

杭打ち解析のための波動方程式の数値解法

NUMERICAL SOLUTION OF THE WAVE EQUATION FOR PILE-DRIVING ANALYSIS

境 友昭*

By Tomoaki SAKAI

A solution of the wave equation for the pile driving analysis by means of the finite difference method is presented in this paper. According to the method of solution presented here, the boundary conditions and the wave equation are differentiated and formed into simultaneous equations, and then the wave equation at the boundaries are solved. This method basically follows the same procedure as an analytical method and thus is able to obtain wave equations that stand good at any point of the pile system. Because of this, as long as the behaviour of pile system can be expressed by the one dimensional wave equation, it is possible to obtain the numerical solutions even though the pile system is complex.

Keywords : wave equation, pile driving, numerical solution, finite difference method

1. まえがき

ハンマで打撃された杭の挙動が波動方程式で説明できることは St. Venant によって明らかにされている¹⁾。打撃時の杭の挙動を解析するための波動方程式の解法には大別して、特性曲線法²⁾や重複反射理論³⁾とよばれる解析解による方法と、差分法^{4)~6)}や有限要素法⁷⁾のように数値計算による方法がある。解析解による方法は、波動の伝播に伴う反射や透過を直接的にトレースして杭中の応力分布の時間変化を図解的に求める方法であり、わかりやすい反面、杭系が複雑な場合には計算が繁雑となって適用が難しい、という問題がある。数値計算による方法は、杭系のモデルを構成することができればどのように複雑な杭系でも計算の対象となる、という利点がある。

杭打ち解析のための波動方程式の数値解析方法に Smith の波動方程式⁸⁾がある。Smith は、杭、ハンマ、クッションなど杭系を構成する杭要素を、ばね-質量系の離散型モデルで近似し、このモデル、すなわち直列に結合された多自由度振動系の過渡応答を逐次計算によって解く方法を発見した。Smith が杭打ち解析のための波動方

程式の解法を報告した当時は、杭の動的な施工管理方法として、杭の動的支持力公式 (Pile Driving Formula)⁹⁾が広く用いられていた。Smith の波動方程式については、解析方法や実際への適用性などに関し多くの論議¹⁰⁾があったが、今日では杭打ち問題の解析方法として広く用いられている^{11), 12)}。

しかしながら、Smith の解法を基礎とした波動方程式には、いくつかの問題点も指摘されている^{3), 5), 6), 13)}。その主なものは、①杭周面に外力が作用しない場合でも波動の伝播過程で波形の変形が生じること、②杭先端での地盤の反力が大きい場合に波動が発散し、エネルギーの平衡が保たれないこと、および③ハンマの打撃による杭頭での応力波形が解析解と異なること、などである。これらは、いずれも、時間、距離での差分間隔の設定方法および境界条件の取扱い方の問題に起因しているものである。

本論文では、打撃時の杭の挙動を記述する波動方程式およびこれを拡張した方程式を求め、これを直接、差分法を用いて解く方法について示す。また、差分間隔が微小であれば、本論文で示す解と解析解が十分な精度で一致することを示す。

* 正会員 工博 建設省土木研究所施工研究室研究員
(〒305 つくば市大字旭1)

2. 一次元波動方程式

杭を一次元の完全弾性体とみなして考える。いま、図-1に示すような、杭の微小部分での力のつり合いについて考察する。微小部分の外周面には変位に比例する抵抗と粒子速度に比例する抵抗が作用するとする。前者の抵抗は杭の周面に付着した地盤のせん断変形に起因する抵抗を示し、したがって、図-2に示すように、地盤の最大弹性変形量までは変位に比例するが、それ以上の変形に対しては塑性的挙動を示すと考える。粒子速度に比例する抵抗は、杭の内部摩擦および地盤と杭との粘性によるエネルギーの消散を示すものと考える。

杭の断面積を A 、杭材の密度を ρ とすると、微小部分での力のつり合いから、次の式が得られる。

$$\rho A \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_1 - F_2 - f_r \delta x - h \delta x \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

