

表面乾燥過程における飽和-不飽和多孔媒体中の 熱・水分完全連成移行解析へのアプローチ

AN APPROACH TO FULLY COUPLED HEAT AND MOISTURE TRANSFER ANALYSIS IN SATURATED-UNSATURATED POROUS MEDIA DURING SURFACE EVAPORATION

福原輝幸*・ジョージ・F・ピンダー**・佐藤邦明***

By Teruyuki FUKUHARA*, George F. PINDER**, Kuniaki SATO

This paper applies the upstream weighting finite element technique, developed by P. S. Huyakorn and G. F. Pinder, to a set of newly modified governing equations of fully coupled heat and moisture transfer in porous media. The numerical solutions obtained are compared with some experimental results of the temperature, moisture content distributions and cumulative evaporation curve, which are taken for a size of $0.1 \times 0.1 \times 0.6$ m soil test column under the soil water evaporation induced by the radiation. The basic theory by J. R. Philip and De Vries is able to lead a reproduction of these experimental results by the choice of a proper value of the upstream parameter, α . For $\alpha = 0$ (Galerkin finite element technique) the temperature and cumulative evaporation values are larger than the experimental ones. Results indicate that this technique is superior to the Galerkin method in dealing with the problems of heat and moisture transfer through porous media during the soil surface evaporation.

Keywords: heat and mass transfer, evaporation, saturate-unsaturated flow, underground water

1. 緒 論

多孔媒体中における多相系の流れと熱・溶質などの輸送機構の解明は純粋科学のみならず工学的にも重要でかつ現実に応用範囲の広い興味深い問題である。工学的視点に立って多孔媒体中の温度、水分分布を予測するためには、ミクロ的に複雑な各相の運動や相互作用を平均化してマクロ的な形で定式化することが不可欠である。一般に乾燥を伴う輸送現象を複雑にさせる主な原因は2つ挙げられる。1つは乾燥過程で多孔媒体中の浸透流の相構造が変化することである。つまり水分量の減少に伴って液状水の連続性が崩れることに加えて蒸発、凝縮による相変化も起こる。もう1つは温度変化により粘性、表面張力などの水の物性値が変わることである。従って乾燥過程の熱と水分移動に関する支配方程式は極めて非線形性の強いものとなる。この種の問題は水文学、土質、地質学においてのみならず、紙、繊維の乾燥、農畜産業、食品加工、コンクリート材料、生物・植物学、窯業、エ

ネルギー工学などの広範囲な分野にまたがる。特に、地下水環境の面から見るなら半乾燥地域の塩害、核廃棄物の地層処分に係わる温度勾配下の地下水の動態予測、砂漠の緑地化など様々な問題に関連する。乾燥問題の研究の歴史は比較的浅く、Lewis (1921)¹⁾ によって最初に乾燥問題の研究がなされ、Sherwood (1929)^{2),3)} により拡散方程式の形で水分移動の定式化がなされた。一方で Gardner と Widtsoe (1920)⁴⁾ および Richards (1931)⁵⁾ らは不飽和多孔媒体中では水分移動に表面張力の影響が無視できないことを明らかにした。また、Comings と Scherwood (1934)⁶⁾ は乾燥過程の水分移動は毛管運動と水蒸気移動からなることを指摘した。Hougen ら (1940)⁷⁾ は水分拡散係数を一定とした計算によると水分分布が実験値と一致しないことを明らかにした。Van Arsdell (1947)⁸⁾ は実験結果と理論の矛盾を考慮して、拡散方程式に含まれる係数を水分量の関数として水分移動方程式を書き改めた。Philip と De Vries (1957)⁹⁾ および De Vries (1958)¹⁰⁾ は、熱エネルギー方程式を組み込んで、水分移動量を水分勾配と温度勾配の形でうまく基礎式を導いた。昨今では、Nasrallah と Perre (1988)¹¹⁾ や Borjes (1988)¹²⁾ により大きな温度勾配の際に生じる全圧力勾配の影響が議論されている。しかしながら実験結果と理論との比較研究は以外に少なく、土壌の乾燥過

* 正会員 工博 福井大学助教授 工学部環境設計工学科 (〒910 福井市文京 3-9-1)

** Ph. D. Princeton University, Professor, Dept. of Civil Engineering (Princeton, N. J., 08540 U. S. A.)

*** 正会員 工博 埼玉大学助教授 工学部地盤水理実験施設 (〒338 浦和市下大久保 255)

程の温度と水分分布の比較については Fritton ら (1970)¹³⁾, Sophocleous (1979)¹⁴⁾, Baradi ら (1980)¹⁵⁾, Abdel-Hadi と Mitchell (1981)¹⁶⁾, 峯田ら¹⁷⁾, 佐藤ら (1988)¹⁸⁾ の研究がある。Fritton¹³⁾ と 峯田ら¹⁷⁾ は定常蒸発過程においても水分移動に及ぼす温度勾配の影響は無視できないことを示した。また、福原・佐藤 (1989)¹⁹⁾ は定常乾燥状態において De Vries¹⁰⁾ のモデルを温度分布に適用すれば、潜熱項の過小評価により計算値が実験値よりも大きくなることを指摘した。一方、鈴木 (1962)²⁰⁾ および宮崎 (1976)²¹⁾ は温度勾配下の水蒸気移動量を実験的に調べ、Stefan の一方拡散理論や液島理論との比較を行い、理論値の精度が含水比によって異なることを明らかにしている。

この様に現時点では、定式化と適用性に問題があるのか、あるいは計算値と実験値の違いが式の中に含まれる係数によるものか、数値解法そのものによるものかはっきりしない。加えてモデルの適用性の検討も中途の段階にあり不明瞭な点が多い。

そこで今回、De Vries¹⁰⁾ の理論に Sophocleous¹⁴⁾ の研究結果を組み入れて定式化し直し、Huyakorn と Pinder (1978)²²⁾ により提案された風上重み付残差法による有限要素法を使って解析を行い、非定常項や温度勾配の影響について検討を行った。その結果、蒸発過程の熱、水分の同時移動に関する種々の新しい知見を得たと同時に、現象解明に新たな方向を見出したので報告する。

2. 実験装置と実験方法

地表からの蒸発に伴う温度および水分量の鉛直方向分布の経時変化を明らかにするために、図-1 に示すような実験装置を使用した。

地表の乾燥条件を一定にするために (0.9×0.9×1.8 m) の恒温室の中に (0.1×0.1×0.6 m) のアクリル樹脂製砂層カラムを設置する。カラムの周囲には厚さ 1.5 cm の発砲スチロールを巻き付け断熱に努めた。カラム表面からの蒸発量を測定するために、カラムは水平にセットされた重量計 (精度 0.1 g) の上に載せられた。試料としては豊浦標準砂 (平均粒径 0.2 mm) を使用し、実験には蒸留水を使用した。

