

杭の動的支持力式の理論的解析

THEORETICAL ANALYSIS OF THE PILE DRIVING FORMULAS

境 友昭*

By Tomoaki SAKAI

Pile driving formulas based on the stress-wave theory are presented in this paper. The rigid body hammer and the elastic hammer with no cushion are used for hammer conditions and as the model of the pile base resistance, the rigid-plastic model and the elasto-plastic one are employed. Pile driving formulas presented in this paper and those of ordinary used ones are examined by using the results of the numerical simulation of the pile drivings based on the stress-wave theory. As the results of the theoretical analysis, the applicability of ordinary used pile driving formulas are better for cases which have long duration of the driving force. And it is also found that the applicability of the pile driving formula depends on the wave form of the driving force.

Keywords: bearing capacity, pile driving, theoretical analysis, dynamic, stress-wave theory

1. まえがき

杭の打撃時の貫入量やリバウンド量から杭の支持力を算定する方法に、杭の動的支持力式がある。この杭の動的支持力式には100年以上の歴史があり、この間、さまざまなもののが提案され¹⁾、また討議されている²⁾。動的支持力式のほとんどは、基本的にはハンマのもつ打撃エネルギーと杭の貫入によって消費されるエネルギーの平衡を前提として組み立てられており、エネルギーの伝達効率やエネルギー損失の定式化によってさまざまに展開されている。しかし、杭の動的支持力式に対しては、これまでにも多くの疑問が投げかけられている^{3)~5)}。これらの疑問の多くは、杭の動的支持力式によって得られる値が場合によっては、静的載荷試験の結果と良い相関関係を示さないこと、また種々の動的支持力式によって得られる杭の支持力の推定値がそれぞれ違った値を示すこと、に集約される。

世界的にみると、波動方程式による杭の支持力の解析方法^{6)~8)}が開発されて以来、杭の動的支持力式が使われる機会は少なくなったが、国内では杭の支持力の管理方法の1つとして今日でも広く用いられている。

波動理論に基づいた杭の支持力解析方法が、従来からの動的支持力式に優れるとすれば、逆に、波動理論に基づいた動的支持力式を求ることによって、取扱いの簡便さと波動理論による理論的根拠を備えた杭の動的支持力式を求めることができるものと考えられる。本論文では、このような考え方に基づいて、波動理論を基礎とした動的支持力式を導出する。ついで、波動方程式の数値解に基づいた杭打ちシミュレーション⁹⁾による杭の支持力と貫入量の関係を用いて、杭の動的支持力式の理論的妥当性の検討を行う。また、この中で従来から用いられている杭の動的支持力式についても検討を行う。

2. 杭の動的支持力式の導出条件

波動理論に基づいた杭の動的支持力式を求める場合、導出の前提となる杭頭での打撃力の時間波形や杭先端および杭周囲での地盤の反力モデルによって、さまざまな式を組み立てることができる。ただし、数学的なモデルを用いて考察できる条件は、実際の杭の動的載荷時の諸条件の一部に過ぎず、複雑な条件を設定して式の展開を行うことは、式を適用するうえで繁雑となることにつながり、かといって杭の支持力の推定精度の向上に結びつくとは断言できないと考えられる。このため、本論文では、ハンマの条件として2種類、また杭先端での地盤の

* 正会員 工博 建設省土木研究所施工研究室研究員
(〒305 つくば市大字旭1)

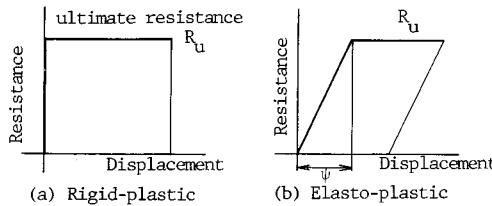


Fig.1 Models of the pile toe resistance.