ここで、 F_1 、 F_2 は微小部分の境界面に作用する力、 f_r は杭の単位長さ当たりに作用する地盤の抵抗、 h は粘性抵抗係数、 u は変位、 t は時間である。微小部分の長さ δx が十分に小さいとき、圧縮方向の応力を正にとれば、

$$F_2 = F_1 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x \cdot A \cdot E \quad (2)$$

が成立する。ここで、 E は杭材の縦弾性係数、 x は距離である。式(2)を式(1)に代入し、両辺を $A \delta x$ で除して式を整理すると、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{f_r}{AE} + \frac{h}{AE} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

となる。ここで、 $c = \sqrt{E/\rho}$ は、杭に外部からの抵抗が作用しない場合の波動の伝播速度である。式(3)は、杭周面に抵抗が作用する場合の波動の伝播を記述する方程式である。なお、式(3)において、杭の周面に抵抗が作用しない場合、

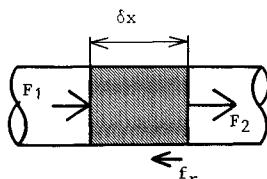


Fig.1 Equilibrium of forces in an elastic bar.

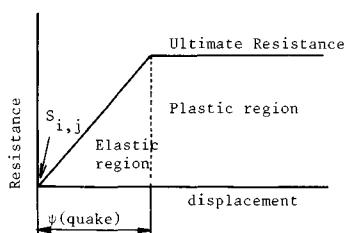


Fig.2 Model of the soil resistance at pile toe.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

の波動方程式となる。式(3)は、電信方程式とよばれる方程式と同じ形式をもち、厳密にいうと波動方程式とは異なるが、本論文では波動方程式とよぶ。

3. 差分演算子と微分演算子

差分法は、微分方程式に現われる微分演算子を差分演算子に置き換えて、直接的に微分方程式の数値解を求めめる方法である。式(3)に示す偏微分方程式を解くために必要な1階、2階の微分演算子は次によって差分化される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2 \delta x} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2 \delta t} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{\delta x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{\delta t^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 u は杭の変位、 δx は距離軸での差分間隔、 δt は差分時間である。また i は距離 ($x = i \delta x$)、 j は時間 ($t = j \delta t$) を示す添字である。

また、打撃時の杭の挙動の解析では、杭の先端での地盤の反力のように外力が作用する場合の解も必要である。任意の関数 $w(t)$ を、 $t = j \delta t$ で差分化する。差分は、関数を差分間隔の幅をもつパルス列に分解することであるから、

$$\begin{aligned} w_j &= \frac{1}{2} |w(j+0.5) + w(j-0.5)| \\ &= \frac{1}{4} w(j+1) + \frac{1}{2} w(j) + \frac{1}{4} w(j-1) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。

4. 波動方程式の差分表現と差分間隔比

杭系を図-3のように差分化する。杭系は、ハンマから杭までの杭要素を1つの一次元弾性体として考えたもので、ハンマの上面の節番号を0、すなわち原点とする座標系をもつ。

式(4)に式(5)の2階微分の差分式を代入して、

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} - \frac{\delta x^2}{c^2 \delta t^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = 0 \quad (7)$$

が得られる。ここで、 $c \delta t / \delta x \equiv \nu$ (差分間隔比) とおく。Smithは、この差分間隔比を1/2とすることを提案している。しかし、宇都ら¹³⁾は、差分間隔比を1以外とする応力の波形が正しく伝播されないことを実証的に指摘している。

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{1+\Lambda} [u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - M(0.5 u_{i,j} + 0.25 \phi_i - 0.75 s_{i,j}) - (1+0.25 M - \Lambda) u_{i,j-1}] \dots \dots \dots (20)$$

となる。

後者の場合,

$$f_r = \frac{1}{4} m(u_{i,j-1} - s_{i,j-1}) + \frac{3}{4} m\phi_i \dots \dots \dots (21)$$

であるから、波動方程式は、

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{1+\Lambda} [u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 0.75 M\phi_i - (1+0.25 M - \Lambda) u_{i,j-1} - 0.25 M s_{i,j-1}] \dots \dots \dots (22)$$

