

## 急曲線区間における波状摩耗の生成機構について

## GENERATION MECHANISM OF RAIL CORRUGATION AT CURVED TRACKS HAVING SHORT RADIUS

角 知憲\*・松本嘉司\*\*・村尾光弘\*\*\*・佐々木英之\*\*\*\*

By Tomonori SUMI, Yoshiji MATSUMOTO, Mitsuhiro MURAO and Hideyuki SASAKI

Rail corrugation is one of the most serious problems of modern railway tracks, which may cause prompt destruction of tracks. This paper presents theoretically a generation mechanism of rail corrugation at curved tracks having short radius based on rolling-slipping dynamics of running wheels. Self-oscillated torsional vibration of wheel-shaft system of vehicle results from rolling-slipping friction between wheel and rail, and it can cause the rail corrugation.

Keywords: rail corrugation, curved tracks, wheel-shaft torsion, rolling friction

## 1. はじめに

近代的鉄道では、軌道保守の省力化を目的とする線路構造の強化が進み、かつては経時的に進行する構造の劣化ないし破壊を継続的な保守作業で維持するという特色ある構造物であった鉄道軌道も、今や一般の永久構造物に近い性質をもつに至っている。その中で、レールに生じるいくつかの劣化現象には、対策も原因究明も不十分で急速な軌道破壊につながる可能性を残したままのものがある。波状摩耗もその1つである。

レールの波状摩耗は、古くから注目されていた現象で、レール頭部上面に波長数 cm から数十 cm までの正弦波状の摩耗が現われるものである<sup>1)~3)</sup>。その波高は容易に 0.2 mm を超えるが、波高がこのくらいになれば、通過する車輪との間で激しい動的な干渉を生じ、騒音と振動を著しく増大させるとともに、急速な軌道破壊の原因となる。波状摩耗の発生原因は、軌道の振動特性にあると

するものやレールの材質にあるとするものなど、さまざまな説があるが、確実な結論はまだないといえる。本論文では、波状摩耗のうち、急曲線区間に特徴的に発生する比較的波長の短いものを対象として、その発生が車輪・レール間のころがり・すべり摩擦による輪軸系のねじり自励振動に輪軸と軌道の動的相互作用が加わる結果であるとの観点から、まず車輪・レール間のころがり・すべり摩擦による輪軸系のねじり自励振動の問題を考察する。

## 2. 急曲線区間を通過する車輪に作用するころがり・すべり摩擦

## (1) 車輪とレールのすべり速度と摩擦力

鉄道車両の輪軸はリジッドな一体構造をもち、内外2つの車輪が同じ角速度で回転するが、一方レールは曲線の内側(内軌)と外側(外軌)とで旋回半径が相違するために、両輪は異なった走行速度で走らねばならない。その結果、両輪にレールとの間で無視できないすべりが生じ、輪軸系にはねじりモーメントが加わる。そこでまず、曲線通過中の輪軸に加わる摩擦力を計算することにする(この問題に対しては文献4), 5)が有用であるが、本論文の目的のためには多少精粗の力点を変える必要がある。). Fig. 1 にリジッドなボギーが曲線部を通過して

\* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学科  
(〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)

\*\* 正会員 工博 東京理科大学教授 工学部土木工学科  
(〒278 野田市山崎東亀山 2641)

\*\*\* 正会員 工修 日本道路公団 (〒102 千代田区麹町 5-7-2)

\*\*\*\* 正会員 工修 パシフィックコンサルタント(株)  
(〒150 渋谷区神宮前 2-8-2)

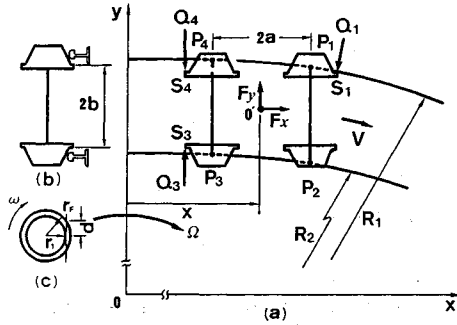


Fig.1 Bogie passing a curved track.

いる状態を模式的に示す。曲線部では少なくとも前軸外軌側の車輪のフランジが外軌内側に接触してボギーの回転に必要な横方向の力を発生するが、そのほか与えられたスラック、カントと通過速度あるいはレール・車輪間のころがり・すべり摩擦力のいかんによっては、他の車輪のフランジも外軌または内軌に接触することがある。図中、 $R_1, R_2$  は内外軌の曲率半径、 $2a$  は軸距、 $2b$  は左右輪フランジ間距離（同図 (b) を参照のこと）、 $x$  はボギーとともに旋回する動径のうち、ボギーの左右軸に平行なもの  $Oy$  から、ボギー中心  $O'$  までの  $x$  方向距離、 $P_1 \sim P_4$  は各車輪の踏面のレールとの接点、 $S_1, S_3, S_4$  は各車輪フランジのレールとの接点、 $Q_1, Q_3, Q_4$  はその点で作用するレールからフランジへの圧力（以下、フランジ圧とよぶ）で、レールの曲率中心方向に働くものとする。 $d$  は車輪の踏面のレールとの接点からフランジ縁辺までの距離である。

$P_1 \sim P_4$  および  $S_1, S_3, S_4$  の座標は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_1 &: (x+a, c_1), \\ P_2 &: (x+a, c_2), \\ P_3 &: (x-a, c_3), \\ P_4 &: (x-a, c_4), \\ S_1 &: (x+a+d, c_5), \\ S_3 &: (x-a-d, c_5-2b), \\ S_4 &: (x-a-d, c_5) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= [R_1^2 - (x+a)^2]^{1/2}, \\ c_2 &= [R_2^2 - (x+a)^2]^{1/2}, \\ c_3 &= [R_2^2 - (x-a)^2]^{1/2}, \\ c_4 &= [R_1^2 - (x-a)^2]^{1/2}, \\ c_5 &= [R_1^2 - (x+a+d)^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