支持力として、Fig.1に示す剛塑性モデルおよび弾塑性モデルの2種類を用いるにとどめた。なおハンマは剛ハンマおよび弾性ハンマ（杭と機械インピーダンスが等しく、かつ質量が剛ハンマと等しいハンマ）を用い、またクッションを用いていない場合を対象に式の導出を行った。

本論文では、杭打ちシミュレーションの結果と比較して動的支持力式の適用性の検討を行うが、このときのハンマおよび杭の条件はTable 1に示すとおりとした。

3. 杭頭応力の時間波形

（1）剛ハンマによる打撃

ハンマが杭と衝突するときの速度を V_0 とすると、衝突して t 秒後の杭頭の粒子速度 v は、

$$v = V_0 \exp\left(-\frac{z}{M} t\right) \quad (1)$$

となる¹⁰⁾。ここで、 z は杭の機械インピーダンス、 M はハンマの質量である。杭の粒子速度と力の間には一定の関係があり、圧縮応力を正とすると、進行波（↓印で表記する）について、

$$F_{\downarrow} = z v_{\downarrow} \quad (2)$$

また、後退波（↑印で表記）について、

$$F_{\uparrow} = -z v_{\uparrow} \quad (3)$$

の関係が成立する¹¹⁾。なお、進行波を↓印で表記するのは、杭打ちでは杭頭を座標原点として下向き方向を正の方向とする座標系を用いるためである。また、このため進行波を下向き波、後退波を上向き波とよぶ場合がある。杭頭が打撃されている間に生じる波動は進行波のみであり、したがって、杭頭での粒子速度が得られると式(2)

Table 1 Specification of hammer and pile used for the numerical simulation.

Item	Hammer	Pile
density (kg/m ³)	7,800	7,800
length (m)	1)	10
sectional area (m ²)	1)	0.014
mass (kg)	1,000	1,092
young's modulus (N/m ²)	2.14×10 ⁹	2.14×10 ⁹

1) Rigid hammer; length=0.2m
Elastic hammer; length=9.16m
sectional area=0.014m²

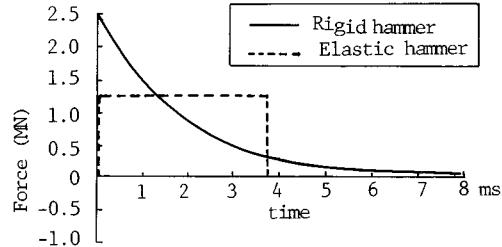


Fig.2 Wave forms at the pile head.

からただちに打撃力 F が求められる。

（2）弾性ハンマによる打撃

杭とハンマの機械インピーダンスが等しいとする。このとき、杭頭での打撃力の波形は矩形となり、粒子速度 v およびその継続時間 T_H は次のとおりとなる。

$$v = \frac{1}{2} V_0, \quad T_H = \frac{2 L_H}{c_H} = \frac{2 M}{z} \quad (4)$$

ここで、 L_H はハンマの長さ、 c_H はハンマ内での波動の伝播速度である。Fig.2に式(1)および式(4)で示される杭頭の粒子速度の波形を示す。

4. 杭の動的支持力式の導出

波動理論的考察から杭の先端支持力と貫入量の関係式を求め、これを先端支持力について解き、杭の動的支持力式とする。

（1）杭先端抵抗が剛塑性モデルで表現されるとき

剛塑性モデルはFig.1に示すように、極限抵抗 R_u 以下の杭の貫入力に対して地盤は剛体として作用し、したがってこのとき、杭先端は固定端として取り扱われる。貫入力が R_u を上回ると、杭は地盤の塑性抵抗に打ち勝って貫入する。杭が十分に長く、杭頭での反射波の影響を考慮しなくてもよい場合の杭の貫入量 S は、

$$S = \int_0^T v_p dt \quad (5)$$

で与えられる。ここで v_p は杭先端の粒子速度である。また、積分区間 $[0, T]$ は、杭先端での粒子速度が正となる時間である。波動論からの考察では、杭先端での粒子速度 v_p は、杭先端での進行波の粒子速度 $v_{p\downarrow}$ と後退波の粒子速度 $v_{p\uparrow}$ の和として示される。すなわち、

$$v_p = v_{p\downarrow} + v_{p\uparrow} \quad (6)$$

である。一方、杭先端での力のつり合いから、

$$R_u = F_{p\downarrow} + F_{p\uparrow} \quad (7)$$

が成立する。ここで、 $F_{p\downarrow}, F_{p\uparrow}$ は、それぞれ杭先端での進行波、後退波の力である。式(7)に式(2)の関係を代入し、 $F_{p\uparrow}$ を求め、さらに式(3)を代入して $v_{p\uparrow}$ を求める。これを式(6)に代入して v_p を得ると式(5)は、