として差分化される。

式 (20) が成立するのは、式 (18) で計算した変位において、

$$|u_{i,j+1}| > s_{i,j} + \phi_i \dots \dots \dots (23)$$

となる場合である。また、式 (22) は、式 (20) が成立した直後の計算ステップで、かつ $u_{i,j+1}$ が塑性領域内にある場合に用いる式である。

また、この領域では、杭と周面地盤の間に相対的なずれが生じ、その大きさは、

$$s_{i,j+1} = |u_{i,j+1}| - \phi_i \dots \dots \dots (24)$$

となる。

(3) 塑性領域

この状態での地盤の抵抗は、粘性抵抗のほかは、極限抵抗 $f_r = m\phi_i$ で一定である。したがって波動方程式の差分は、

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{1+\Lambda} [u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - M\phi_i - (1-\Lambda) u_{i,j-1}] \dots \dots \dots (25)$$

となる。この領域でも、杭と周面地盤との相対的なずれは更新され、その大きさは、式 (24) で示される。

(4) 塑性から弾性への遷移領域

この状態は、杭の分節要素 i に伝達される駆動力が減少し、杭の分節要素が地盤に拘束される状態である。すなわち、式 (25) で時刻 $j+1$ の変位を計算した結果、

$$|u_{i,j+1}| - s_{i,j} < \phi_i \dots \dots \dots (26)$$

となる場合である。また、(2) の場合と同様、時刻 j で弾性領域となつたが、時刻 $j-1$ ではまだ塑性領域にある場合も、この遷移領域である。

前者の場合、地盤の抵抗 f_r の差分は、

$$f_r = 0.75 m\phi_i + 0.25 m(u_{i,j+1} - s_{i,j}) \dots \dots \dots (27)$$

となる。したがって波動方程式の差分は、

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{1+0.25 M} [u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - M(0.75 \phi_i - 0.25 s_{i,j}) - (1-\Lambda) u_{i,j-1}] \dots \dots \dots (28)$$

となる。

後者の場合、

$$f_r = 0.25 m\phi_i + 0.75 m(u_{i,j+1} - s_{i,j}) \dots \dots \dots (29)$$

よって、

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{1+\Lambda+0.75 M} [u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - M(0.25 \phi_i - 0.75 s_{i,j}) - (1-\Lambda) u_{i,j-1}] \dots \dots \dots (30)$$

となる。

6. 境界条件と波動方程式の解

前節で述べた波動方程式の差分法による解は、波動の伝播を示すが、波動の実際上の波形は、杭系の初期条件と境界条件によって決定される。差分法による計算では、ハンマから杭までのすべてを差分間隔 $c\delta t$ で差分化する。このとき、計算上の原点となるハンマの上面は、自由端となる。また、杭先端での地盤の反力が杭の周面抵抗の場合と同じように、弾性領域と塑性領域をもつ、いわゆるバイリニアモデルで記述されるとき、それぞれの状態とそれらの遷移状態での境界条件が生じる。さらに、ハンマとアンビル、クッションと杭のように材質やその断面積が異なる場合、この面では波動の透過、反射が生じ、これも境界条件として取り扱う必要がある。境界での波動方程式は、境界条件と波動方程式をともに差分化し、それらを連立させることによって求める⁶⁾。

本論に示す差分法では両側差分を用いており、杭の境界では、たとえば $u_{-1,j}$ のように杭系には存在しない変位を参照することになる。これを本論では、「未定義ポテンシャル」とよぶ。境界では、境界条件および運動方程式のどちらにも未定義ポテンシャルが生じる。このため、式を連立させて未定義ポテンシャルを消去することによって、境界で成立する波動方程式を求めるという方法を用いている。

(1) 自由端

杭系では原点（ハンマ上面）がこれに相当する。自由端では、応力が作用しないから、境界条件は、

$$(\partial u / \partial x) = 0 \dots \dots \dots (31)$$

である。これを差分化すると、

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 0 \dots \dots \dots (32)$$

となる。ここで、自由端は原点であるから、 $i=0$ である。ところが、式 (32) に $i=0$ を代入すると、 $u_{-1,j}$ という杭系に存在しない変位が参照される。これが未定義ポテンシャルである。波動方程式 (18) で $i=0$ とすると同様に未定義ポテンシャルが生じる。式 (32) を式 (18) に代入し、 $i=0$ とおいて整理すると、自由端で成立する波動方程式、

$$u_{0,j+1} = \frac{1}{1+0.25 M+\Lambda} [2 u_{1,j} - 0.5 M u_{0,j} + M s_{0,j} - (1+0.25 M - \Lambda) u_{0,j-1}] \dots \dots \dots (33)$$