であり、 $x$  は  $S_3$  が内軌に接触した状態と与えられる  $x_1$  を上限とする  $0 \leq x \leq x_1$  の範囲で、ボギーに作用する力のつり合いで決まる。 $x_1$  は幾何学的条件から次式で与えられる。

$$[R_1^2 - (x_1+a+d)^2]^{1/2} - 2b + (x_1-a-d) = R_2^2 \dots\dots\dots (3)$$

曲率中心  $O$  まわりのボギーの旋回角速度を  $\Omega$  とすると、 $P_1 \sim P_4$  各点での速度ベクトル  $V_1 \sim V_4$  は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} V_1 &= \Omega(c_1, -x-a), \\ V_2 &= \Omega(c_2, -x-a), \\ V_3 &= \Omega(c_3, -x+a), \\ V_4 &= \Omega(c_4, -x+a) \end{aligned}$$

いま、各車輪の回転速度を等しいものとし、 $\omega$  で表わす。また、各車輪の  $P_1 \sim P_4$  点における半径を  $r_1 \sim r_4$  で表わす。 $P_1 \sim P_4$  におけるすべり速度ベクトルは  $r_1 \sim r_4$  と  $\omega$  の積と上式から、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= (\Omega c_1 - r_1 \omega, -\Omega(x+a)), \\ v_2 &= (\Omega c_2 - r_2 \omega, -\Omega(x+a)), \\ v_3 &= (\Omega c_3 - r_3 \omega, -\Omega(x-a)), \\ v_4 &= (\Omega c_4 - r_4 \omega, -\Omega(x-a)) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

なお  $r_1 \sim r_4$  は、 $r_0$  をタイヤ踏面の最大半径、 $s$  をタイヤ踏面勾配として次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_0 - s(c_1 - c_5), \\ r_2 &= r_0 - s(c_2 - 2b - c_5), \\ r_3 &= r_0 - s(c_3 - 2b - c_5), \\ r_4 &= r_0 - s(c_4 - c_5) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$P_1 \sim P_4$  点における摩擦係数を  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  とすると、摩擦力  $F_1, F_2, F_3, F_4$  はすべり合速度と反対の方向に働くから、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \mu_1 W_1 (-\Omega c_1 + r_1 \omega, \Omega(x+a)) / |v_1|, \\ F_2 &= \mu_2 W_2 (-\Omega c_2 + r_2 \omega, \Omega(x+a)) / |v_2|, \\ F_3 &= \mu_3 W_3 (-\Omega c_3 + r_3 \omega, \Omega(x-a)) / |v_3|, \\ F_4 &= \mu_4 W_4 (-\Omega c_4 + r_4 \omega, \Omega(x-a)) / |v_4| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $W_1, W_2, W_3, W_4$  は各車輪の輪重である。

レールと車輪とのころがり・すべりは車輪フランジでも起きる。この場合のすべりは、軌道の曲率中心方向に働くフランジ圧に直角な成分を考える必要がある。まず  $S_1$  点を考える。 $S_1$  点の  $O-xy$  座標系での走行速度  $V_{s1}$  は、

$$V_{s1} = \Omega(c_5, -x-a-d)$$

である。一方、 $S_1$  点のボギーに対する相対速度は軌道面に垂直方向 ( $z$  方向) も考慮して、 $(-r_F \omega \cdot r_1 / r_F, 0, -r_F \omega \cdot d / r_F) = (-r_F \omega, 0, -d\omega)$  である。ここに、 $r_F$  は車軸中心からフランジ縁辺までの距離（半径）、 $z$  方向は上方を正にとった。そこで、 $S_1$  点のすべり速度  $v_{s1}$  は、

$$v_{s1} = (\Omega c_5 - r_1 \omega, -\Omega(x+a+d), -d\omega)$$

である。この  $x, y$  方向速度をレール曲線の接線方向成分  $v_n$  と法線方向成分  $v_m$  に分けると  $v_n = (\Omega c_5 - \omega r_1) c_5 / R_1 + \Omega(x+a+d)(x+a+d) / R_1$ 、 $v_m = (\Omega c_5 - \omega r_1)(x+a+d) / R_1 - \Omega(x+a+d)c_5 / R_1$  である。したがって、

レール曲線の接線方向と法線方向および軌道面垂直方向について  $S_1$  点すべり速度  $v_{s1q}$  は  $v_{s1q}=(v_{t1}, v_{n1}, -d\omega)$  である。ところで、このうち  $Q_1$  に直角な成分は接線方向と軌道面垂直方向のみであるから、フランジ圧力  $Q_1$  に直角方向の摩擦力  $F_{s1q}$  が次のように求められる。

$$F_{s1q}=\mu_{s1}Q_1(-v_{t1}, 0, d\omega)/|v_{s1q}|$$

これを再び  $xyz$  方向になおせば、摩擦力  $F_{s1}$  は、

$$F_{s1}=\mu_{s1}Q_1(-v_{t1}c_5/R_1, v_{t1}(x+a+d)/R_1, d\omega)/|v_{s1q}| \quad \dots\dots\dots(7)$$

と求められる。

他の2点  $S_3, S_4$  は常に外軌または内軌に接触しているわけではないが、接触している場合には、式(7)を導いたのと同様にして求めることができる。この場合、幾何学的条件から  $x$  が与えられている。