となる。ここで、 $F_1(x)$ は、杭頭から x の距離における進行波の力を意味する。式(38)から、杭頭に生じた進行波が杭先端に達するまでに、杭の周面抵抗 F_s の $1/2$ だけ減衰することが示される。このときの杭の貫入量は、式(38)から、

$F_{h\downarrow}$: 杭頭での進行波

よって、

$$S = \int_0^T \left\{ \frac{2}{z} \left(F_{h \downarrow} - \frac{1}{2} F_s \right) - \frac{R_u}{z} \right\} dt \\ = \int_0^T \left[\frac{2 F_{h \downarrow}}{z} - \frac{1}{z} (R_u + F_s) \right] dt \quad \dots \dots \dots \quad (40)$$

となる。ここで、 $v_{h\downarrow} = F_{h\downarrow}/z$ であることを考慮し、式(8)と式(40)を比較することによって、杭の周面に抵抗が作用している場合に、本論文で導出した杭の動的支持力式を適用すると、杭の周面支持力と先端支持力を合わせた値（すなわち、杭の全支持力）が推定されることがわかる。

7. 杭の動的支持力式の適用性の検討

(1) 検討対象とした杭の動的支持力式

検討対象とした杭の動的支持力式は、本論文で導出した式（14）、式（16）および従来から用いられてきた支持力式のうちTable 2に示す式¹⁸⁾である。従来から用いられてきた杭の動的支持力式では、エネルギー伝達効率をはじめとしてさまざまな係数が用いられているが、ここでは特に意味のあるものを除き、1または0としている。

(2) 理論的検討の方法と結果

適用性の検討は、Table 1 に示す条件で、杭打ちシミュ

Table 2 Pile Driving Formulas used for this study.

Name	Formula
Engineering News Record	$\frac{WH}{S+C}$, (C=0.00254m)
Weisbach	$\sqrt{\frac{S^2 + 4WHJ - S}{2J}}$, $J = \frac{L}{2AE}$
Janbu	$\frac{1}{2J} \sqrt{S^2 + 4WH - \frac{J}{1.5 + 0.3 \frac{P}{W}}} - S$
Danish	$\frac{WH}{S + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2WHL}{AE}}}$
Dutch, Gow	$\frac{WH}{S \sqrt{(1 + \frac{P}{W})}}$

W : mass of the hammer

P : mass of the pile

H : drop height of the hammer

H : drop height of the hammer
A : sectional area of the pile

E : young's modulus of

L : length of the pile

S : pile penetration per a blow

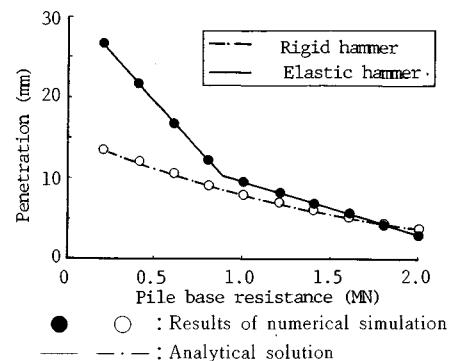
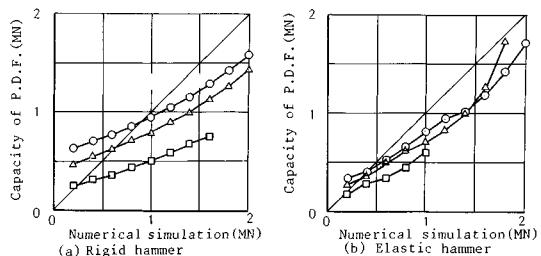


Fig. 4 Relation between base resistance and penetration per a hammer blow.