が得られる。一般的に考えてハンマの周面には地盤の抵抗は作用せず、またハンマの内部での波動の減衰も小さ

7. 初期値および初期条件

杭系に打撃力を発生させるのは、ハンマと杭の衝突現象である。ハンマが杭と衝突する時刻を0 ($j=0$) とすると、時刻0以前では杭系は静止状態にあり、また時刻 $j=0$ においてもハンマ以外の杭要素は静止していると考える。

したがって、波動方程式の数値計算における初期値は、
 $u_{i,j}=0; i=0, 1, 2, \dots, j < 0$

また、ハンマを除く杭要素について、

$u_{i,j}=0; i=N_h+1, N_h+2, \dots, j=0$

となる。なお、 N_h はハンマの分節数を示し、杭系の節番号は0から始まる。

ハンマと杭の衝突速度を V_0 とすると、ハンマの変位は、ハンマ内の波動によって生じる変位と、ハンマの併進運動（ハンマの落下）による変位、 $V_0\delta t$ の和となる。波動方程式では、この2つの変位は相互に独立で、重ね合わせができる。したがって、波動方程式の差分にハンマの併進運動による初期値を導入するためには、式(39)の A_c, B_c に $V_0\delta t$ を加えればよい。また、通常、ハンマの周面での地盤のばね定数は考慮しなくてもよく、したがって、このときの波動方程式は、式(18)から、

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{1+\Lambda} \{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - (1-\Lambda)u_{i,j-1} + V_0\delta t\} \quad \dots \dots \dots (64)$$

となる。ここで、 $j < 0$ では変位が0であることから、 $j=-1$ での右辺の変位はすべて0である。よって、時刻0での初期値は、

$$u_{i,0} = \frac{1}{1+\Lambda} V_0\delta t \quad \dots \dots \dots (65)$$

となる。式(65)では、 $i=0$ とおいても未定義ポテンシャルとはならず、したがって、ハンマ上端の自由端の初期値も式(65)で与えられる。

一方、ハンマとクッションや杭が衝突する境界面では、同様の考えにより、式(40)における A_c, B_c がそれぞれ、

$$\begin{aligned} A_c &= -(1-\Lambda_\alpha)u_{i,j-1} + V_\alpha\delta t \\ B_c &= -(1-\Lambda_\beta)u_{i,j-1} + V_\beta\delta t \end{aligned}$$

となる。ここで V_α は杭要素 α 、 V_β は杭要素 β の運動速度である。これから、波動方程式の差分化を行い、 A_c, B_c を代入し、さらに $j < 0$ での初期値を代入すると、

$$u_{i,0} = \frac{1}{1+\Lambda_\alpha+\eta(1+\Lambda_\beta)} (V_\alpha + \eta V_\beta)\delta t \quad \dots \dots \dots (66)$$

が得られる。一般的な杭打ちでは、杭要素 α をハンマとみなす、また杭要素 β はクッションや杭であり、時刻 $j \leq 0$ では静止しているから、 $V_\beta=0$ 、よって式(66)は、

$$u_{i,0} = \frac{1}{1+\Lambda_\alpha+\eta(1+\Lambda_\beta)} V_0\delta t \quad \dots \dots \dots (67)$$

となる。また式(66)において、 $V_\alpha=V_\beta=V_0$ 、 $\Lambda_\alpha=\Lambda_\beta=\Lambda$ のとき、式(66)は、式(65)と等しい。すなわち、ハンマの断面積が一定でない場合でも、ハンマ内の各節の初期値は等しいことが示される。