$S_3$  の  $O-xy$  座標系における速度  $V_{s3}$  は、 $x$  の上限  $x_1$  を用いて、次のように与えられる。

$$V_{s3}=\Omega(c_{s1}-2b, -x_1+a+d)$$

ここに、 $c_{s1}$  は式(2)の  $c_5$  に  $x=x_1$  を代入した値である。ボギーに対する  $S_3$  点の相対速度は  $(-r_3\omega, 0, d\omega)$  であり、レール曲線の接線方向と法線方向および軌道面垂直方向での  $S_3$  点のすべり速度  $v_{s3q}$  は、 $v_{s3q}=(v_{t3}, v_{n3}, d\omega)$  である。ここに、 $v_{t3}=(\Omega(c_{s1}-2b)-r_3\omega)(c_{s1}-2b)/R_2+\Omega(-x_1+a+d)(-x_1+a+d)/R_2$ 、 $v_{n3}=\Omega(-x_1+a+d)(c_{s1}-2b)/R_2+(\Omega(c_{s1}-2b)-r_3\omega)(-x_1+a+d)/R_2$  である。そこで、 $Q_3$  と  $v_{s3}$  で決まる摩擦力を  $x, y$  両方向に分解すれば、 $S_3$  点に作用する摩擦力  $F_{s3}$  は、次のように与えられる。

$$F_{s3}=\mu_{s3}Q_3(-v_{t3}(c_{s1}-2b)/R_2, v_{t3}(x_1-a-d)/R_2, -d\omega)/|v_{s3q}| \quad \dots\dots\dots(8)$$

$S_4$  点の外軌と接するのは、 $x=0$  の場合である。この場合、 $S_4$  点の  $O-xy$  座標上の速度  $V_{s4}$  は、次のように与えられる。

$$V_{s4}=\Omega(c_{s0}, a+d)$$

ここに  $c_{s0}$  は  $x=0$  とおいた  $c_5$  の値である。ボギーに対する  $S_4$  点の相対速度は  $(-r_4\omega, 0, d\omega)$  であるから、レール曲線の接線方向と法線方向および軌道面垂直方向での  $S_4$  点のすべり速度  $v_{s4q}$  は、 $v_{s4q}=(v_{t4}, v_{n4}, d\omega)$  で与えられる。ここに、 $v_{t4}=(\Omega c_{s0}-r_4\omega)c_{s0}/R_1-\Omega(a+d)(a+d)/R_1$ 、 $v_{n4}=(\Omega c_{s0}-r_4\omega)(-a-d)/R_1+\Omega(a+d)c_{s0}/R_1$  である。そこで  $Q_4$  と  $v_{s4}$  で決まる摩擦力を  $x, y$  両方向に分解すれば、 $S_4$  点に作用する摩擦力  $F_{s4}$  は、次のように与えられる。

$$F_{s4}=\mu_{s4}Q_4(-v_{t4}c_{s0}/R_1, -v_{t4}(a+d)/R_1, -d\omega)/|v_{s4q}| \quad \dots\dots\dots(9)$$

(2) 曲線部定常走行中の力のつり合い

1)  $S_1$  のみが外軌に接触する場合 ( $0 < x < x_1$  の場合である。)

式(6), (7)より、 $x, y$  両方向のつり合いが、

$$\begin{aligned} &\mu_1 W_1(-\Omega c_1+r_1\omega)/|v_1|+\mu_2 W_2(-\Omega c_2+r_2\omega)/|v_2| \\ &+\mu_3 W_3(-\Omega c_3+r_3\omega)/|v_3|+\mu_4 W_4(-\Omega c_4+r_4\omega)/|v_4| \\ &-Q_1(x+a+d)/R_1-\mu_{s1}Q_1v_{t1}c_5/R_1/|v_{s1q}| \\ &+F_x=0, \quad \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mu_1 W_1\Omega(x+a)/|v_1|+\mu_2 W_2\Omega(x+a)/|v_2| \\ &+\mu_3 W_3\Omega(x-a)/|v_3|+\mu_4 W_4\Omega(x-a)/|v_4| \\ &-Q_1c_5/R_1+\mu_{s1}Q_1v_{t1}(x+a+d)/R_1/|v_{s1q}| \\ &+F_y=0, \quad \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

$S_1$  点まわりのモーメントのつり合いが、

$$\begin{aligned} &\mu_1 W_1[(-\Omega c_1+r_1\omega)(c_1-c_5)+d\Omega(x+a)]/|v_1| \\ &+\mu_2 W_2[(-\Omega c_2+r_2\omega)(c_2-c_5)+d\Omega(x+a)]/|v_2| \\ &+\mu_3 W_3[(-\Omega c_3+r_3\omega)(c_3-c_5)+(2a+d)\Omega(x-a)]/|v_3| \\ &+\mu_4 W_4[(-\Omega c_4+r_4\omega)(c_4-c_5)+\Omega(x-a)(2a+d)]/|v_4| \\ &+F_x(a+d)-F_yb=0 \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

と与えられる。ここに、 $F_x, F_y$  はボギー中心に外部から加えられる力で、勾配による重力や走行抵抗、曲線抵抗を相殺するための駆動力および超過遠心力に相当する。ここで、 $a, b, d, r_0, r_f, \Omega, W_1, W_2, W_3, W_4, F_x, F_y$  は与えられるものとする。また、 $\mu_1$  と  $\mu_2, \mu_3$  と  $\mu_4$  の間には  $\omega$  と  $x$  を介して次節で述べるような関係がある。そこで、その関係と式(10), (11), (12)から、 $Q_1, x$  と  $\omega$  を決定できる。

2)  $S_1$  が外軌に、 $S_3$  が内軌に接触する場合 ( $0 < x < x_1$  の範囲につり合い状態が存在せず、 $x=x_1$  となる場合である。)