レーションによって杭の先端支持力と貫入量の関係を求め、これを動的支持力式に代入して、杭の支持力の計算値を得る、という方法によって行う。なお、ハンマの落下高さ H は、0.2, 0.6, 1.0 m とした。Fig.4 に、杭の先端支持力と貫入量の関係を示す。図中の○印および●印は、杭打ちシミュレーションによって求めた値、また曲線は、式(14)および式(16)の関係を示している。図に示すとおり、シミュレーションと動的支持力式の計算結果はよく一致する。弾性ハンマによる打撃の場合、貫入抵抗（杭の先端支持力）1 MN 付近に折れ線となるところがある。これは、本論文の対象とはしていないが、杭先端で反射した波動が杭頭で反射し、再び杭先端に達して杭の再貫入現象が生じているものである。後で計算結果が示すように、このような条件下では、ここで導出した杭の動的支持力式は適用できない場合がある。

数値計算に入力した杭の先端支持力と杭の動的支持力式に杭の貫入量を代入して得られた支持力の関係を Fig.5~11 に示す。Danish の式は、ハンマが剛体である場合も弾性体である場合もあり当てはまりが良くない。他の動的支持力式は、どちらかというと弾性ハンマの場合の方が適用性が高い。特に、図から明らかのように、剛ハンマの場合は、ハンマの落下高さによって算定される支持力の値が異なるが、弾性ハンマの場合、ハン



Hammer stroke $H=0.2$ m \square , $H=0.6$ m \triangle ,

$H=1.0\text{ m}$ ○

Fig. 5 Engineering News Record Formula.

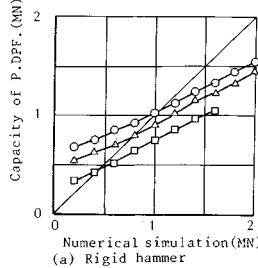
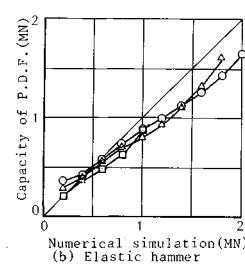
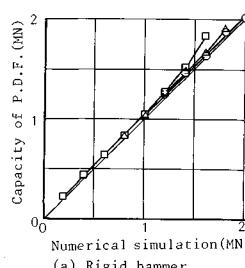


Fig. 6 Weisbach Formula.



(a) Rigid hammer (b) Elastic hammer



(a) Rigid hammer (b) Elastic hammer

Fig. 6 Weisbach Formula.

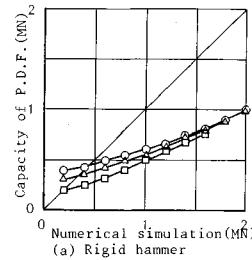
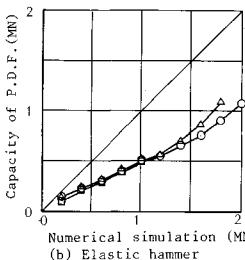
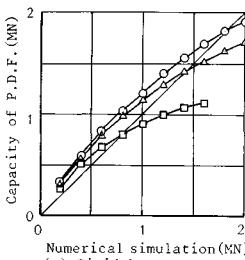


Fig. 7 Dutch Formula.



(a) Rigid hammer (b) Elastic hammer



(a) Rigid hammer (b) Elastic hammer

Fig. 7 Dutch Formula.

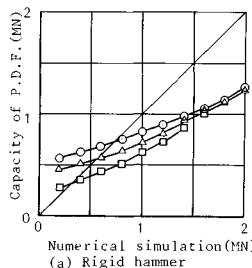
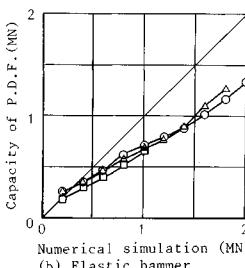


Fig. 8 Janbu Formula.



