぼ3以上のT形ばりについては比較的推定精度が良いが、矩形ばりについては危険側であるといわれている<sup>13)</sup>。また、上記の理論式を設計に適用する場合、斜めひびわれを含んだコンクリートの圧縮強度は低下することを表わす、いわゆるコンクリート有効低減係数  $\nu$  の値の決定問題や  $a/d$  が小さい場合に計算値が過小になることなど未解決の問題が残されている。

その他、Regan<sup>14)</sup> はせん断補強筋および骨材のかみ合わせによるひずみエネルギーを考慮して、ひずみエネルギーの和を斜めひびわれの角度で微分して、その和が最小になる角度を提案している。

一方、つり合い法から部材の抵抗力を求める研究はせん断より、ねじりを受ける部材に対して、より進んでいる<sup>15)</sup>。せん断抵抗力を求める研究はあまりみられないが、ソ連の鉄筋コンクリート中央研究所が実験結果に基づいた半理論式を提案している。この理論式では他の示方書と同様に、部材のせん断耐力  $V_u$  をコンクリートが負担するせん断力  $V_c$  とせん断補強筋が抵抗するせん断力  $V_s$  との和からなると考えている。

すなわち、

$$V_u = V_c + V_s = 2bd^2 f_t / c + A_v \cdot f_{va} \cdot c / s \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $f_t$  : コンクリートの引張強度、 $f_{va}$  : せん断補強筋降伏強度、 $A_v$  : せん断補強筋断面積、 $s$  : せん断補強筋間隔

部材内部の抵抗力が最小になるようにせん断抵抗力を斜めひびわれの水平投影長さ  $c$  で微分し、0とおくと、

$$\frac{dV_u}{dc} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

したがって、

$$c = \sqrt{2bd^2 f_t s / A_v f_{va}} \dots\dots\dots (11)$$

となる。そのときのせん断耐力は、

$$V_u = 2\sqrt{2bd^2 A_v f_{va} f_t / s} \dots\dots\dots (12)$$

となる。

以上述べたように、多くの研究者によってせん断耐力に対するエネルギー的なアプローチがなされているが、それぞれ特徴や問題点があり、また、曲げとせん断を同時に受ける鉄筋コンクリートばりの変形性状を適切に表現し得るモデルも見当たらないのが現状である。

そこで本研究では、つり合い法からせん断耐力を求めるアプローチが破壊面でのつり合い状態を簡潔によく表現している点に着目し、同様の考え方を導入することによって、曲げモーメントとせん断力とを同時に受ける鉄筋コンクリートばりのせん断耐力および斜めひびわれ角度を解析的に評価する手法を提案し、さらに、破壊面でのひずみの適合条件を考慮して部材の破壊モードを推定する方法を提案しようとするものである。

### 3. 終局つり合い法によるせん断耐力の解析法

#### (1) 概要

終局つり合い法は、ソ連の研究グループ<sup>15)</sup>によって、ねじりを受ける部材に対して提案されたものである。これは、曲げとねじりの組合せ、あるいはねじりと曲げせん断の組合せ荷重を受ける鉄筋コンクリート部材に、純曲げを受ける部材の終局強度式を導くのと同様な考え方を適用し、終局状態において、部材内部の抵抗力が最小になるような変形状態を求めたもので、塑性理論の上界定理に基づいた運動学的アプローチ法である。この解析法は、曲げ、せん断およびねじりなどの相互関係から各破壊モードを考へて、破壊面における中立軸での力およびモーメントのつり合い条件を用い、終局状態での部材の変形性状や抵抗力を求めようとするのが特徴である。

#### (2) 仮定事項

本解析では、斜め引張破壊のように部材内部での応力再分配が十分に生じていない破壊モードは生じないと仮定する。また、せん断補強筋を有する鉄筋コンクリートばりを対象としているが、解析にあたり以下の事項を仮定する。

a) 斜めひびわれは、図-3(a)のように引張側から部材の弾性状態、すなわち、ひびわれ発生以前の状態における中立軸の高さ  $(h-d_e)$  まで  $\alpha_1$  の角度で直線的に

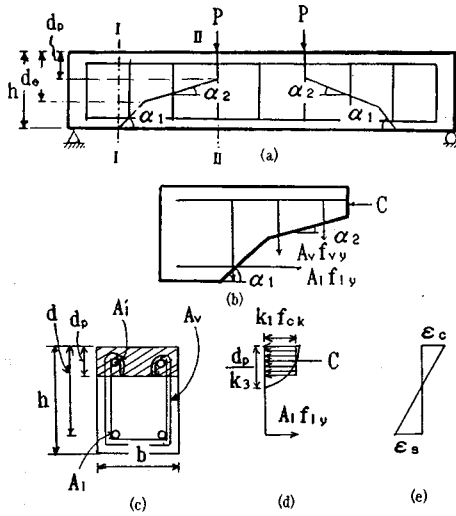


図-3 ひびわれ進展および終局状態における力のつり合い

進展し、その後は部材内部の応力再分配<sup>16)</sup>によって  $\alpha_2$  の角度で進展して終局状態に達すると仮定する。すなわち、ひびわれの進展を2つの直線でモデル化する。

b) 破壊機構は、はりの引張側から曲げおよび斜めひびわれが発生し、続いて引張主鉄筋およびせん断補強筋が降伏し、最後に荷重点付近の圧縮側コンクリートが曲げ圧縮強度に達して終局に至るものとする。

c) せん断補強筋が十分に配置されている場合、せん断圧縮破壊は、本質的には曲げ破壊と同じであるという考え方<sup>17),18)</sup>から、コンクリート圧縮域の高さは純曲げの場合と同じであると仮定する。