この場合、 $x$  方向のつり合い式(10)の左辺に、 $Q_3$  と  $F_{s3}$  の  $x$  方向成分、 $Q_3(x_1-a-d)/R_2+\mu_{s3}Q_3(-v_{t3}(c_{s1}-2b)/R_2)/|v_{s3q}|$  を追加すればよい。 $y$  方向のつり合いについても、同様に式(11)左辺に、 $Q_3(c_5-2b)/R_2+\mu_{s3}Q_3(v_{t3}(x_1-a-d)/R_2)/|v_{s3q}|$  を、モーメントについては、式(12)左辺に、 $(2a+2d)[Q_3(c_5-2b)/R_2+\mu_{s3}Q_3v_{t3}(x_1-a-d)/R_2)/|v_{s3q}|]-2b[Q_3(x_1-a-d)/R_2+\mu_{s3}Q_3(-v_{t3}(c_{s1}-2b)/R_2)/|v_{s3q}|]$  を追加する。この場合、 $x=x_1$  がすでに与えられているが、代わりに  $Q_3$  が未知数となる。

3)  $S_1, S_4$  がともに外軌に接触する場合 ( $0 < x < x_1$  の範囲につり合い状態が存在せず、 $x=0$  となる場合である。)

この場合、 $x$  方向のつり合い式(10)の左辺に、 $Q_4$  と  $F_{s4}$  の  $x$  方向成分、 $Q_4(a+d)/R_2+\mu_{s4}Q_4(-v_{t4}c_{s0}/R_1)/|v_{s4q}|$  を追加すればよい。 $y$  方向のつり合いについても、同様に式(11)の左辺に、 $Q_4(-c_5/R_1)-\mu_{s4}Q_4v_{t4}(a+d)/R_1/|v_{s4q}|$  を、モーメントについては式(12)左辺に、 $Q_4(-c_5/R_1-\mu_{s4}Q_4v_{t4}(a+d)/R_1/|v_{s4q}|)(2a+2d)$  を追加する。この場合には  $x=0$  がすでに与えられ

ているが、代わりに  $Q_4$  が未知数となる。

(3) 車輪とレールのころがり・すべり摩擦係数

実際の車輪とレールの間に起きるころがり・すべり摩擦の起源については、いくつかの説明がなされているが必ずしも明確ではない<sup>6)</sup>。2つの円筒が接して回転している場合には、ころがり・すべり摩擦係数  $\mu$  を次式で与えたものもある<sup>7)</sup>。

$$\mu = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r}{\mu_0 a} s \right)^2 \right] \mu_0 \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $r$  は円筒半径、 $a$  は弾性接触幅の1/2、 $s$  はすべり率で  $s = \Delta U / U$ 、 $U$  は円筒周速度、 $\Delta U$  は周速度差、 $\mu_0$  はマクロなすべり摩擦係数である。

鉄道ではレールと車輪の接触面に汚れや油分が付着するために式(13)そのものは使用できないが、模型車輪についての室内実験結果が、Fig. 2(a)のような形になることが報告されている<sup>8),9)</sup>。そこでこの実験結果に基づいて  $\mu_0 = 0.25$  とおいた上、この曲線を次の多項式で近似し、ころがり・すべり摩擦係数を与えることにした。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= 3.635 s - 0.25 (7.271 s)^2 & (0 < s < 0.1375) \\ \mu &= 0.25 & (s \geq 0.1375) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ところで急曲線区間ではレールと車輪の過度の摩擦を避けるために外軌に塗油することが普通である。ころがり・すべり面に潤滑油が存在するとすべり率ところがり・すべり摩擦係数の関係はFig. 2(a)とは著しく相違する。同図(b)は同じく模型車輪を用いてころがり・すべり面をスピンドル油で潤滑した場合のころがり・すべり摩擦係数を示したものである。この図は文献10)に示されたデータに基づいて、速度40 km/h、相当する最大接触面圧(輪重5 t、弾性接触幅1 cmのとき、Herzの理論により71 kg/mm<sup>2</sup>)に対応する曲線を外挿して求めたものである。曲線を区分的に多項式で近似して、式(15)を作成した。

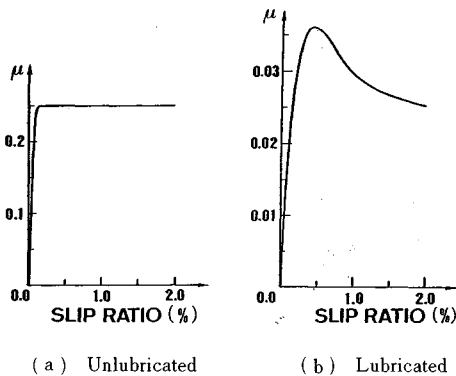


Fig. 2 Rolling friction coefficient.

$$\left. \begin{aligned} \mu &= 0.0968 s^7 - 0.503 s^6 + 1.100 s^5 - 1.410 s^4 \\ &\quad + 1.220 s^3 - 0.729 s^2 + 0.253 s & (0 < s < 0.7) \\ \mu &= 0.0086 / (s + 0.410) + 0.02106 & (s \geq 0.7) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$s$  は前節におけるすべり速度を走行速度(外軌なら  $R_1\Omega$ 、内軌なら  $R_2\Omega$ )で割ったものの絶対値に等しいので、式(14)、(15)を式(10)~(12)と合わせて数値的にボギーのつり合い状態を算出することができる。