(a) Rigid hammer (b) Elastic hammer

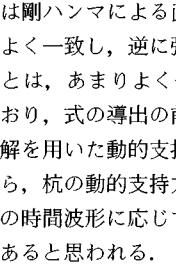


Fig. 8 Janbu Formula.

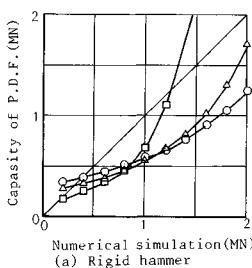
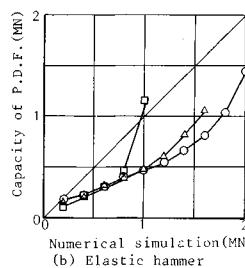


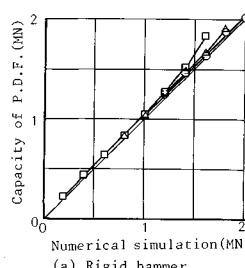
Fig. 9 Danish Formula.



(a) Rigid hammer (b) Elastic hammer

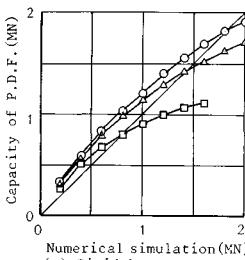
マの落下高さの影響は非常に小さくなる。従来からの動的支持力式の中では、Weisbach の式の適用性が高い。これらのことから考察すると、従来からの杭の動的支持力式は、剛ハンマを前提として組み立てられているものの、波動論的には、弾性ハンマによる杭の打撃を対象としているものと考えられる。

また、Fig. 10, 11 からも明らかなように、波動理論に基づいた杭の動的支持力式は、剛ハンマを前提としてい



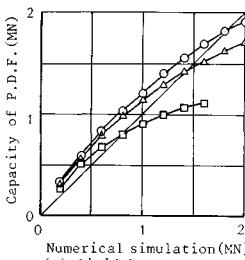
(a) Rigid hammer (b) Elastic hammer

Fig. 10 Rigid Hammer Formula (Eq. (14)).



(a) Rigid hammer (b) Elastic hammer

Fig. 10 Rigid Hammer Formula (Eq. (14)).



(a) Rigid hammer (b) Elastic hammer

Fig. 10 Rigid Hammer Formula (Eq. (14)).

る式では剛ハンマによる直接打撃を対象とした数値計算結果とよく一致し、逆に弾性ハンマを対象とした数値計算結果とは、あまりよく一致しない。実際、Fig. 4 にも示すとおり、式の導出の前提と等しい条件での数値計算と解析解を用いた動的支持力式との対応は良好であり、これから、杭の動的支持力式を用いる場合、杭頭に生じる応力の時間波形に応じて適用する式を選択することが必要であると思われる。

8. 結 論

杭の動的支持力式を波動理論に基づいて導出し、また従来から用いられている動的支持力式とともに、杭打ちの数値計算の結果を用いて理論的検討を行った。この結果、以下のことが明らかになった。

(1) 従来からの杭の動的支持力式は、ハンマが剛体であることを前提としているが、理論的に得られる結果は、ハンマを弾性体と考えた場合に近い値を示す。これは、杭の動的支持力式は、たとえば油圧ハンマのように、比較的波長の長い打撃力をもつ杭打ちに適用性が高いことを示唆するものである。

(2) 従来からの杭の動的支持力式の中では、比較的 Weisbach の式の適用性が高い。ただし、これは波動理論によって得られた、打撃-貫入量関係の枠組み内でのことであって、実際のデータに対する適用性を論じているのではない。

(3) 波動理論に基づいて導出した杭の動的支持力式は、数値計算の結果と非常に良く一致する。ただし、打撃条件が式の導出条件と異なると適用性は低くなる。こ

これから、杭の動的支持力式を適用する場合、杭頭での打撃応力の時間波形を考慮すべきであることが示唆される。

(4) 杭先端でのエネルギー平衡を前提とした式と杭の貫入量をもととした式は等価である。すなわち、波動理論に基づいて杭の貫入量から求めた杭の動的支持力式は、杭中でのエネルギー平衡を満足する。