d) 破壊面は斜めひびわれ面とそれに連なるコンクリートの圧縮面とで構成される。また、せん断補強筋の配置間隔は一定とする。

e) 鉄筋のダウエル作用およびコンクリートの引張強度は無視する。

f) 圧縮鉄筋は発生応力が小さいので、せん断に対する役割は無視することにする。

g) 斜めひびわれが発生している部分における引張主ひずみの方向は、ひびわれの方向に直角とする。

以上の仮定から、終局せん断抵抗力は、破壊面における断面力と外力がつり合うという条件によって導かれる。

(3) せん断耐力式の算定

図-3(a) のように、2点集中荷重が作用し、せん断補強筋が鉛直に配置されている鉄筋コンクリートばりを考える。このはりにおいて、斜めひびわれの発生起点である断面 I-I および荷重の荷重点位置における断面 II-II を考える。斜めひびわれが発生している場合、終局状態において、引張主鉄筋には従来の曲げ理論によって算定した応力より大きい応力、すなわち作用せん断力

表-1 既往の実験データによる斜めひびわれの角度 ( $\alpha$ )

供試体数	平均値 (°)	変動係数 (%)
54	44.5	12.2

による影響を加えた応力が発生することが実験的あるいは理論的研究から明らかになっている<sup>11),19),20)</sup>。よって、断面 II-II でのモーメントのつり合いを考えると、外力によるモーメント ( $M_{ext}$ ) は、曲げによるモーメント ( $M_u$ ) とせん断力によるモーメント ( $V_u(h-d_e) \cot \alpha_1 + V_u(d_e-d_p) \cot \alpha_2$ ) との和で表わされる。よって、

$$M_{ext} = M_u + V_u(h-d_e) \cot \alpha_1 + V_u(d_e-d_p) \cot \alpha_2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

一方、弾性状態におけるはりの任意の点での圧縮主応力の方向は Mohr の理論から次式のようなになる。

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $\tau$  : せん断応力、 $\sigma_x$  : 軸方向の垂直応力、 $\sigma_y$  : 鉛直方向の垂直応力である。

よって、はりの圧縮主応力の軌跡、すなわち、ひびわれの進展方向は、中立軸上で  $45^\circ$  になる。コンクリートは脆性的性質をもっているため、ひびわれの進展方向は、部材内部で応力の再分配が起こる中立軸付近まではほぼ直線的に進展していくことが知られている<sup>21)</sup>。これを既往の実験データ<sup>22)</sup>から調べた結果、表-1 のような結果が得られた。

したがって、ひびわれの初期の角度  $\alpha_1$  は  $45^\circ$  と仮定してよいと考えられる。しかし、荷重の荷重点から支点までの距離が  $d/2$  より小さい場合は、 $\alpha_1 = 45^\circ$  という仮定事項が成り立たないので、本力学モデルの場合、荷重点は支点から  $d/2$  以上離れた場合に限定する。なお、弾性状態での中立軸の位置  $d_e$  は次式で与えられる。

$$d_e = \frac{0.5bh^2 + (n-1)A_1d + (n-1)A_1d'}{bh + (n-1)A_1 + (n-1)A_1'} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $n$  : 鉄筋とコンクリートの弾性係数の比、 $A_1$  : 引張主鉄筋断面積、 $A_1'$  : 圧縮主鉄筋断面積、 $d'$  : 圧縮鉄筋のかぶり、である。

一方、破壊面の中立軸において、外力に抵抗する内部抵抗モーメント ( $M_{int}$ ) は引張主鉄筋による抵抗モーメント ( $M_{ui}$ )、せん断補強筋による抵抗モーメント ( $M_{uv}$ )、および圧縮域のコンクリートによる抵抗モーメント ( $M_{uc}$ ) の和として表わせる。

$$M_{int} = M_{ui} + M_{uv} + M_{uc} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式 (16) の右辺の各項は次のように表わされる。

$$M_{ui} = A_1 f_{1y} (d - d_p) \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$M_{uv} = \frac{(d_e - d_p)^2}{2s} \cot^2 \alpha_2 \cdot A_v f_{vy} + A_v f_{vy} (h - d_e) (d_e - d_p) \cot \alpha_2$$

$$+0.5(h-d_e)/s \dots\dots\dots (18)$$

$$M_{uc} = k_1 \cdot f_{ck} \cdot b \cdot d_p^2 / 2 \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $d_p$ ：終局状態における中立軸の位置、 $A_v$ ：せん断補強筋量、 $f_{vy}$ ：せん断補強筋の降伏強度、 $s$ ：せん断補強筋の配置間隔、 $k_1$ ：圧縮側コンクリートの平均応力に関する係数、 $k_3$ ：圧縮側コンクリートの高さに関する係数である。

モーメントのつり合い条件によって

$$M_{ext} = M_{int} \dots\dots\dots (20)$$

であるから、式(13)、(16)から

$$\begin{aligned} M_u + V_u(h-d_e) + V_u(d_e-d_p) \cot \alpha_2 &= k_1 f_{ck} b d_p^2 / 2 \\ &+ A_1 f_{1y} (d-d_p) + A_v f_{vy} \frac{(d_e-d_p)^2 \cdot \cot^2 \alpha_2}{2s} \\ &+ A_v f_{vy} \frac{(h-d_e)}{s} \left\{ (d_e-d_p) \cot \alpha_2 + \frac{(h-d_e)}{2} \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (21)$$