カラム内の温度は熱電対 (精度 0.1°C) により測定され、カラム頂部から 0.03, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.56 m の位置に埋め込まれた。熱電対は図-2 に示すように温度記録装置に接続され、温度は 1 時間ごとに自動的に記録された。地表付近の温度は棒温度計で測定された。

砂層内の水分分布は誘電式水分計とサンプリング方式により測定された。誘電式水分計は 2 枚のアルミ板 (0.03×0.1×0.002 m) と水分計本体から成り、カラム頂部から下方 0.03, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 および 0.5 m の位置に図-3 のように取り付けられた。アルミ板の間隔は予備実験から 0.02 m に決定された。水分計の回路は図-

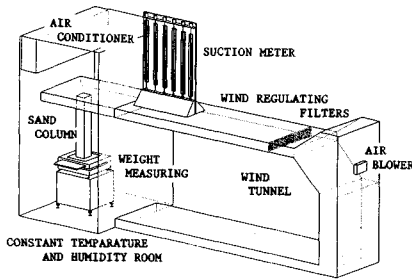


図-1 実験装置の概要

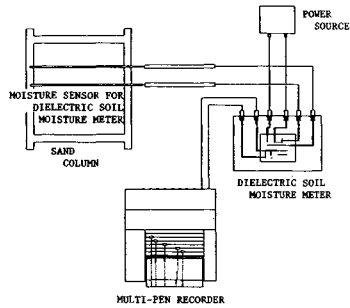
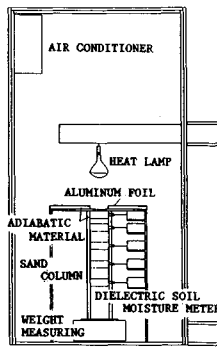


図-3 水分測定

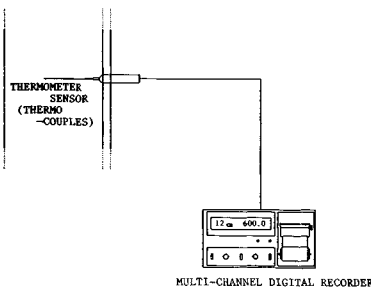


図-2 温度計測

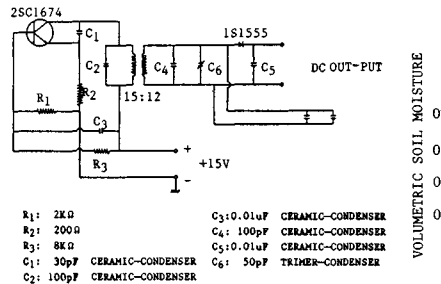


図-4 水分計の回路

4に示す通りで、安定した出力を得るためにシールド線によりアルミ板と接続し、出力はペンレコーダでアナログ的に記録された。較正曲線の一例を図-5に示す。また、各水分計の中間位置には直径8mmのサンプリング孔があり、同深度の3個の穴から数gの試料を採取し、炉乾燥法で水分量を測定した。採取した孔には別の湿潤砂を同量埋め戻し、同じ孔からは実験終了まで再び試料採取はしないようにした。水分分布の信頼性は蒸発量との比較で容易に確かめられる。

圧力測定には針型テンシオメータ（直径0.005、長さ0.1m）を使用し、誘電式水分計と同じ高さに埋め込み、サクシオンメータで値を読み取った。

放熱乾燥の実験を行うためにカラムの表面から0.27m上方の位置に赤外線ランプ（350W）を取り付けた。

実験手順は次の通りである。カラムの底から熱電対、水分計の位置まで砂を入れ、カラムの底にある給水孔から蒸留水を入れ、棒で砂を突いてエントラップされた空気を放出させる。この作業を次の熱電対、水分計の位置まで行って、段階的（約10cm毎）にカラム全体を飽和状態を保つ。最後にテンシオメータをすばやく取りつけると共に、カラム頂部にカバーを施して水分の蒸発を防ぐ。この後恒温室にカラムを入れ、1~2日間カラムを放置して温度分布の一様性と膨潤の影響のないことを確認して、重量計の上に載せて実験を開始した。実験開始直後はすべての物理量の変化が大きいため、自動記録できない蒸発量や吸引圧の値は1時間毎に測定し、その後は時間の経過とともに測定時間を変え、実験は蒸発量の変化が緩慢となる時点まで継続して行われた。

3. 理論的考察

次に述べる理論は基本的には Philip と De Vries⁹⁾ と De Vries¹⁰⁾ のモデルに従う。式中に現れる物理量の大部分は温度と水分量の関数であり、これらの値の詳細は参考文献(23)を参照されたい。

(1) 水分移動に関する理論

a) 水蒸気輸送

多孔媒体中の水蒸気拡散方程式は以下のように表現される。

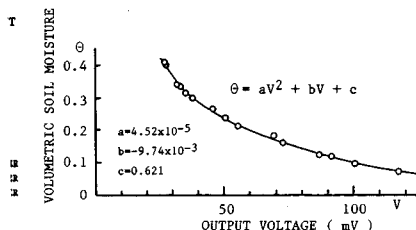


図-5 較正曲線

$$q_v/\rho_t = -D_{atm}\nu_m\alpha_m a \nabla \rho_v \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

q_v : 水蒸気フラックス密度 (kg/hrm²)

ρ_t : 液状水密度 (kg/m³)

D_{atm} : 空気中の水蒸気の分子拡散係数 (m²/hrK)

ν_m : 屈曲度 (=0.67)

α_m : マスフローファクター (=1.02)

a : 含空率 (m³/m³)

ρ_v : 水蒸気密度 (kg/m³)

熱力学の関係より水蒸気密度は次式で与えられる。

$$\rho_v = \rho_0 h \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 ρ_0 は飽和水蒸気密度 (kg/m³)、 h は相対湿度を表し、次式となる。

$$h = \exp(\psi g / R_g T) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

ψ : 吸引圧 (m)

g : 重力加速度 (m/hr²)

R_g : 気体定数 (=461.37 (J/kgK))

T : 温度 (K)

ρ_0 の微分 $\nabla \rho_0$ は、

$$\nabla \rho_0 = h \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla h \dots\dots\dots (4)$$