8. 数値計算

(1) 差分間隔

ハンマの上端から杭先端までの杭要素はすべて、差分時間間隔 δt で波動が伝播する距離 $\delta x=c\delta t$ で差分化される。それぞれの杭要素の数値計算上の長さは、この δx の整数倍として取り扱われる。したがって、差分時間が長い場合、杭要素の長さに誤差が生じることがある。

この数値計算法の場合、差分時間間隔に制限はない。しかし、杭要素中の応力を求めようとする場合、式(5)に示すように、差分間隔 δx での2倍の距離での変位ポテンシャルを参照することから、その杭要素の分割数は2以上でなければならない。ただし、変位ポテンシャルのみを求める場合、その杭要素を分割する必要はない。

差分は、連続関数を離散化して処理することであるから、離散化に伴う制限を受ける。この制限の1つは、数値計算の対象となる周波数範囲である。本論文のように両側差分を用いる場合、最大周波数 f は、サンプリング定理¹⁵⁾から、 $f=1/4\delta t$ として求められる。差分間隔を小さくとることによって、数値計算による解は理論解に近づくが、使用する計算機の容量の制限を受ける。

図-4, 5に示す計算例では、差分時間間隔を0.039 msおよび0.0097 msとしている。

(2) 計算の手順

波動方程式の数値計算では、変化させるべき媒介変数が時間と距離の2つである。繰返し計算のループでは、時間ループを外側に、距離ループを内側とする。計算は、時刻 $j=0$ から始めるが（したがって最初のループでは時間 $j=1$ の変位ポテンシャルが計算される）、計算前に、時刻 $j=-1, 0$ における初期値を代入する。なお、 $j=-1$ におけるすべての変位は0、 $j=0$ では、式(65)および式(67)による初期値を代入する。

(3) 計算結果

表-1に数値計算に用いた杭、クッション、およびハ

Table 1 Specification of pile elements for the simulation.

Item	Hammer	Cushion	Pile
density (kg/m ³)	7,800	7,800	7,800
length (m)	1.0	0.2	10.0
sectional area (m ²)	1400	20	140
Young's modulus (N/m ²)	2.14×10^9	2.14×10^9	2.14×10^9

Difference time; 0.039ms and 0.0097ms

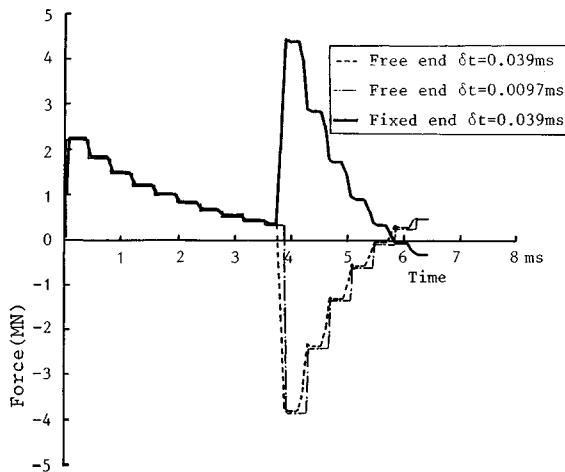


Fig. 4 Results of simulation; Force at pile head.

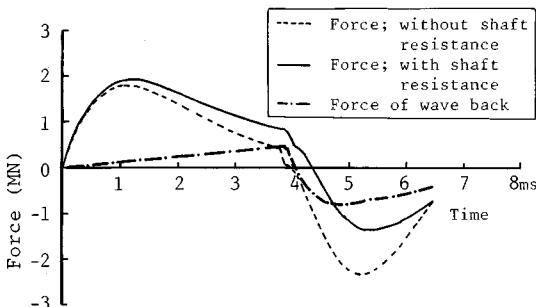


Fig. 5 Results of simulation for an elastic hammer with thin cushion; Conditions for a hammer and a pile are same to Fig. 4 as shown in Table 1.