3. 輪軸系のねじり振動

以上のように、急曲線区間を通過するボギーの前後軸とも左右輪に不均等なころがり・すべり摩擦力が作用するので、輪軸は相当ねじられることになる。そこで、この輪軸にねじり振動が発生するかどうかを検討してみる。輪軸は減速歯車を介して電動機回転子につながっている。さらに軸箱と吊り装置を介してボギーにつながっているので、これらが輪軸の挙動に影響することが考えられるが、いま簡単のためこれらの影響を無視し、車輪にタイトにはめこまれた減速用大歯車と左右輪のみを考えることにする。Fig. 3はここで取り扱う輪軸系のモデルを示す。図の中央の小円板が大歯車であるが、前後軸の大歯車には2.で計算されるつり合いを成立させるような駆動トルク  $T_F$ 、 $T_R$  がそれぞれ加えられている。後軸左右輪ともフランジがレールに接触していない場合 ( $0 < x < x_1$ ) には、

$$\begin{aligned} T_F &= \mu_1 W_1 r_1 (-\Omega C_1 + r_1 \omega) / |v_1| \\ &\quad + \mu_2 W_2 r_2 (-\Omega C_2 + r_2 \omega) / |v_2| \\ &\quad - Q_1 r_1 (x + a + d) / R_1 + r_F \mu_{s1} Q_1 \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_R &= \mu_3 W_3 r_3 (-\Omega C_3 + r_3 \omega) / |v_3| \\ &\quad + \mu_4 W_4 r_4 (-\Omega C_4 + r_4 \omega) / |v_4| \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

で与えられる。

$S_3$  が接触する場合には  $x = x_1$  と置いた上、 $T_R$  に  $[Q_3(x_1 - a - d) / R_2 + r_F \mu_{s3} Q_3]$  を追加すればよい。 $S_4$  が接触する場合には  $x = 0$  と置いた上、 $T_R$  に  $r_4 Q_4 (a + d) / R_2 + r_F \mu_{s4} Q_4$  を追加すればよい。

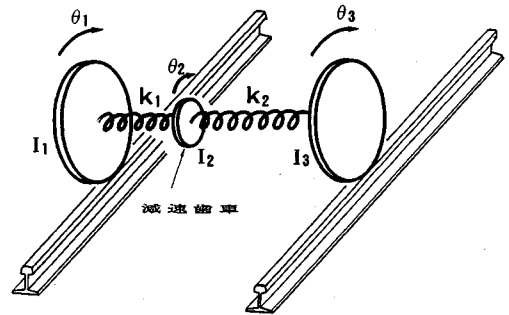


Fig. 3 A model of wheel-shaft system.

さて、以上のような定常的なねじり状態にある輪軸系がねじり振動を起こすときの運動方程式を作成すると次のようである。

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) + C_1 \dot{\theta}_1 + M_{F1} + M_{Q1} &= 0 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) + k_2(\theta_2 - \theta_3) + C_2 \dot{\theta}_2 &= T \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + k_2(\theta_3 - \theta_2) + C_3 \dot{\theta}_3 + M_{F3} + M_{Q3} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

ここに、 $I_1, I_2, I_3$  は各回転円板の回転慣性、 $k_1, k_2$  は軸のねじりばね定数、 $C_1, C_2, C_3$  は各円板に与えられる減衰定数、 $M_{F1}, M_{F3}$  は円板 1, 3 に加えられる垂直荷重による摩擦モーメント、 $M_{Q1}, M_{Q3}$  は同じく水平荷重による摩擦モーメント、 $T$  は駆動トルク、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  は各円板のねじり角である。 $M_{F1}, M_{F3}$  が輪重による摩擦モーメントを、 $M_{Q1}, M_{Q3}$  がフランジ圧によるそれを表わすことはいうまでもない。

#### 4. 数値計算

##### (1) 定常のころがり・すべりの計算

Fig. 4 はある都市鉄道で用いられている車両の輪軸の概形を示したものである。図の円板車輪は軌間 1 372 mm の鉄道のもので、タイヤ最大直径 821 mm、踏面勾配 1/20、フランジ外径 874 mm、タイヤ・レール接点からフランジ縁辺まで ( $d$ ) は約 15 cm である。なお、この車両の軸距 ( $2a$ ) は 2 200 mm、式 (10)~(12) 中の  $F_x, F_y$  を計算するのに必要な車両重量は約 40 t、軌道面からの重心高さは 169.2 cm である。この車輪をもつボギーがある曲線区間を通過する場合の定常のころがり・すべりは、摩擦力がすべり率に対して複雑な変化をするため解析的には求められないが、次のように数値的に計算することができる。

- 1) 曲率半径、カント、勾配を用いて  $F_x, F_y$  を計算する。
- 2) スラック、 $a, d$  を用いて  $x$  の上限  $x_1$  を求める。
- 3)  $x, y$  両方向およびモーメントのつり合い式を用いて逐次探索法で  $x, \omega, Q_1$  を求める。たとえば式 (10)~(12) の左辺の絶対値の和を目的関数とし、当初  $x, \omega, Q_1$  の初期値を与えておいて、目的関数を減少させる方向に動かし、目的関数が実質的にゼロとなったときを解とする。

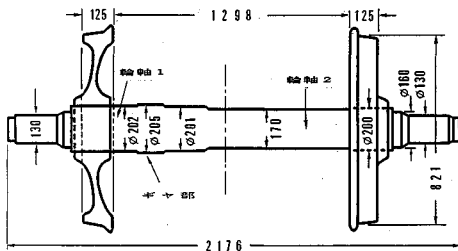


Fig. 4 Wheel-shaft system.