となる。Philip と De Vries⁹⁾ に従い、 h の湿度変化率 $\partial h / \partial T$ は無視できる程度に十分小さいので、 $\partial h / \partial T = 0$ とみなす。これより、式(3)から次の関係を得る。

$$d\psi/dT|_0 = \psi/T \dots\dots\dots (5)$$

この表現は Sophocleous¹⁴⁾ に従う。

上述の仮定および ρ_0 は T の関数より、式(4)中の微分はそれぞれ

$$\nabla \rho_0 = d\rho_0/dT \nabla T \dots\dots\dots (6)$$

$$\nabla h = dh/d\theta \nabla \theta = (gh/R_g T) d\psi/d\theta \nabla \theta \dots\dots\dots (7)$$

式(6)と式(7)を式(4)に代入し、整理すると、式(1)は

$$q_v/\rho_t = -D_{rv} \nabla T - D_{\theta v} \nabla \theta \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 D_{rv} は熱水蒸気拡散係数、 $D_{\theta v}$ は等温水蒸気拡散係数であり、それぞれ次のようになる。

$$D_{rv} = D_{atm} \nu_m \alpha_m a h \beta / \rho_t \dots\dots\dots (9)$$

$$D_{\theta v} = D_{atm} \nu_m \alpha_m a \rho_t (gh/R_g T) d\psi/d\theta / \rho_t \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\beta = d\rho_0/dT_0$ 。

b) 液状水輸送

不飽和多孔媒体中の液状水フラックス密度 q_l にダルシー則を適用すると

$$q_l/\rho_t = -\bar{K} \nabla (\psi + z) \dots\dots\dots (11)$$

となる。ここに、 \bar{K} は不飽和透水係数、 z は高さを表す。 ψ は T と θ の関数であるから、式(5)を用いて、 q_l は温度勾配と水分量勾配により表される。

$$q_l/\rho_t = -D_{\pi} \nabla T - D_{\theta l} \nabla \theta - K i \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 i は z 方向単位ベクトルであり、 D_{π} は熱液状

水拡散係数, D_{oi} は等温度液状水拡散係数と呼ばれ, それぞれ次のように与えられる.

$$D_{ni} = \bar{K} |\phi| / T \dots\dots\dots (13)$$

$$D_{oi} = \bar{K} (d\phi/d\theta)_T \dots\dots\dots (14)$$

式 (13) の値は Philip と De Vries⁹⁾ が表現した D_{ni} に比べて 30~50% 大きく, この割合は液島理論で導入されたパラメーター ξ_r ($=\Delta T_{air}/\Delta T$, ΔT_{air} : 多孔媒体中の空気の温度勾配) にほぼ等しい.

さらに本論文では \bar{K} が粘性係数 μ と ρ_l に依存して T の関数でもあることから, 任意の温度に対する不飽和透水係数 \bar{K}_T を次式で表現する.

$$\bar{K}_T = \bar{K}_0 (\mu/\rho_l)_0 / (\mu/\rho_l)_T \dots\dots\dots (15)$$

ここに, 添字 0 は測定時の基準温度を表す. なお, この性質は西林ら²⁴⁾ の実験結果から支持される.

c) 水分輸送

乾燥蒸発過程における質量保存則は相変化を考慮して, 液状水と水蒸気に対しそれぞれ次式のように表される.

$$\partial\theta_l/\partial t = -\nabla(q_l/\rho_l) - E \dots\dots\dots (16)$$

$$\partial\theta_v/\partial t = -\nabla(q_v/\rho_v) + E \dots\dots\dots (17)$$

ここに,

θ_l : 液状水の体積含水率 (m^3/m^3)

θ_v : 水蒸気体積含水率 (m^3/m^3)

E : 蒸発率 (1/hr)

式 (8) と (12) を式 (16) と (17) に代入し, 加えることで水分移動に関する基礎方程式を得る.

$$\partial\theta/\partial t = \nabla(D_T \nabla T) + \nabla(D_\theta \nabla \theta) + \partial\bar{K}/\partial z \dots\dots\dots (18)$$

ここに,

$$D_T = D_{Tl} + D_{Tv} \dots\dots\dots (19)$$

$$D_\theta = D_{\theta v} + D_{\theta l} \dots\dots\dots (20)$$

$$\theta = \theta_v + \theta_l \dots\dots\dots (21)$$

であり, D_T を熱水分拡散係数, D_θ を等温水分拡散係数, θ を体積含水率と呼ぶ.

θ は ϕ のみならず T の関数でもあるから, 式 (18) の左辺は次のように変形される.

$$\partial\theta/\partial t = F \partial\phi/\partial t + G \partial T/\partial t \dots\dots\dots (22)$$

ここに,

$$F = \partial\theta/\partial\phi|_T \dots\dots\dots (23)$$

$$G = \partial\theta/\partial T|_\phi \dots\dots\dots (24)$$

液状水と水蒸気が局所的に熱力学的に平衡であるとすれば, θ_v と θ_l は次の関係を満たす.

$$\theta_v = (n - \theta_l) \rho_0 h / \rho_l \dots\dots\dots (25)$$

ここに, n は空隙率を示す. 温度の違いによる液状水の体積変化を無視すれば, 式 (24) の G は

$$G = \partial\theta_v/\partial T = (\partial\theta_v/\partial\rho_0) d\rho_0/dT + (\partial\theta_v/\partial\rho_l) d\rho_l/dT \dots\dots\dots (26)$$

となる. 式 (25) を式 (26) に代入し, オーダー比較の

後整理すると,

$$G = ah/\rho_l [\beta + (\rho_v/\rho_l)(d\rho_l/dT)] = ah\beta/\rho_l \dots\dots\dots (27)$$

を得る. さらに, 飽和・不飽和領域を同時に解くために, 式 (22), (23), (24), (27) を式 (18) に代入し, T と ϕ について表現し直す. その結果, 最終的に水分輸送に関する支配方程式として, 次式を得る.

$$F \partial\phi/\partial t + G \partial T/\partial t = \nabla(D_T \nabla T) + \nabla(D_\theta \nabla \phi) + \partial\bar{K}/\partial z \dots\dots\dots (28)$$

ここに,

$$D_\phi = D_{\phi l} + D_{\phi v} = F(D_{oi} + D_{ov}) \dots\dots\dots (29)$$

$$D_{\phi l} = \bar{K} \dots\dots\dots (30)$$

$$D_{\phi v} = D_{atm} \nu_m \alpha_m a \rho_0 (gh/R_g T) / \rho_l \dots\dots\dots (31)$$

ただし, 実際には式 (28) 中の $G=0$ とした式や式 (18) がよく使用され, De Vries 自身も乾燥が進んだ段階, すなわち pendular stage での式 (28) 左辺第 2 項に関する検討は行っていない.