となる。

なお、コンクリート圧縮域における応力-ひずみ関係は図-3(d)、(e)に示したとおりである。この領域でのコンクリートの応力-ひずみ関係は、Hognestadの式から次式のようになる。

$$\sigma_c = f_{ck} \left[ 2 \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right) - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (22)$$

ここで、コンクリートの応力分布を等価応力ブロックで仮定すると、

$$k_1 f_{ck} = \int_0^{d_p/k_3} \sigma_c \cdot dx / (d_p/k_3) \dots\dots\dots (23)$$

となる。したがって、破壊面での水平方向の力のつり合い条件を考えると、

$$k_1 f_{ck} b d_p - A_1 f_{1y} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

となる。したがって

$$d_p = \frac{A_1 f_{1y}}{k_1 f_{ck} b} \dots\dots\dots (25)$$

となる。式(25)を式(21)の右辺に代入して、整理すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} M_u + V_u(h-d_e) + V_u(d_e-d_p) \cot \alpha_2 &= A_1 f_{1y} (d-d_p/2) \\ &+ A_v f_{vy} \frac{(d_e-d_p)}{s} \cot \alpha_2 \cdot \frac{(d_e-d_p)}{2} \cot \alpha_2 \\ &+ A_v f_{vy} \frac{(h-d_e)}{s} \left\{ (d_e-d_p) \cot \alpha_2 + \frac{(h-d_e)}{2} \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (26)$$

終局時に作用している曲げモーメントとせん断力との間には次のような関係がある。

$$M_u = a V_u \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 $a$ ：せん断スパン長さである。

したがって、

$$V_u = \frac{1}{|a+h-d_e+(d_e-d_p) \cot \alpha_2|} \left[ A_1 f_{1y} (d-d_p/2) \right. \dots\dots\dots (28)$$

$$\begin{aligned} &+ A_v f_{vy} \frac{(d_e-d_p)}{s} \cot \alpha_2 \cdot \frac{(d_e-d_p)}{2} \cot \alpha_2 \\ &+ A_v f_{vy} \frac{(h-d_e)}{s} \left\{ (d_e-d_p) \cot \alpha_2 + \frac{(h-d_e)}{2} \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (28)$$

が導かれる。そして、内部せん断抵抗力が最小になるように斜めひびわれの角度を定めるために、せん断抵抗力を上部の斜めひびわれ角度  $\alpha_2$  で微分し、0とおくと、

$$\frac{dV_u}{d\alpha_2} = 0 \dots\dots\dots (29)$$

となる。この式を整理し、 $\cot \alpha_2$  に関する2次式を解くと次式が得られる。

$$\begin{aligned} \cot \alpha_2 &= \frac{-a-h+d_e}{d_e-d_p} + \sqrt{\left( \frac{a+h-d_e}{d_e-d_p} \right)^2} \\ &+ \frac{2s(d-d_p/2)A_1 f_{1y} - (h-d_e)}{(d_e-d_p)^2 A_v f_{vy}} \left( a + \frac{h-d_e}{2} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (30)$$

式(30)はせん断抵抗力を最小にする斜めひびわれの角度を与える式であり、そのときのせん断抵抗力、すなわち、せん断耐力は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} V_u &= \frac{1}{\sqrt{\left( a+h-d_e \right)^2 + \frac{2s(d-d_p/2)A_1 f_{1y}}{A_v f_{vy}}}} \\ &\cdot \left[ A_1 f_{1y} \left( d - \frac{d_p}{2} \right) - (h-d_e) \left( a + \frac{h-d_e}{2} \right) \right. \\ &+ \frac{A_v f_{vy}}{2s} \left\{ -a-h+d_e + \sqrt{\left( a+h-d_e \right)^2} \right. \\ &+ \frac{2s(d-d_p/2)A_1 f_{1y} - (h-d_e)}{A_v f_{vy}} \left( a + \frac{h-d_e}{2} \right) \left. \right\}^2 \\ &+ \frac{A_v f_{vy}(h-d_e)}{s} \left\{ -a-h+d_e + \sqrt{\left( a+h-d_e \right)^2} \right. \\ &+ \frac{2s(d-d_p/2)A_1 f_{1y} - (h-d_e)}{A_v f_{vy}} \left( a + \frac{h-d_e}{2} \right) \\ &+ \left. \left. \frac{(h-d_e)}{2} \right\} \right] = \frac{A_v f_{vy}}{s} \left[ \sqrt{\left( a+h-d_e \right)^2} \right. \\ &+ \left. \frac{2s(d-d_p/2)A_1 f_{1y} - (h-d_e)}{A_v f_{vy}} \left( a + \frac{h-d_e}{2} \right) - a \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (31)$$

ここで、計算の簡略化のために、斜めひびわれを上記のような2直線ではなく、角度  $\alpha$  をもつ1本の直線(図-4、点線)で理想化することを検討した。

式(30)、(31)を誘導した方法と同じ方法で、斜めひびわれ角度  $\alpha$  に関する式を導くと、

$$\cot \alpha = -\frac{a}{(h-d_p)} + \sqrt{\left( \frac{a}{h-d_p} \right)^2 + \frac{2s(d-d_p/2) \cdot A_1 f_{1y}}{(h-d_p)^2 \cdot A_v f_{vy}}} \dots\dots\dots (32)$$