4) 解が  $0 < x < x_1$  の範囲で見つからない場合は、後軸車輪のフランジ接触を考慮して、2.(2) で述べたようにつり合い式を変更する。この場合、逐次探索で求める変数は  $x$  の代わりに、 $Q_3$  ( $x=x_1$  のとき)、または  $Q_4$  ( $x=0$  のとき) となる。

このような方法によって、曲率半径 200 m、スラック 5 mm、カント 8.6 cm、勾配ゼロの区間を速度 40 km/h で列車が走行する場合の定常のころがり・すべり状態を計算した一例を示すと、つり合い状態では、 $x=111$  cm、 $Q_1=1 420$  kg、各車輪のすべり率  $S_1=1.23\%$ 、 $S_2=1.11\%$ 、 $S_3=-0.02\%$ 、 $S_4=0.70\%$  である。この場合は列車速度はカントにつり合っていて、不平衡遠心力はゼロとなっている。なお、 $Q_3, Q_4$  はいずれもゼロである。

##### (2) 輪軸ねじり振動の計算

Fig. 4 の輪軸について、ねじり振動の計算に用いる数値は次のとおりである。

- $I_1=258.7$  kg·cm·s<sup>2</sup> ( $2.535 \times 10^5$  kgcm<sup>2</sup>)
- $I_2=230.8$  kg·cm·s<sup>2</sup> ( $2.262 \times 10^5$  kgcm<sup>2</sup>)
- $I_3=259.8$  kg·cm·s<sup>2</sup> ( $2.546 \times 10^5$  kgcm<sup>2</sup>)
- $k_1=1.365 \times 10^9$  kg·cm/rad. ( $1.338 \times 10^{10}$  N·cm/rad.)
- $k_2=6.829 \times 10^7$  kg·cm/rad. ( $6.692 \times 10^8$  N·cm/rad.)

なお、減衰係数  $C_1, C_2, C_3$  はいずれもゼロとおいた。

この輪軸系が定常的に走行しているかぎり、ねじり振動は発生しない。現実にはねじり振動が発生し継続するならば、それはなにがしかの微小攪乱が成長した結果であろうから、計算でもそれをシミュレートしてみる。そこでつり合い状態の  $\theta_1$  と  $\theta_2$  に強制的な変位 (定常ねじり方向に 10% 増加させた) を与え、以後の振動が減衰するか否かをルンゲ-クッタ-ギル法で数値的に計算してみた。Fig. 5 は、先に述べた曲線区間を時速 40 km で走行するボギーの後軸左右輪のねじれ角によるすべり速度の変化を計算した一例である。塗油された外軌側車輪には、ねじり逆対称 1 次、2 次モードが混在する複雑な振動が

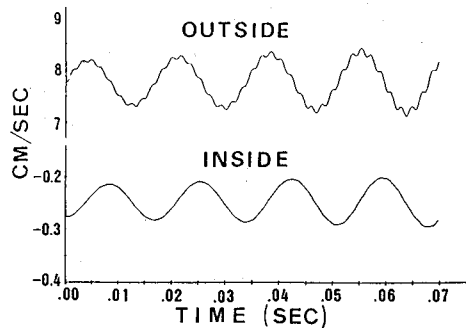


Fig. 5 Slip speed of wheels ( $G=1327$  mm,  $R=200$  m,  $S=5$  mm,  $C=8.6$  cm,  $V=40$  km/h).

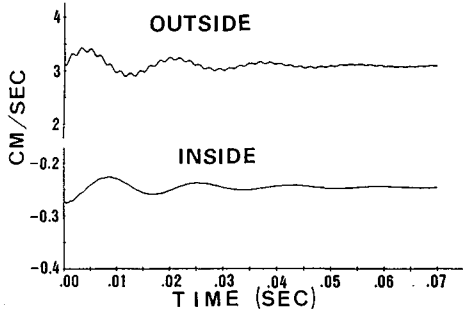


Fig. 6 Slip speed of wheels ( $G=1327$  mm,  $R=400$  m,  $S=0$  mm,  $C=5.5$  cm,  $V=45$  km/h).

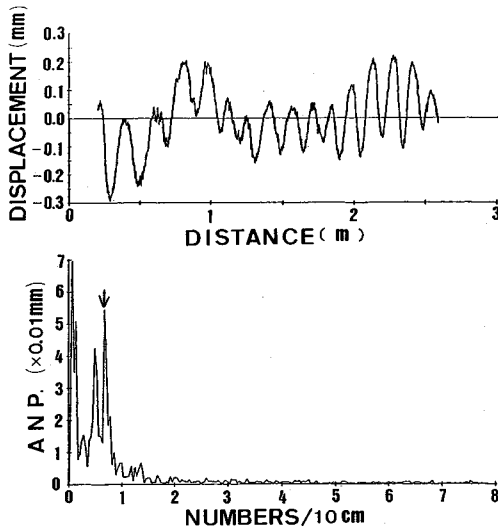


Fig. 7 An example of measured rail corrugation.

生じ、内軌側車輪では1次モードが優勢であることがわかる。輪軸は左右非対称なので振動モードもどちらが内軌でどちらが外軌であるかによって多少変化する。計算結果によれば外軌側で非対称性の影響がやや大きい(2次モードの大きさが変化する)、内軌側では大きくない。曲率が小さくない場合には Fig. 6 に示したように、計算上与えたねじりが急速に解消し振動が継続しない。このような計算を繰り返すことにより、半径 250 m 以下の軌道では後軸のねじり振動が減衰しない領域があること、前軸車輪では与えた強制変位が比較的速く減衰し、振動しにくい傾向にあることなどがわかった。

このようにして励起されるねじり振動数は輪軸系の固有振動数に一致する。Fig. 7 は長さ 1 m の直線ゲージ上をスライドするギャップセンサーを用いた測定装置を試作し、これによって測定した波状摩耗(分割して測定したうえつなぎあわせてある)とその FFT 分析結果の一例である。いくつかの優勢な周波数成分が認められるが、

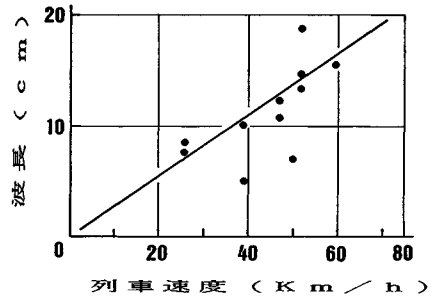


Fig. 8 Wavelength of rail corrugation and train speed.