(2) 熱輸送に関する理論

熱伝導, 潜熱, 顕熱を考慮した多孔媒体中の熱フラックス密度は次のようになる.

$$q_h = -\lambda \nabla T + L_0 q_v + c_v (T - T_0) q_v + c_l (T - T_0) \rho_l \dots\dots\dots (32)$$

ここに,

q_h : 熱フラックス密度 (KJ/m^2hr)

λ : 熱伝導率 ($KJ/mhrK$)

L_0 : 基準温度 T_0 における蒸発熱 (KJ/kg)

c_v : 水蒸気の比熱 ($=2.02$ (KJ/kgK))

c_l : 水の比熱 ($=4.187$ (KJ/kgK))

一方, 単位体積当りの総熱量変化は次式で与えられる.

$$Q_s = \rho_s c_s (1 - n) (T - T_0) + L_0 \rho_l \theta_v + c_v \rho_l \theta_v (T - T_0) + c_l \rho_l \theta_l (T - T_0) \dots\dots\dots (33)$$

ここに, c_s は乾燥した土の比熱を表す. 熱エネルギー保存則は以下のように

$$\partial Q_s/\partial t = -\nabla q_h \dots\dots\dots (34)$$

と書けるから, 式 (16), (32) と (33) を式 (34) に代入し整理すると

$$C_a^* \partial T/\partial t = \nabla(\lambda \nabla T) - L \rho_l E - (c_v q_v + c_l q_l) \nabla T \dots\dots\dots (35)$$

となる. ここに, C_a^* : 体積熱容量, L : 蒸発の潜熱であり, 次式で与えられる.

$$C_a^* = \rho_s c_s (1 - n) + \rho_l c_v \theta_v + \rho_l c_l \theta_l \dots\dots\dots (36)$$

$$L = L_0 - (c_l - c_v) (T - T_0) \dots\dots\dots (37)$$

式 (35) 中の蒸発率 E は式 (16) と (17) から求められるが, 最終的に得られる式の複雑さと各項の物理的意味の理解のし易さから式 (17) を使用する. 式 (17) を式 (35) に代入し, 式 (27) を用いると, 最終的に次式を得る.

$$J_\phi \partial\phi/\partial t + C_a \partial T/\partial t = \nabla(\lambda \nabla T) + \nabla(D_{\phi v} \nabla \phi)$$

$$-(c_v q_v + c_l q_l) \nabla T \dots\dots (38)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda' + L \rho_l D_{rv} \\ D_{\psi v} &= L \rho_l D \psi v \\ C_a &= C'_a + L a \beta h \\ J_\psi &= L \rho_l [a \rho_0 g h / \rho_l R T - \rho_0 / \rho_l (\partial \theta_l / \partial \psi)] \end{aligned} \right\} \dots\dots (39)$$

ただし、熱輸送に関しては $J_\psi = 0$ として計算される場合が多いが、水蒸気移動が卓越しかつ温度勾配の大きな状態での J_ψ の効果を知ることは重要である。

4. 風上重み付き残差法による有限要素法解析

質量保存則、式 (28) と熱エネルギー保存則、式 (38) を鉛直一次元方程式に書き直せば、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F \partial \psi / \partial t + G \partial T / \partial t &= \partial [D_r (\partial T / \partial z)] / \partial z \\ &+ \partial [D_\psi (\partial \psi / \partial z)] / \partial z + \partial \bar{K} / \partial z \dots\dots (40) \\ J_\psi \partial \psi / \partial t + C_a \partial T / \partial t &= \partial [\lambda (\partial T / \partial z)] / \partial z \\ &+ \partial [D_{\psi v} (\partial \psi / \partial z)] / \partial z - (c_l q_l + c_v q_v) \partial T / \partial z \\ &\dots\dots (41) \end{aligned} \right\}$$

この方法では時間微分項には通常の線形基底関数 N_i を、空間微分項には図-6 に示すような非対称な重み関数 W_i を使用する。

$$\left. \begin{aligned} W_1(\xi) &= N_1(\xi) + 3\alpha(\xi^2 - \xi), \quad N_1(\xi) = 1 - \xi \dots\dots (42) \\ W_2(\xi) &= N_2(\xi) - 3\alpha(\xi^2 - \xi), \quad N_2(\xi) = \xi \dots\dots (43) \\ \xi &= z / \Delta z, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \dots\dots (44) \end{aligned} \right\}$$

ここに、 α を風上パラメーターと呼び、 $\alpha = 0$ とした場合がガラーキン法に対応する。 Δz は要素長さを表す。また添字 1 と 2 は次式の添字 J と対応し、要素の両節点を表す。

T, ψ, D_r 等は試験関数、 N_j を用いて以下のように表される。

$$\left. \begin{aligned} T_j(\xi, t) &= N_j(\xi) T_j(t) \\ \psi_j(\xi, t) &= N_j(\xi) \psi_j(t) \quad (J=1, 2) \\ D_{rj}(\xi, t) &= N_j(\xi) D_{rj}(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots (45)$$

式 (42)~(45) を式 (40) と (41) に代入し、グリーン の定理を適用すれば各要素毎に以下の重み付き残差方程式を得る。

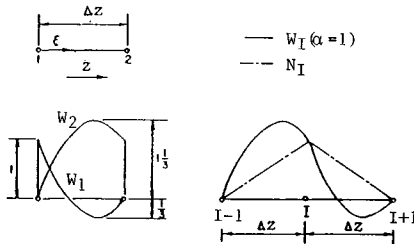


図-6 非対称な重み関数

$$\left. \begin{aligned} (F \partial \psi / \partial t)_J \int_{R_e} N_i N_j d\xi &+ (G \partial T / \partial t)_J \int_{R_e} N_i N_j d\xi \\ &+ \psi_J \sum_{k=1}^2 D_{\psi k} \int_{R_e} N_k (\partial W_i / \partial \xi) (\partial N_j / \partial \xi) d\xi / (\Delta z)^2 \\ &+ T_J \sum_{k=1}^2 D_{TK} \int_{R_e} N_k (\partial W_i / \partial \xi) (\partial N_j / \partial \xi) d\xi / (\Delta z)^2 \\ &+ \sum_{k=1}^2 \bar{K}_k \int_{R_e} N_k (\partial W_i / \partial \xi) d\xi / (\Delta z) \\ &+ [W_i q_m]_{R_e} / (\Delta z) = 0 \dots\dots (46) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (J_\psi \partial \psi / \partial t)_J \int_{R_e} N_i N_j d\xi &+ (C_a \partial T / \partial t)_J \int_{R_e} N_i N_j d\xi \\ &+ \psi_J \sum_{k=1}^2 D_{\psi k} \int_{R_e} N_k (\partial W_i / \partial \xi) (\partial N_j / \partial \xi) d\xi / (\Delta z)^2 \\ &+ T_J \sum_{k=1}^2 \lambda_k \int_{R_e} N_k (\partial W_i / \partial \xi) (\partial N_j / \partial \xi) d\xi / (\Delta z)^2 \\ &+ T_J \sum_{k=1}^2 (c_l q_l + c_v q_v)_k \int_{R_e} N_k W_i (\partial N_j / \partial \xi) d\xi / (\Delta z) \\ &+ [W_i q_r]_{R_e} / (\Delta z) = 0 \quad (I=1, 2, J=1, 2, K=1, 2) \\ &\dots\dots (47) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} q_m &= -D_r \partial T / \partial \xi - D_\psi \partial \psi / \partial \xi - \bar{K} \\ q_r &= -\lambda' \partial T / \partial \xi - \rho_l L q_v \end{aligned} \right\} \dots\dots (48)$$