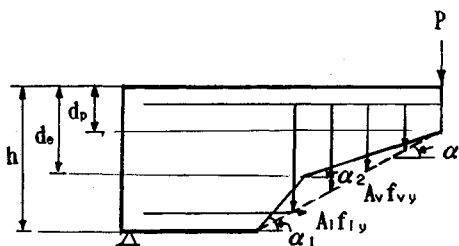


図-4 斜めひびわれの理想化

が求まる。また、そのときのせん断耐力は

$$V_u = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2s(d - \frac{d_p}{2}) \frac{A_1 f_{1y}}{A_v f_{vy}}}} \left[ A_1 f_{1y} \left( d - \frac{d_p}{2} \right) + \frac{A_v f_{vy}}{2s} \left\{ 2a^2 - 2a \sqrt{a^2 + 2s(d - \frac{d_p}{2}) \frac{A_1 f_{1y}}{A_v f_{vy}}} + 2s \left( d - \frac{d_p}{2} \right) \frac{A_1 f_{1y}}{A_v f_{vy}} \right\} \right] = \frac{A_v f_{vy}}{s} \left[ \sqrt{a^2 + \frac{2s(d - \frac{d_p}{2}) A_1 f_{1y}}{A_v f_{vy}}} - a \right] \dots (33)$$

となる。

ここで、図-3のように斜めひびわれを2本の直線で理想化した場合のせん断耐力  $V_{u2}$  と図-4のように1本の直線で理想化した場合のせん断耐力  $V_{u1}$  とを既往の実験データを用いて比べると図-5 のようになる。

その結果、Frantz ら<sup>24)</sup> および Regan ら<sup>26)</sup> などの実験諸量を用いて計算したせん断耐力の値  $V_{u1}$  と  $V_{u2}$  との比  $V_{u1}/V_{u2}$  の平均値はそれぞれ 1.001 および 1.045 となり、両者のせん断耐力にはほとんど差がないことがわ

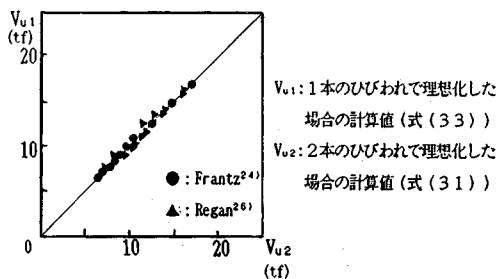


図-5 せん断耐力の比較

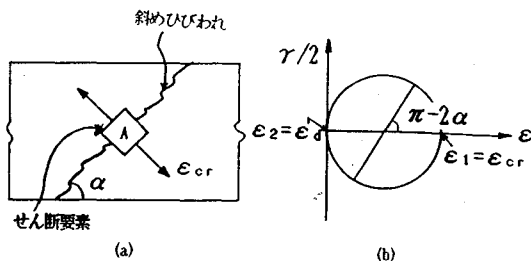


図-6 斜めひびわれ面におけるひずみ成分

かった。すなわち、斜めひびわれを1本の直線で理想化し、これをもとにしてせん断耐力を評価しても実用上全く問題がないといえる。

(4) ひずみの適合条件

図-6(a) のようにせん断ひびわれが発生している部分におけるせん断要素 (Shear element) A のひずみの各成分を表わすと、次のようになる。

$$\epsilon_1 = \epsilon_{cr} \sin^2 \alpha + \epsilon_d \cos^2 \alpha \dots (34)$$

$$\epsilon_v = \epsilon_{cr} \cos^2 \alpha + \epsilon_d \sin^2 \alpha \dots (35)$$

$$\gamma = 2(\epsilon_{cr} + \epsilon_d) \sin \alpha \cos \alpha \dots (36)$$

ここで、 $\epsilon_1$  : 水平方向のひずみ、 $\epsilon_v$  : 鉛直方向のひずみ、 $\epsilon_{cr}$  : ひびわれに直角方向のひずみ、 $\epsilon_d$  : ひびわれ方向のひずみ、 $\gamma$  : せん断ひずみである。

上式において、ひびわれ面に沿ったコンクリートの圧縮ひずみ  $\epsilon_d$  は無視できるほど小さいので、式(34)~(36)は次式のようになる。(図-6(b) 参照)。

$$\epsilon_1 = \epsilon_{cr} \sin^2 \alpha \dots (37)$$

$$\epsilon_v = \epsilon_{cr} \cos^2 \alpha \dots (38)$$

$$\gamma = \epsilon_v \tan \alpha + \epsilon_1 \cot \alpha \dots (39)$$

要素 A のせん断ひずみが最小になるようなひびわれの角度は最小ひずみエネルギー原理に基づいて、せん断ひずみを角度  $\alpha$  で微分して得られる。

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0 \dots (40)$$

したがって、せん断ひびわれ面における内部変形を定義するひずみの適合条件は次式のようになる。

$$\tan^2 \alpha = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_v} \dots (41)$$

(5) 破壊モード

せん断補強筋と引張主鉄筋のどちらが先に降伏するかを把握するためには、鉄筋の降伏に対するつり合い状態を考えなければならない。

まず、引張主鉄筋とせん断補強筋が同時に降伏するとき、すなわち、 $\epsilon_1$  が  $\epsilon_{1y}$  に達し、かつ、 $\epsilon_v$  が  $\epsilon_{vy}$  に達する状態におけるひずみの適合条件は、式(41)から次のようになる。

$$\tan^2 \alpha = \frac{\epsilon_{1y}}{\epsilon_{vy}} \dots (42)$$

力のつり合い条件から求めた式(32) および式(42)より、次式が得られる。

$$Q = \frac{A_1 f_{1y}}{A_v f_{vy}} = \frac{(h - d_p)^2}{2s(d - d_p/2)} \left\{ \frac{\epsilon_{vy}}{\epsilon_{1y}} + \frac{2a}{(h - d_p)} \sqrt{\frac{\epsilon_{vy}}{\epsilon_{1y}}} \right\} \dots (43)$$