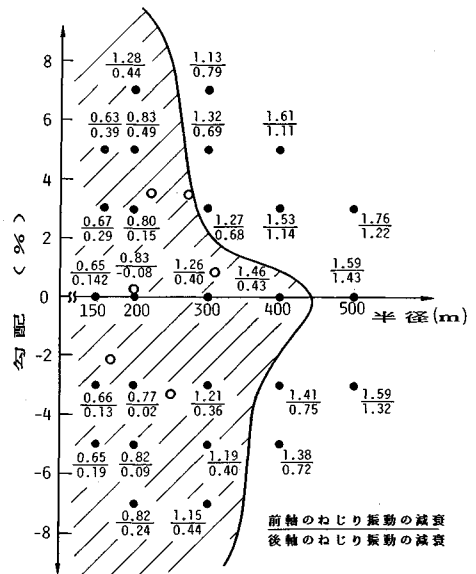


Fig. 9 Possible generation region of corrugation.

このうち最もめだつ成分(↓印)が輪軸系の固有振動周期に近いものである。Fig. 8 は、同様に測定し分析した波状摩耗データから読み取った主な卓越成分の波長 (cm) をその区間の列車速度と対照したもので、図中に記入した直線は輪軸が第一次固有振動を起こした場合に想定される波長を示している。波状摩耗の卓越成分は、厳密に直線上にあるわけではないが、少なくとも記入した直線に近い卓越成分をもってはいる。

(3) 波状摩耗の発生条件

ここに示した計算を曲率と縦断勾配を変えながら行い、波状摩耗の発生限界を把握しようと試みた結果を Fig. 9 に示す。図中の黒点が計算した条件で、点の隣に記入した数字は上段が前軸、下段が後軸のねじり振動の対数減衰率を表わしている。計算では、簡単のため、スラックを曲率半径 300 m 以下の場合一律に 5 mm、それ以上ではゼロとし、カントは走行速度につり合うものを与えてある。実際の鉄道ではスラックを曲率半径とも

に段階的に変化させる。上記スラックは、一定の型式の電車列車のみを用いる都市鉄道で曲率半径が300 mのスラックとほぼ一致しているが、曲率半径が小さい場合には過小となる。ただし、顕著な波状摩耗の発生限界は半径300 m前後であるとみられるので、計算の目的には実害がない。カントも同一のミッションの列車のみが走行する都市鉄道で正常に運行される場合には、著しいカントの過不足はないと考えたものである。ところで、図に示した条件には走行速度の記述がない。これは、超過遠心力の効果が現われないようにカントを与えたこともあって、曲率に応じた実際的な速度範囲では、各車輪のすべり率に与える速度の効果がほとんど現われないからである。計算によれば、ねじり振動が発散するケースはごくわずかであるが、対数減衰率が小さいケースは相当にある。以下に述べるように、本論文で用いたころがり・すべり摩擦係数や輪軸モデルにはいくつかの問題が残されているため、厳密な定量的な結論は得られないが、対数減衰率が小さいほどねじり振動が発生・継続しやすいとはいえるであろう。また、軌道と輪軸の連成振動を考えると、わずかでも生じたレールの凹凸は輪軸のねじり振動を継続させる効果があり、ある程度以下の減衰率であればレール継目などから時間とともに波状摩耗が広がっていく可能性が大きい<sup>12)</sup>。そこで、計算された減衰率が一定程度以下の領域を波状摩耗の発生可能性をもつ領域とみなしてよいであろう。図中の白点は、この輪軸をもつ列車を使用しているある都市鉄道で実際に波状摩耗が認められた条件を表わしている。十分なデータとはいえないが、白点は後軸の対数減衰率が0.5程度より小さいところにある。そこで対数減衰率が0.5より小さい領域を波状摩耗の発生可能性をもつ領域とみなすこととして表示したのが図の斜線部である。一見して勾配ゼロで最も発生しやすく、また、上り勾配より下り勾配の方が発生しやすいようにみえる。これは、勾配がある方が勾配ゼロの場合よりも全体にすべり率が大きく、上り勾配の方が下り勾配よりもすべり率が大きいため、Fig. 2 (b)の曲線の右下がり勾配の小さい領域に入るからである(曲線の右下がり勾配の大きさがネガティブダンピング、すなわち輪軸の自励振動へ与えられるエネルギーの大きさを表わしている)。もちろん、実軌道のころがり・すべり摩擦係数とすべり率との関係が計算で用いたものと異なれば、このような領域が別のところに現われることになる。

## 5. 考 察

本論文は、急曲線区間に発生する波状摩耗が曲線通過中の車輪のころがり・すべり摩擦により励起される輪軸系のねじり振動によるものである可能性を理論的に追求

したものである。摩耗量はころがり・すべり面の垂直荷重と相対すべり速度に依存するとされるので<sup>11)</sup>、車輪のすべり振動は波状摩耗を引き起こすことになる。Fig. 2 (b)に示されるようにレールに塗油されると、最大摩擦係数が減少するだけでなく、すべり速度の増大につれ摩擦係数が低下する領域(図中の曲線の右下がりの部分)が存在する。定常すべり率がこの領域にあれば、輪軸の振動にエネルギーを供給して自励振動を発生させ得る。もちろん、内軌側ではころがり・すべり摩擦は振動エネルギーを吸収する方向に働くので、両者の大きさによっては、振動が減衰することも、継続ないし発散することもある。本論文が示したように、急曲線区間では輪軸のねじり振動が生じている可能性はあるし、それも小さくはない。ただし、本論文で試みた計算にはいくつかの問題が残されており、定量的な結論を導き出すには至っていない。第一に、計算に使用したころがり・すべり摩擦係数が実際の車輪とレールの関係を代表しているものかどうか疑問である。ころがり・すべり摩擦係数は、接触する表面の状態や汚れに大きく依存するといわれるが、現実に使用中のレールと使用中の車輪との間のころがり・すべり摩擦係数は把握されていない。本論文で試みた計算では、ねじり振動が減衰してしまうはずの曲率でも実際には波状摩耗が発生している。塗油されていない内軌レールとはいえ、附着した油分や汚れのため、外軌ほどではなくとも潤滑状態に近い挙動が存在している可能性もある。もしそうならば、外軌レールへの塗油が行われなくとも、波状摩耗が発生することもあり得る。実際、走行中の車輪とレールの間でマクロなすべりと再粘着が起こることは、特に塗油されないレールにも摩擦係数の極大値が存在することを示すものである。