ここに、 R_e は要素小領域、 $\sum_{k=1}^2$ は要素の節点にわたる合計を表す。

次に、時間項の近似法について説明する。任意の時間ステップ ($d + \epsilon$) における各物理量、例えば ψ は、

$$\psi^{d+\epsilon} = (1 - \epsilon) \psi^d + \epsilon \psi^{d+1} \dots\dots (49)$$

$$(\partial \psi / \partial t)^{d+\epsilon} = (\psi^{d+1} - \psi^d) / \Delta t \dots\dots (50)$$

となる。ここで、 Δt は時間間隔、 ϵ は時間重み係数、 $d+1$ と d は現在の時間ステップおよび1つ前の時間ステップをそれぞれ示す。

式 (49) と (50) を式 (46) に代入し積分を実行すると、次のようなマトリックスを得る。

$$\left. \begin{aligned} [A]^{d+\epsilon} (\psi^{d+1} - \psi^d) &+ [B]^{d+\epsilon} (T^{d+1} - T^d) \\ &+ [C]^{d+\epsilon} [\epsilon \psi^{d+1} + (1 - \epsilon) \psi^d] \\ &+ [D]^{d+\epsilon} [\epsilon T^{d+1} + (1 - \epsilon) T^d] \\ &+ [E]^{d+\epsilon} = -[f]^{d+\epsilon} \dots\dots (51) \end{aligned} \right\}$$

ここに、

$$[A]^{d+\epsilon} = F_J \int_{R_e} N_i N_j d\xi = \begin{bmatrix} 2 F_1 & F_2 \\ F_1 & 2 F_2 \end{bmatrix} / 6 \dots\dots (52)$$

$$[B]^{d+\epsilon} = G_J \int_{R_e} N_i N_j d\xi = \begin{bmatrix} 2 G_1 & G_2 \\ G_1 & 2 G_2 \end{bmatrix} / 6 \dots\dots (53)$$

$$\left. \begin{aligned} [C]^{d+\epsilon} &= \Delta t \sum_{k=1}^2 D_{\psi k} \int_{R_e} N_k (\partial w_i / \partial \xi) (\partial N_j / \partial \xi) d\xi / (\Delta z)^2 \\ &= \Delta t \begin{bmatrix} \eta_1 D_{\psi 1} + \eta_2 D_{\psi 2} & -(\eta_1 D_{\psi 1} + \eta_2 D_{\psi 2}) \\ -(\eta_1 D_{\psi 1} + \eta_2 D_{\psi 2}) & \eta_1 D_{\psi 1} + \eta_2 D_{\psi 2} \end{bmatrix} \\ &/ (\Delta z)^2 \dots\dots (54) \end{aligned} \right\}$$

$$[D]^{d+\epsilon} = \Delta t \sum_{k=1}^2 D_{TK} \int_{R_e} N_k (\partial W_i / \partial \xi) (\partial N_j / \partial \xi) d\xi / (\Delta z)^2$$

$$= \Delta t \begin{bmatrix} \eta_1 D_{r1} + \eta_2 D_{r2} & -(\eta_1 D_{r1} + \eta_2 D_{r2}) \\ -(\eta_1 D_{r1} + \eta_2 D_{r2}) & \eta_1 D_{r1} + \eta_2 D_{r2} \end{bmatrix} / (\Delta z)^2 \dots\dots\dots (55)$$

$$\{E\}_j^{q+\epsilon} = \Delta t \sum_{k=1}^2 K_k \int_{R_e} N_k (\partial W_l / \partial \xi) d\xi / (\Delta z) - (\eta_1 \bar{K}_1 + \eta_2 \bar{K}_2) = \Delta t \begin{bmatrix} -(\eta_1 \bar{K}_1 + \eta_2 \bar{K}_2) \\ \eta_1 \bar{K}_1 + \eta_2 \bar{K}_2 \end{bmatrix} / (\Delta z) \dots\dots\dots (56)$$

$$\{f\}_j^{q+\epsilon} = \Delta t [W_l q_m]_{R_e} / (\Delta z) = \Delta t \begin{bmatrix} -q_{m1} \\ q_{m2} \end{bmatrix} / (\Delta z) \dots\dots\dots (57)$$

ここに、
 $\eta_1 = (\alpha + 1) / 2$ }
 $\eta_2 = (1 - \alpha) / 2$ } \dots\dots\dots (58)

式 (40) に関して行った展開を式 (47) に適用すると次のようになる。

$$\{O\}_j^{q+\epsilon} (\phi_j^{q+1} - \phi_j^q) + [P]_j^{q+\epsilon} (T_j^{q+1} - T_j^q) + [Q]_j^{q+\epsilon} [\epsilon \phi_j^{q+1} + (1 - \epsilon) \phi_j^q] + [R]_j^{q+\epsilon} [\epsilon T_j^{q+1} + (1 - \epsilon) T_j^q] + [S]_j^{q+\epsilon} [\epsilon T_j^{q+1} + (1 - \epsilon) T_j^q] = -\{U\}_j^{q+\epsilon} \dots\dots\dots (59)$$