ここで、 $\epsilon_{1y}/\epsilon_{vy} = 1$  であるとする、式(43)は次のようになる。

$$Q_b = \frac{(h - d_p)^2}{2s(d - d_p/2)} \left\{ 1 + \frac{2a}{(h - d_p)} \right\} \dots (44)$$

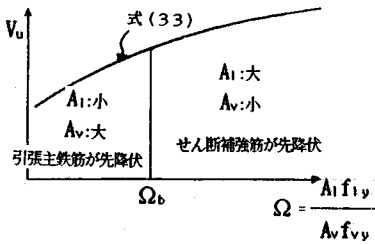


図-7 破壊モード

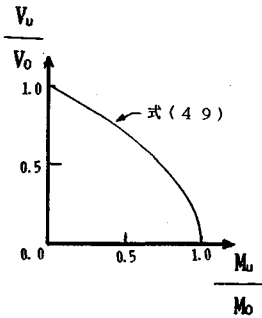


図-8 せん断力と曲げモーメントの相関関係

したがって、引張主鉄筋に作用する力とせん断補強筋に作用する力の比が式(44)より小さいはりの場合は、引張主鉄筋がまず降伏し、続いてせん断補強筋が降伏した後、圧縮側コンクリートが圧壊する曲げせん断圧縮破壊を起こすことになる。しかし、この比が式(44)より大きいはりの場合は、せん断補強筋がまず降伏し、続いて引張主鉄筋が降伏し、最後に圧縮側コンクリートが圧壊する破壊形態となる。

この様子をプロットすると、図-7のようになる。

(6) せん断力と曲げモーメントとの相関関係

式(33)において、 $2s(d-0.5d_p)A_1f_{1y}/A_vf_{vy} = x$ と置いて、整理すると、次式ようになる。

$$V_u = \frac{1}{\sqrt{a^2+x}} \left\{ A_1f_{1y} \left( d - \frac{d_p}{2} \right) + \frac{A_vf_{vy}}{2s} (2a^2 - 2a\sqrt{a^2+x} + x) \right\} \dots\dots\dots(45)$$

ここで、純曲げ状態での曲げモーメント  $M_0$  は、次のようになる。

$$M_0 = A_1f_{1y}(d - d_p/2) \dots\dots\dots(46)$$

したがって、

$$V_u = 2M_0 \cdot \frac{1}{x} (\sqrt{a^2+x} - a) \dots\dots\dots(47)$$

$a = M_u/V_u$  の関係を入れて上式を展開すると、

$$\left( \frac{V_u}{M_0} \right)^2 + \frac{4M_u}{M_0} \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x} \dots\dots\dots(48)$$

純せん断状態でのせん断力  $V_0$  は、 $M_u=0$  の条件から得られる。したがって、これを式(48)に代入して整理すると、

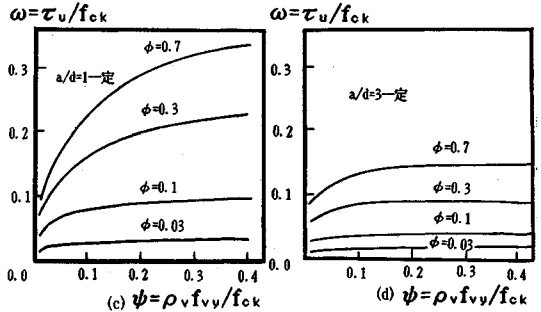
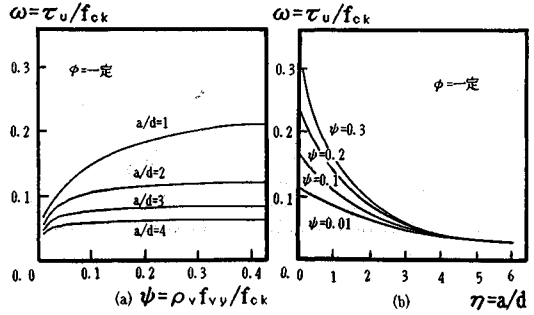


図-9 a/d, phi および phi とせん断耐力との関係

$$\left( \frac{V_u}{V_0} \right)^2 + \left( \frac{M_u}{M_0} \right) = 1 \dots\dots\dots(49)$$

となる。

したがって、終局時のせん断力とモーメントとの関係をプロットすると、図-8のようになる。

4. 本提案式に対する評価

(1) 本提案式による変動要因の影響

せん断破壊に影響を及ぼす因子は多数ある<sup>1)</sup>ことが知られているが、その中で比較的影響が大きいと思われるせん断スパン比 ( $a/d$ )、引張主鉄筋比 ( $\rho$ ) およびせん断補強筋比 ( $\rho_v$ ) に対して本提案式に基づき検討を行った。

せん断耐力式と各影響因子との比較検討において、次のような無次元量を用いた。

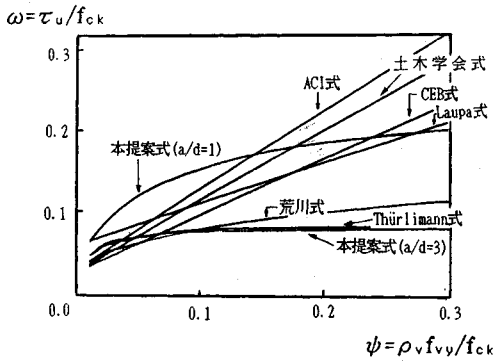
$$\omega = \tau_u/f_{ck}, \quad \phi = \rho_1 f_{1y}/f_{ck}, \quad \psi = \rho_v f_{vy}/f_{ck}, \quad \eta = a/d \dots\dots\dots(50)$$