第二に、使用した輪軸モデルが簡単に過ぎるきらいがある。すでに述べたように輪軸は減速大歯車がタイトにはめ込まれているだけでなく、小歯車・自在継手を介して電動機回転子に直結されている。したがって、それらの慣性、弾性を含む機械的な効果、あるいは電動機を駆動する電気的な効果すら関係してくる可能性がある。輪軸の駆動装置との関係は、本論文で用いた前後軸の回転速度 $\omega$ が共通という仮定にも影響する可能性がある。

第三に、摩耗量が輪重・横圧の変動と関係するものであるならば、それらを支配する軌道との動的な相互作用の効果が無視できない。この動的な相互作用は、波状摩耗の発生を促進し、成長させる効果があると考えられる<sup>12)</sup>。

これらの問題点にもかかわらず、本論文は急曲線区間で輪軸のねじり振動が発生している可能性を十分示唆したのと考えられる。もちろん、すべての波状摩耗の発生が輪軸ねじり振動によるものとする必要はない。しかし、急曲線区間に発生するものに関しては、その可能

性が大きいであろう。もしそうならば、ねじり振動を抑制することを中心に、波状摩耗対策が考え得るであろう。残念ながら、現状では計算精度が不十分で、対策を定量的に策定することができない。対策を検討するには、レール潤滑と輪軸構造という機械工学的な面からの研究と、曲率とスラック、運転速度の決定、および軌道の動特性など鉄道工学の面からと両方から総合的に研究する必要がある。

## 6. 結 論

本論文は、鉄道の急曲線区間に発生する波状摩耗の発生機構が輪軸のころがり・すべりに伴うねじり自動振動によるものである可能性を理論的に検討したものである。もとより、波状摩耗は急曲線に発生するものに限られず、その発生と成長にはさまざまな要因が関与すると考えるのが自然である。けれども、急曲線区間では外軌・内軌で車輪に不均等なすべりが発生し、これは輪軸のねじり振動を引き起こす十分な可能性をもっている。本論文で示されたことをまとめれば次のとおりである。

(1) 急曲線区間においては、車輪とレールの間のすべりのため、輪軸系のねじり振動が発生する可能性が大きい。

(2) このねじり振動の振動速度は摩耗量を決定するので、波状摩耗を生じると考えられる。これは、波状摩耗の波長が列車速度に依存することを説明し得る。

(3) 実験室で得られたころがり・すべり摩擦係数では、実際に波状摩耗が観測される範囲よりも狭い範囲の条件でしかねじり振動の発散あるいは継続(リミットサイクル)は見出せない。現実の車輪・レール間のころがり・すべり摩擦係数を知ることが今後の課題である。

(4) 輪軸のねじり振動には、車両の減速装置や電動機、あるいは軌道の振動特性の影響が考えられる。これらの効果を適切に考慮することも今後の課題である。

謝 辞：本研究に際し、熊谷組技術研究所 大嶋孝二氏、および東京都交通局、営団地下鉄関係者に多大なるご支援を得た。また、本論文の作成にあたり、筑波大学構造系 西岡 隆先生には貴重なご助言を頂いた。ここに記して謝意を表わす。

## 参 考 文 献

- 1) 佐藤 裕・山本陽一：レールの波状摩耗，その研究と対策，鉄道技術研究所速報，No.50-90，1959。(Von F. Birman：Schieneriffen, ihre Erforschung und Vorhaltung, Neues aus der Riffelforschung der Deutscher Bundesbahn, 1958の業務用翻訳である。)
- 2) Luis Prieto Delgado：Experiencr obtained concerning the undulatory wear of rails, Proceedings of International Railway Congress Association, pp.963~990, 1958.
- 3) 加藤八洲夫：レールの波状摩耗について，鉄道線路，6巻2号，pp.49~54，1958.
- 4) 国枝正春：鉄道車両の曲線通過時の定常横圧に関する理論解析，鉄道技研報告，No.693，1969.
- 5) 国枝正春：車両の曲線定常横圧の摩擦理論による解析，鉄道技研報告，No.773，1971.
- 6) Kragelsky, I.V., Dobyichin, M.N. and Komalov, V.S.：Friction and Wear, Pergamon Press, 1982.
- 7) Halling, J.：Principle of Tribology, Tintling, Prescott, 1973.
- 8) 中村林二郎・加藤三郎・田中方孝：レール・タイヤ間の摩擦の模型実験，鉄道技術研究所速報，No.59-166，1959.
- 9) 横瀬景司：車輪とレールのすべり現象について，日本機械学会論文集，第3部，37巻304号，1971.
- 10) 丸山弘志・大山忠夫・稲田重男：高速ころがり接触下のすべりと摩擦—高速試験装置の試作と潤滑状態における二三の実験，潤滑，第21巻7号，1976.
- 11) 會田範宗・木村好次・関沢昌美：ころがり—すべり摩擦における摩耗特性の研究，日本機械学会論文集，第3部，37巻303号，1971.
- 12) 角 知憲・佐々木英之・松本嘉司・大嶋孝二：急曲線区間における輪軸ねじり振動に与える軌道振動特性の影響，土木学会論文集投稿予定。

(1990.2.5・受付)