ここに、
 $\{O\}_j^{q+\epsilon} = J_{\psi j} \int_{R_e} N_i N_j d\xi = \begin{bmatrix} 2 J_{\psi 1} & J_{\psi 2} \\ J_{\psi 1} & 2 J_{\psi 2} \end{bmatrix} / 6 \dots\dots (60)$

$$\{P\}_j^{q+\epsilon} = C_{\alpha j} \int_{R_e} N_i N_j d\xi = \begin{bmatrix} 2 C_{\alpha 1} & C_{\alpha 2} \\ C_{\alpha 1} & 2 C_{\alpha 2} \end{bmatrix} / 6 \dots\dots (61)$$

$$\{Q\}_j^{q+\epsilon} = \Delta t \sum_{k=1}^2 D_{\psi \nu k} \int_{R_e} N_k (\partial W_l / \partial \xi) (\partial N_j / \partial \xi) d\xi / (\Delta z)^2 = \Delta t \begin{bmatrix} \eta_1 D_{\psi \nu 1} + \eta_2 D_{\psi \nu 2} & -(\eta_1 D_{\psi \nu 1} + \eta_2 D_{\psi \nu 2}) \\ -(\eta_1 D_{\psi \nu 1} + \eta_2 D_{\psi \nu 2}) & \eta_1 D_{\psi \nu 1} + \eta_2 D_{\psi \nu 2} \end{bmatrix} / (\Delta z)^2 \dots\dots\dots (62)$$

$$\{R\}_j^{q+\epsilon} = \Delta t \sum_{k=1}^2 \lambda_k \int_{R_e} N_k (\partial W_l / \partial \xi) (\partial N_j / \partial \xi) d\xi / (\Delta z)^2 = \Delta t \begin{bmatrix} \eta_1 \lambda_1 + \eta_2 \lambda_2 & -(\eta_1 \lambda_1 + \eta_2 \lambda_2) \\ -(\eta_1 \lambda_1 + \eta_2 \lambda_2) & \eta_1 \lambda_1 + \eta_2 \lambda_2 \end{bmatrix} / (\Delta z)^2 \dots\dots\dots (63)$$

$$\{S\}_j^{q+\epsilon} = \Delta t \sum_{k=1}^2 (c_l q_m)_k \int_{R_e} N_k W_l (\partial N_j / \partial \xi) d\xi / (\Delta z) = \Delta t \begin{bmatrix} \eta_3 (c_l q_m)_1 + \eta_4 (c_l q_m)_2 & -(\eta_3 (c_l q_m)_1 + \eta_4 (c_l q_m)_2) \\ -(\eta_3 (c_l q_m)_1 + \eta_4 (c_l q_m)_2) & \eta_3 (c_l q_m)_1 + \eta_4 (c_l q_m)_2 \end{bmatrix} / (\Delta z) \dots\dots\dots (64)$$

$$\{U\}_j^{q+\epsilon} = \Delta t [W_l q_r]_{R_e} / (\Delta z) = \Delta t \begin{bmatrix} -q_{r1} \\ q_{r2} \end{bmatrix} / (\Delta z) \dots\dots\dots (65)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \eta_3 &= (3\alpha - 4) / 12 \\ \eta_4 &= (3\alpha - 2) / 12 \\ \eta_5 &= (3\alpha + 4) / 12 \\ \eta_6 &= (3\alpha + 2) / 12 \\ c_l q_m &= c_l (q_l + c_{lv} / c_l q_v) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (66)$$

式 (51) は最終的に次のようになる。
 $[A]_j^{q+\epsilon} \{\phi\}_j^{q+1} + [B]_j^{q+\epsilon} \{T\}_j^{q+1} = [C]_j^{q+\epsilon} \dots\dots\dots (67)$

ここに、
 $\left. \begin{aligned} [A]_j^{q+\epsilon} &= [A]_j^{q+\epsilon} + \epsilon [C]_j^{q+\epsilon} \\ [B]_j^{q+\epsilon} &= [B]_j^{q+\epsilon} + \epsilon [D]_j^{q+\epsilon} \\ [C]_j^{q+\epsilon} &= [[A]_j^{q+\epsilon} - (1 - \epsilon) [C]_j^{q+\epsilon}] \{\phi\}_j^{q+\epsilon} \\ &\quad + [[B]_j^{q+\epsilon} - (1 - \epsilon) [D]_j^{q+\epsilon}] \{T\}_j^{q+\epsilon} \\ &\quad + [E]_j^{q+\epsilon} - \{f\}_j^{q+\epsilon} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68)$

同様に、式 (59) は次のようになる。
 $[O]_j^{q+\epsilon} \{\phi\}_j^{q+1} + [P]_j^{q+\epsilon} \{T\}_j^{q+1} = [Q]_j^{q+\epsilon} \dots\dots\dots (69)$

ここに、
 $\left. \begin{aligned} [O]_j^{q+\epsilon} &= [O]_j^{q+\epsilon} + \epsilon [Q]_j^{q+\epsilon} \\ [P]_j^{q+\epsilon} &= [P]_j^{q+\epsilon} + ([R]_j^{q+\epsilon} + [R]_j^{q+\epsilon}) \\ [Q]_j^{q+\epsilon} &= ([O]_j^{q+\epsilon} - (1 - \epsilon) [Q]_j^{q+\epsilon}) \{\phi\}_j^{q+\epsilon} \\ &\quad + ([P]_j^{q+\epsilon} - (1 - \epsilon) [R]_j^{q+\epsilon} \\ &\quad + [S]_j^{q+\epsilon}) \{T\}_j^{q+\epsilon} - \{U\}_j^{q+\epsilon} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (70)$

$T(z)$ と $\theta(z)$ は式 (67) と (69) を全要素について重ね合わせた後、以下の初期条件等温かつ静水圧分布と境界条件のもとに同時に計算される。

$$\left. \begin{aligned} T(z, t) &= T(z, 0) = T_0 & 0 \leq z \leq L_z \\ \phi(z, t) &= \phi(z, 0) & 0 \leq z \leq L_z \\ T(L_z, t) &= T_s(t) & t > 0 \\ \phi(L_z, t) &= \phi_s(t) & t > 0 \\ q_m(0, t) &= 0 & t \geq 0 \\ q_r(0, t) &= 0 & t \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (71)$$

ここに、 $z=0$ はカラムの底部に、 $z=L_z$ はカラムの表面に対応する。式 (67) と (69) の非線形性を考慮して Picard の方法により、各時間ステップ毎に全節点における T と ϕ が前もって設定された微小な値以下に収束するまで繰り返し計算される。なお、本論文では、重力項 $\partial \bar{K} / \partial z$ は移流項のような形をとらないことから、通常の基底関数 $N(\xi)$ を使用し、 $\epsilon=0.5$ を採用した。

5. 実験結果と計算との比較

実験で得られた代表的な結果を基に数値解析の適用性現象の特性、およびパラメーターの性質を吟味する。

実験結果は放熱乾燥の場合であり、豊浦標準砂（密度 2.64 t/m³ 間隙率 0.404）を用いて、初期温度 16°C の条件下実験を開始、170 時間放熱を断続的に行なった。