ここで、上記の無次元量に対する適用範囲は土木学会示方書に定められている鉄筋量に関する規定から次のように定めた。

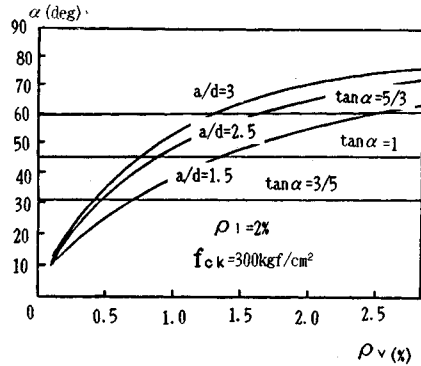
$$0.03 \leq \phi \leq 0.7, \quad 0.01 \leq \psi \leq 0.3, \quad 1 \leq a/d \leq 4 \dots\dots\dots(51)$$

この範囲以内における無次元量の相互関係によるせん断耐力の変化は、図-9のようである。

この解析結果によると、やはり同一の  $\phi$  (図-9(a), (b) では  $\phi=0.1$  とした) のもとで、 $a/d$  が小さいほど、大きいせん断耐力を示しており、また、せん断補強筋量が増加するほど、せん断耐力は増加するが、その増加傾向は比例的ではなく、ある限界値を過ぎると耐力の増加



図—10 本提案式と既往の提案式との比較



図—11 斜めひびわれの角度

表—2 既往の実験データの概要および実験値と計算値との比較

実験データ	Frantz <sup>24)</sup>		Smith <sup>25)</sup>		Regan <sup>26)</sup>		Kani <sup>27)</sup>		東北大学		
	供試体数										
b (cm)	12		47		18		15		6		
d (cm)	15.2		10.16		15.24		15.47 ~ 15.70		20.00		
a/d	29.8		27.9		25.4		27.2 ~ 28.3		36.0		
ρ <sub>v</sub> (%)	3.60		1.09 ~ 2.27		3.36 ~ 5.05		2.16 ~ 5.98		3.50		
ρ <sub>v</sub> (%)	3.36		2.15 ~ 2.67		0.98 ~ 4.16		2.54 ~ 2.64		0.83 ~ 1.94		
ρ <sub>v</sub> (%)	0.12 ~ 0.38		0.88 ~ 1.25		1.30 ~ 5.20		0.60 ~ 1.00		0.36 ~ 0.53		
f <sub>ck</sub> (kgf/cm <sup>2</sup> )	229 ~ 846		164 ~ 231		130 ~ 438		267 ~ 366		263 ~ 341		
各提案式	本提案式(式33)	1.05	11.49	1.18	11.90	1.04	17.31	0.98	21.43	1.26	4.80
	土木学会 <sup>(1)</sup>	1.29	9.16	1.89	32.10	0.26	21.22	0.53	40.56	0.52	4.65
	ACI式 <sup>(2)</sup>	1.33	8.59	1.64	31.60	0.23	21.96	0.50	39.71	0.45	5.41
	建築学会 <sup>(3)</sup>	3.22	13.72	3.75	12.84	1.41	17.46	1.71	28.03	1.55	8.46
	建築学会 <sup>(4)</sup>	1.11	11.57	1.32	7.95	0.30	18.49	0.54	30.71	0.46	7.73
	Thürlimann <sup>(5)</sup>	1.15	14.15	1.22	17.83	0.85	31.60	0.96	22.59	1.36	6.72
	荒川 <sup>(6)</sup>	1.47	15.61	1.66	7.96	0.85	12.15	0.89	26.57	0.76	10.03
	CEB(1978) <sup>(7)</sup>	1.16	14.14	1.90	32.67	0.41	22.74	0.51	40.59	0.44	6.12
	ソ連 <sup>(8)</sup>	0.76	10.56	1.06	25.31	0.22	11.46	0.29	38.80	0.24	8.01

(注) (1)  $V_u = 0.9 \sqrt{\frac{100}{d}} \sqrt{100 \rho_1} \sqrt{f_{ck}} + \frac{A_v f_{vv}}{s} \cdot z$  (2)  $V_u = (0.504 \sqrt{f_{ck}} + \frac{176 \rho_1 V d}{M}) b d + \frac{A_v f_{vv} d}{s}$   
 (3)  $V_u = [a f_o + \frac{1}{2} f_o (\rho_v - 0.002)] b j d$  (4)  $V_u = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1} - \frac{a}{h} \right] \left[ 1 - \frac{(1 + \cot^2 \phi) \rho_{vv}}{v f_{ck}} \right] b h v f_{ck} + \rho_v f_{vv} \cot \phi b \cdot j$   
 (5)  $V_u = -\frac{A_v f_{vv}}{s} d + \sqrt{\left(\frac{A_v f_{vv} d}{s}\right)^2 + \frac{2 J d A_v f_{vv} A_v f_{vv}}{s}}$  (6)  $V_u = \left[ \frac{0.092 k_p k_w (f_{ck} + 180)}{M \cdot d + 0.115} + 2.7 \sqrt{\rho_v f_{vv}} \right] b \cdot j \cdot d$   
 (7)  $V_u = 0.6 f_i b d + 0.9 \rho_v f_{vv} b d$  (8)  $V_u = 2 \sqrt{2 b d^2 \frac{A_v f_{vv}}{s} \cdot f_i}$