(5) 杭周面に摩擦抵抗、すなわち杭の周面支持力が作用する場合、杭の貫入量から求めた杭の動的支持力式は、杭の全支持力（周面支持力と先端支持力の和）を示す。ただし、杭周面での支持力の形態が弾塑性で、その弾性変形量が無視できない場合は除く。

(6) 波動理論に基づいて導出した杭の動的支持力式の実際への適用性、また実用化する場合の適用範囲については、実データを用いての検討が必要である。

参考文献

- 1) ASCE Report : Pile-Driving Formulas, Progress report of committee on the bearing value of the pile foundations, ASCE Reports, pp. 853~864, 1941.
- 2) Dames, T.R., Modre, W.W. et al. : Pile-Driving Formulas, Progress report of committee on the bearing value of the pile foundations, Discussions, ASCE, pp. 1939~1955, 1941, ほか。
- 3) Mansur, C.I. and Facht, J.A. Jr. : Pile-loading Test, Morgamza Floodway Control Structure, ASCE Proc., Separate 324, 1953.
- 4) Olson, R.E. and Floate, K.S. : Pile Driving Formulas for Friction Piles in Sand, ASCE, Vol. 93, No. SM6, pp. 279~296, 1967.
- 5) Agershou, H.A. : Analysis of the Engineering News Pile Formula, ASCE, Vol. 68, No. SM5, pp. 1~11, 1962.
- 6) Rausche, F., Moses, F. and Goble, G.G. : Soil Resistance Predictions from Pile Dynamics, J. Soil and Found. Div., ASCE Proc., Vol. 98, No. SM9, pp. 917 ~935, 1972, ほか。
- 7) van Koten, H. and Middendorp, P. : Equipment for integrity testing and bearing capacity of piles, Intl. Seminar on the Application of Stress-Wave Theory on Piles, Proc., pp. 69~76, 1980.
- 8) Beringen, van Hooydank, W.R. and Schaap, L.H.J. : Dynamic pile test, An aid in analyzing driving behaviour, Intl. Seminar on the Application of Stress-Wave Theory on Piles, Proc., pp. 77~97, 1980.
- 9) 境 友昭：杭打ち解析のための波動方程式の数値解法、土木学会論文集、第424号／III-14, pp. 75~83, 1990.
- 10) Timochenko, S. and Goodier, J.N. : Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1951.
- 11) Pelleau, R. : Instrumentation of offshore piles during driving, Intl. Seminar on the application of stress-wave theory on piles, Proc., pp. 323~328, 1980.
- 12) Goninn, H. : Rapport Général sur la Pénétrabilité et le Fonçage des Pieux, Penetrability and Drivability of Piles, Proc., Vol. 1, pp. 25~32, 1985.
- 13) Guilloux, A. and Blondeau, F. : Comparaisons entre les Prévisions et les Observations de Battage des Pieux Métalliques, Penetrability and Drivability of Piles, Proc., Vol. 1, pp. 103~106, 1985.
- 14) 宇都一馬・冬木 衛：波動理論に基づいた杭の動的支持力算定式の提案、第14回土質工学研究発表会講演論文集、pp. 901~904, 1979.
- 15) 宇都一馬・冬木 衛：波動理論に基づいた杭の打止め管理式、第15回土質工学研究発表会講演論文集、pp. 949 ~952, 1980.
- 16) 宇都一馬・冬木 衛・桜井 学：杭の打止め管理式の再検討、第17回土質工学研究発表会講演論文集、pp. 2041 ~2044, 1982.
- 17) Smith, E.A.L. : Pile Driving Analysis by the Wave Equation, J. Soil Mech. and Found. Div., ASCE, Vol. 86, No. SM4, pp. 35~61, 1960.
- 18) Whitaker, T. : The design of pile foundations, 2nd ed., Oxford Pergamon Press, 1976.

(1989.11.29・受付)