図-7 と 図-8 は水分特性曲線と不飽和透水係数を示しており、図中の曲線は $T(z)$ と $\theta(z)$ の計算に用いた近似曲線を表す。なお不飽和透水係数の実験値は瞬時水分

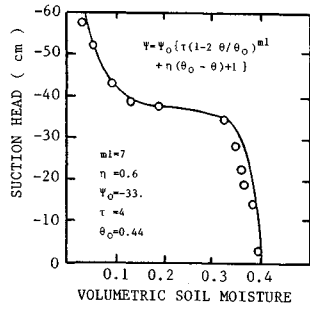


図-7 水分特性曲線

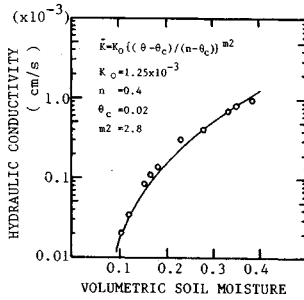


図-8 飽和と透水係数

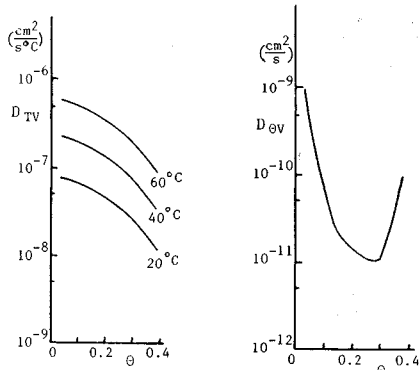
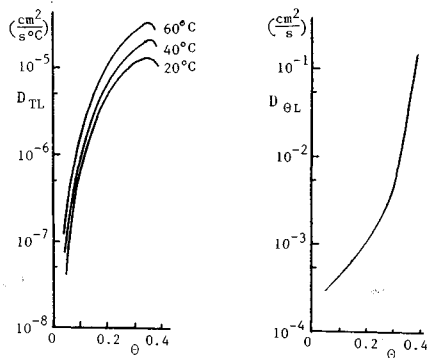
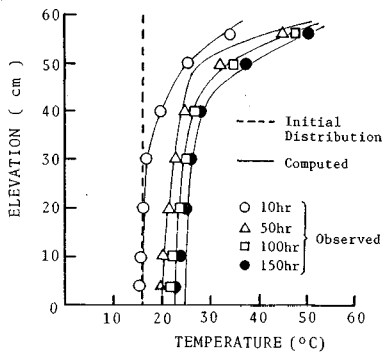
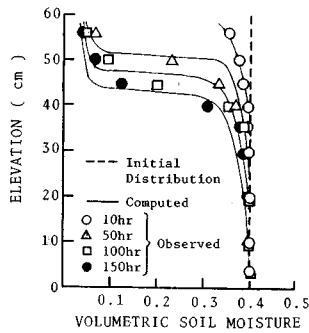


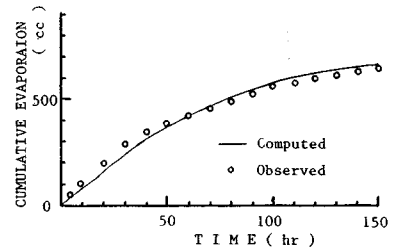
図-9 熱および等温水分拡散係数の性質



(a) 温度分布

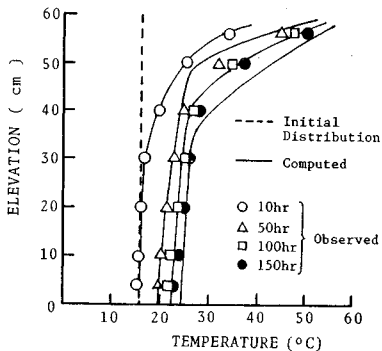


(b) 水分分布

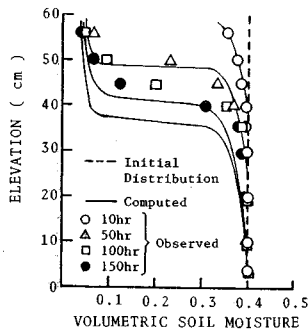


(c) 蒸発量分布

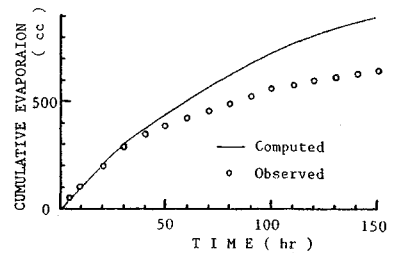
図-10 風上重み付き残差法による計算結果と実験結果の比較 ($\alpha=0.93$)



(a) 温度分布



(b) 水分分布



(c) 蒸発量分布

図-11 温度勾配を無視した場合の結果 ($D_{Tv}=D_{Tn}=0$, $\alpha=0.93$)

計測法²³⁾により計算された。

図-9は支配方程式に含まれる液状水、水蒸気に関する熱および水分拡散係数の一例を示す。これは式(9)、(10)、(13)および(14)に任意の θ 、 ψ 、 T を代入して計算される。いずれの値も体積含水率 θ と温度 T によってオーダが大きく変化する。 D_{T_0} は飽和時のとき、ゼロになる。これより支配方程式は非線形性の強いことがわかる。注目すべきは θ が小さくなると D_{T_0} と D_{T_1} の比較から明らかのように、液状水よりも水蒸気の拡散係数が大きくなることである。

図-10は本モデル($\Delta z=0.01$ m, $\Delta t=60$ sec)で計算された温度分布 $T(z)$ 、水分分布 $\theta(z)$ および積算蒸発量 $Q_e(t)$ と実験結果を比較したものである。なお、 $Q_e(t)$ は $-A \int (\partial\theta/\partial t) dz$ (A : 地表面積)により計算される。蒸発率、 $\partial Q_e/\partial t$ は時間と共に減少することがわかる。 $T(z)$ は一週間経過しても表層近くでなお大きな温度勾配が存在する。 $T(z)$ 、 $\theta(z)$ 、 $Q_e(t)$ とも計算値は実験値を良好に再現している。なお、地表面 T_s は地表面下0.03, 0.1, 0.2 m地点の温度を基に2次のスプライン開数の外挿から決定された。一方、地表面の毛管水頭 ψ_s はそこでの体積含水率 θ_s から、図-7の関係を用

いて決定された。 θ_s は θ 測定時の蒸発速度、 $V_e = - \int_{-L_z}^0 (d\theta/dt) dz$ を満たすようにして求められた。 $\theta(z)$ には蒸発開始後50時間以降、急激な変化の生じる部分(地表からカラムの底の向かって θ が急増する部分)が現れるようになり、この位置は目視で確認される乾燥層前面に対応する。