はほとんど期待できないことがわかる。

また、本提案式、既往の提案式および各示方書における設計式によるせん断耐力の値を比べた結果を図—10に示す。

ACI式、土木学会式(1986)、CEB-FIP Model Code(1978)などはトラス理論に基づいて導かれた式であり、せん断補強筋量の増加とともにせん断耐力が増加する傾向を示している。この図からわかるように、本提案式は荒川の提案式<sup>23)</sup>およびThürlimannの提案式<sup>19)</sup>とほぼ同様な傾向を示した。

一方、斜めひびわれの角度(α)に関して検討すると、ρ<sub>v</sub>=2%、f<sub>ck</sub>=300 kgf/cm<sup>2</sup>の条件下でρ<sub>v</sub>とαとの関係

をプロットすると、図—11のようになる。

この解析結果によると、a/dが大きくなるほど、また、せん断補強筋比が大きくなるほど、斜めひびわれの角度が大きくなるという結果が得られた。実用的にはρ<sub>v</sub>は1~1.5%以下と考えられるので、斜めひびわれの角度αは、ほぼ60°以下となることがわかる。

なお、斜めひびわれの角度に対して、CEB-FIP Model Codeではひびわれ幅の制御およびせん断補強筋と引張主鉄筋との降伏を確実に保証するために、式(52)のような角度の制限を定めている。

$$3/5 \leq \tan \alpha \leq 5/3 \dots \dots \dots (52)$$



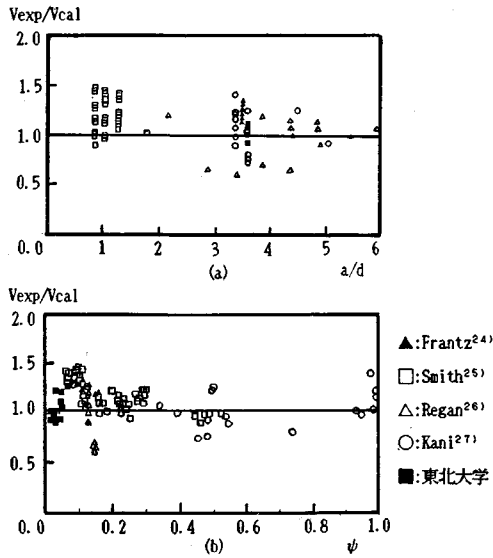


図-12  $V_{exp}/V_{cal}$  と  $a/d$  および  $\phi$  との関係

(2) 既往の実験データとの比較検討

本提案式の適用性を検討するために、既往の実験データと比較検討を行った。比較検討に用いた実験データ数は98で、その概要は表-2に示したとおりである。なお、比較検討に用いた実験データはすべてせん断補強筋のある場合に限った。Frantzらはコンクリート圧縮強度とせん断補強筋比を主因子とし、Smithらは  $a/d$  が比較的小さいはりに対して実験を行っている。また、Reganらは、引張主鉄筋比とせん断補強筋比が比較的大きいほりを対象にし、Kaniはせん断補強筋比が大きい条件下でせん断スパン比の影響を調べる実験を行っている。

このような広範囲な実験データに対して、実験で得られたせん断耐力の値と本提案式、既往の提案式および各示方書的设计式(安全係数は1とした)による計算値との比の平均値および変動係数を算定した結果、表-2のような結果が得られた。

各示方書式および他の提案式では全般的に、せん断スパン比が3以下である実験データに対しては実験値と計算値の比が1以上の値を示しており、ReganやKaniの実験データのように、せん断スパンが3以上の曲げ挙動が卓越するはりの場合、1以下の値を示した。実験データがおのおのの提案式の適用範囲内ない場合もあるが、一般に既往の提案式や示方書による設計式はその適用範囲が狭いのが欠点である。

一方、本提案式に対する計算結果をみると、各研究者の実験データに対する平均値および変動係数の値は、それぞれ0.98~1.26、および4.8~21.4%となっていた。そして、実験データ全体に対し、実験値と本提案式による計算値との比の平均値および変動係数は、それぞれ

1.10、および13.4%であった。

また、本提案式による  $V_{exp}/V_{cal}$  の値とせん断スパン比 ( $a/d$ ) および無次元せん断補強筋比 ( $\phi$ ) との関係をプロットした結果を図-12に示す。

以上のように、本提案式は適用範囲も広く、かつ実用上十分な精度でせん断耐力を評価できることが明らかとなった。

5. 結 語

本研究は曲げとせん断とを同時に受ける鉄筋コンクリートばりのせん断耐力および変形性状、特に斜めひびわれ角度を解析的に評価する手法を提案する目的で行ったものであり、得られた結果を要約すると、以下のとおりである。

(1) 塑性理論の上界定理におけるつり合い法に基づく力学モデルを誘導した。すなわち、鉄筋コンクリートばりにおける斜めひびわれは、内部抵抗力が最小になるように伝播していくと仮定して、終局時のせん断耐力および斜めひびわれの角度を与える理論式を提案した。

(2) 斜めひびわれを実際の挙動に近い2本の直線でモデル化した場合と簡略的に1本の直線でモデル化した場合の斜めひびわれ角度およびせん断耐力の評価式を示した。

(3) 本力学モデルによる検討結果、同一引張主鉄筋比を有する部材では、 $a/d$  が小さいほど大きいせん断耐力を有することが理論的に解明できた。

(4) せん断スパン比が大きくなるほど、また、せん断補強筋比が大きくなるほど、斜めひびわれの角度が大きくなるということが理論的に解明できた。

(5) 本提案式によるせん断耐力計算値と実験結果とは適合度がきわめてよく、また、他の研究者による提案式と比較した結果、本提案式は適用範囲も広く、かつ実用上十分な推定精度をもつことが判明した。