ンマの条件を示す。また、数値計算の結果を図-4, 5に示す。いずれもハンマの落下高さは1mで、自由落下としている。図-4は、クッションがない場合の数値計算結果で、杭の周面に抵抗が作用せず、また杭先端が自由端と固定端の場合について示している。さらに、杭先端が自由端の場合については、差分時間間隔が0.039 msと0.0097 msの計算例を示している。特性曲線法^{2),3)}による解析解は、図-4中、一点鎖線で示す差分時間間隔0.0097 msの場合とほとんど同じであり、図中の区別はできない。なお、数値計算では、ハンマとクッションおよび杭は結合されたものと仮定しており、杭頭は自由端ではない。このため、杭頭では、杭先端からの反射波に起因する力が計算されている。

図-5は、図-4と同じ杭およびハンマであるが、ハンマと杭の間にクッションが挟まれている場合の打撃力の波形を示す。クッションがある場合については解析解が得られていないので比較はできないが、図-5に示す波形は実際の杭打ちで観測される打撃力の波形に類似する。図には、杭周面に抵抗が作用しない場合と、剛塑性

でモデル化される抵抗(1 MN)が作用する場合の計算結果について示している。また、杭周面抵抗が作用する場合については、後退波の力についても示している。なお、いずれの場合も杭先端は自由端であり、ハンマ、クッションおよび杭は結合されたものとして計算している。また、本解析方法では、杭要素は相互に結合されたものとして取り扱っている。

9. 結 論

本論文では、打撃時の杭の挙動を示す波動方程式を有限差分法によって数値的に解く方法を示した。また、差分法によって波動方程式を解く場合、差分時間間隔と差分距離の間には、 $\delta x = c \delta t$ の関係が成立しなければならないことを理論的に検証した。本論文では、境界で成立する波動方程式を求める方法として、波動方程式と境界条件の差分式を連立させ、両側差分に伴って発生する未定義ポテンシャルを消去するという方法を用いた。この方法によって、数値解の結果が安定し、また解析解と同等の計算結果が得られることを示した。

参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S. et al. : Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company Inc., 2nd Edit., 1951.
- 2) Nishida et al. : Stress wave monitoring for a friction pile during driving, A new analysis procedure, Soils and Foundations, JSSMFE, Vol. 26, No. 4, pp. 111~126, 1986.
- 3) 宇都一馬ほか：縦衝撃におけるスミスの解の問題点（その2），第13回土質工学研究会，pp. 1449~1452, 1978.
- 4) Levacher, D. R. et al. : A finite difference method applied to the behaviour of frictional driven piles, 2nd Intl. Conference on the stress-wave theory on piles, Proc., pp. 334~341, 1984.
- 5) Van Weele, A. F. et al. : Analytical results with numerical programs, 2nd Intl. Conference on the stress-wave theory on piles, Proc., pp. 377 ~ 384, 1984.
- 6) 境友昭：波動方程式による打撃式杭打機構の解析，第20回土質工学研究会，pp. 1139~1142, 1985.
- 7) Lee, S. L. et al. : Rational wave equation model for pile-driving analysis, J. of Geotech. Eng., ASCE Proc., Vol. 114, No. 3, pp. 306~325, 1988.
- 8) Smith, E. A. L. : Pile driving analysis by the wave equation, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol. 86, No. SM4, pp. 35~61, 1960.
- 9) ASCE report : Pile driving formulas, Progress report of the committee on the bearing value of pile foundations, ASCE, Proc., pp. 853~864, 1941.
- 10) Soderberg, L. O. et al. : Pile driving analysis by the wave equation (Discussion), ASCE, Transactions, Vol. 127, No. 3306, pp. 1171~1193, 1962, ほか。
- 11) Goble, G. G. et al. : Wave equation analysis of the pile

- driving—WEAP Program, Case Western Univ., 1976.
- 12) Goble, G. G. *et al.* : The analysis of pile driving—A state-of-art, Intl. Seminar on the application of stress-wave theory on piles, Proc., pp. 131~162, 1980.
- 13) 宇都一馬ほか：縦衝撃におけるスミスの解の問題点, 第5回土木学会関東支部研究会, pp. 111~114, 1978.
- 14) Pelleau, R. : Instrumentation of offshore piles during driving, Intl. Seminar on the application of stress-wave theory on piles, Proc., pp. 323~328, 1980.
- 15) たとえば, 城戸健一: ディジタル信号処理入門, 丸善, pp. 30~35, 1985.

(1989.8.9・受付)