提案式の比較検討に用いた実験データは、その数が十分とはいえず、また、斜めひびわれの角度に関する報告はほとんどなかったため、その比較検討が十分にはできなかった。今後は、これらに対する検討を進めていくつもりである。なお、本提案式ではコンクリートの引張強度および鉄筋のダウエル作用などが無視されているが、これに関しては検討の余地が残されていると思われる。

参 考 文 献

- 1) Leonhardt, F. : コンクリート構造物におけるせん断に関する諸問題 (上), 橋梁と基礎, Vol.77, No.4, pp.1~8, 1977年4月.
- 2) Kani, G.N.J. : The riddle of shear failure and its solution, Journal of ACI, Vol.61, No.4, pp.441~466, Apr., 1964.

- 3) 神山 一：鉄筋コンクリートのせん断破壊機構，コンクリートジャーナル，Vol.6，No.8，pp.24～31，1968年8月。
- 4) Walther, R. : Über die Berechnung der Schubtragfähigkeit von Stahl-und Spannbetonbalken—Schubbruchttheorie—, BETON-UND STAHLBETONBAU, Heft 11, pp.261～271, 1962.
- 5) 南 宏一：せん断を受ける鉄筋コンクリート部材の極限解析について，RC構造のせん断問題に対する解析的研究に関するコロキウム論文集，JCI-C1，日本コンクリート工学協会，pp.1～16，1982年6月。
- 6) Nielsen, M. P., Braestrup, M. W., Jensen, B. C. and Bach, F. : Concrete plasticity-shear in beam, CEB Bulletin D'Information, No.126, pp.285～357, 1978.
- 7) Collins, M. P. : Towards a rational theory for RC members in shear, Journal of Structural Division, ASCE, Vol.104, No. ST4, pp.649～666, Apr., 1978.
- 8) Ngo, D. and Scordelis, A. C. : Finite element analysis of reinforced concrete beams, Journal of ACI, Vol.64, No.3, pp.152～163, Mar., 1967.
- 9) Tauchert, T. R. : Energy Principles in Structural Mechanics, McGraw-Hill Book Company, 1974.
- 10) ACI Committee 439 : Effect of steel strength and of reinforcement ratio on the mode of failure and strain energy capacity of reinforced concrete beams, Journal of ACI, Vol.66, No.3, pp.165～173, Mar., 1969.
- 11) Kupfer, H. : Erweiterung der Mörschschen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Foränderungarbeit, CEB Bulletin D'Information, No.40, pp.44～51, 1964.
- 12) Wagner, H. : Ebene Blechwandträger mit Sehr dunnen Stegblech, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Vol.20, Nos, pp.8～12, 1929.
- 13) 石川雄一・安中久二・二羽淳一郎：スターラップを有するRCばりのせん断耐荷力のマクロ的推定方法，JCI，第6回コンクリート工学年次講演論文集，pp.509～512，1984.
- 14) Hamadi, Y. D. and Regan, P. E. : Behaviour of normal and lightweight aggregate beams with shear cracks, The Structural Engineer, Vol. 58 B, No. 4, pp.71～79, Apr., 1980.
- 15) Cowan, H. J. : Reinforced and Prestressed Concrete in Torsion, London, 1965.
- 16) Krefeld, W. J. and Thurson, C. W. : Studies of the shear and diagonal tension strength of simply supported reinforced concrete beams, Journal of ACI, Vol.63, No.4, pp.451～476, Apr., 1966.
- 17) Hedmann, O. and Losberg, A. : Design of concrete structures with regard to shear forces, CEB Bulletin D'Information, No.126, pp.183～209, 1978.
- 18) Collins, M. P., Walsh, P. F., Archer, F. E and Hall, A. S. : Ultimate strength of reinforced concrete beams subjected to combined torsion and bending, Torsion of Structural Concrete, SP-18, ACI, pp.379～402, 1968.
- 19) Thürlimann, B. : Shear strength of reinforced and prestressed concrete beams, CEB Bulletin D'Information, No.126, pp.17～38, 1978.
- 20) Leonhardt, F. : Shear in concrete structure, CEB Bulletin D'Information, No.126, pp.67～124, 1978.
- 21) Rensaa, E. M. : Shear, diagonal tension, and anchorage in beams, Journal of ACI, Vol.55, No.6, pp.695～715, 1958.
- 22) 建設省土木研究所：鉄筋コンクリート部材のせん断実験データ集，土木研究所資料第2045号，1984.
- 23) 荒川 卓：鉄筋コンクリートばりのせん断抵抗に関する研究（実験結果の総括），日本建築学会論文報告集，第66号，pp.437～440，1960.
- 24) Mphone, A. G. and Frantz, G. C. : Shear tests of high- and low strength concrete beams with stirrups, SP-87, ACI, pp.179～196, 1985.
- 25) Smith, K. N. and Vansitis, A. S. : Shear strength of deep beams, Journal of ACI, Vol.79, No.3, pp.207～213, Mar., 1982.
- 26) Placas, A., Regan, P. E. and Baker, A. L. L. : Shear failure of reinforced concrete beams, Journal of ACI, Vol.68, No.10, pp.763～773, Oct., 1971.
- 27) Kani, G. N. J. : A rational theory for the function of web reinforcement, Journal of ACI, Vol.66, No.3, pp.185～197, Mar., 1969.

(1990.4.16・受付)