図-11は温度勾配の影響を無視した場合の計算結果を示す。時間の経過と共に、地表に近い部分で $T(z)$ は計算値の方が実験値より大きくなり、温度勾配は緩やかとなる。一方、 $\theta(z)$ は実験結果よりも早く乾燥が進行していることを示す。温度勾配の影響は地表温度が上昇し乾燥域が広がるにつれて無視できなくなる。

図-12は風上パラメーター $\alpha=0$ の場合の、(ガラキン法による)計算結果を示す。 $T(z)$ は蒸発開始後50時間以降、全体的に計算値の方が実験値よりも大きくなる。 $\theta(z)$ は逆に実験値よりも小さくなる。これより、乾燥過程の熱及び水分移動の解析には風上重み付き残差法が適していることが判る。この原因は支配方程式の非線形性のみならず、上述のように地表付近で $T(z)$ および $\theta(z)$ が急激な変化をするために、計算上で接点に対する重み付きが影響すると考えられる。

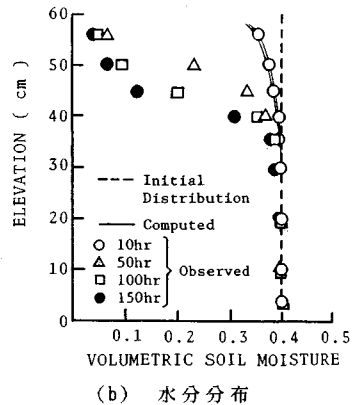
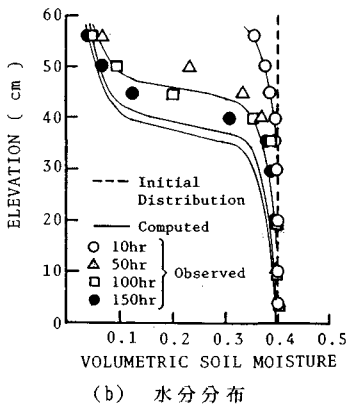
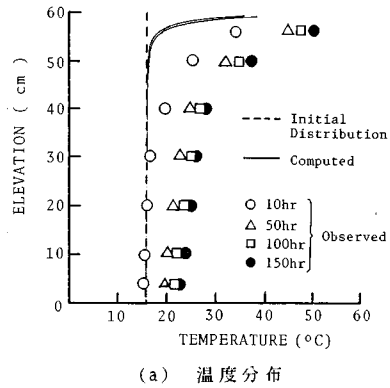
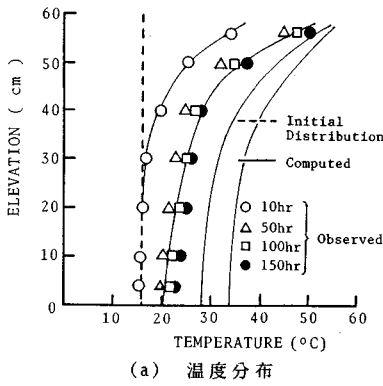
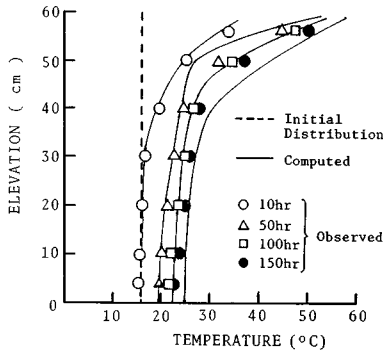
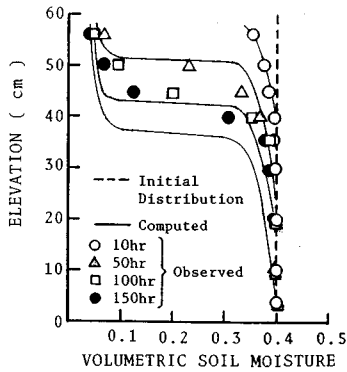


図-12 Galerkin法による結果 ($\alpha=0$)

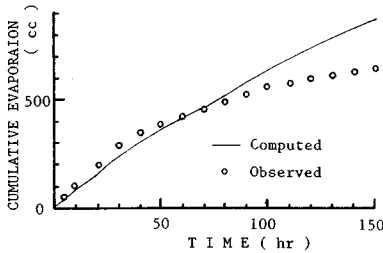
図-13 重力効果を無視した場合の結果



(a) 温度分布



(b) 水分分布



(c) 蒸発量分布

図-14 Philip & De Vries のモデルによる計算結果 ($J_w=0, G=0, \alpha=0.93$)

図-13は重力項を無視して計算した結果である。 $T(z)$ は殆ど上昇せず、 $\theta(z)$ はほとんど減少しない。この不一致の原因は質量保存が満たされていないために $\theta(z)$ に差異が生じ、連成現象ゆえに $T(z)$ に違いが生じたものと推察される。当然ながら、圃場容量に近い低含水状態の乾燥を除く通常の乾燥過程では重力効果は無視できない。

図-14に Philip と De Vries (1957) のモデルによる結果を示す。彼らのモデルは式 (40) 中の $G=0$ および (41) 中の $J_w=0$ とした式に対応する。 $T(z)$ 、 $\theta(z)$ はともに蒸発開始後 100 時間以降で計算値と実験値に差が

現れる。特に、 $T(z)$ はカラムの上部で実験値よりも大きくなる。この原因は θ_0 の非定常性が潜熱と関係することから、乾燥の進行に伴って無視できなくなるためと考えられる。

以上の検討より今回の実験における乾燥過程のように非線形性の強い熱と水分の輸送の解析には風上重み付き残差法による有限要素法解析が有効であるといえる。

6. 結 論

乾燥過程における飽和・不飽和多孔媒体中の熱・水分移動は温度勾配と水分勾配が相互に影響し合う連成現象である。実際に著者らはこれまでに種々の解析を試み、 $T(z)$ と $\theta(z)$ が共に敏感に変化する原因を検討してきた。本論文では水蒸気含水率の温度変化を考慮すると共に、非線形性の強い偏微分方程式に風上重み付き残差法を適用して実験結果との比較、対応を試みた。今までの系統的な研究成果を踏まえて、支配方程式の性質がかなり明快になってきた。以下に、得られた知見を列挙する。

- (1) 乾燥過程の熱・水分移動を問題には風上重み付き残差法による有限要素法が有効である。
- (2) 温度勾配の影響は無視できない。
- (3) 重力効果は無視すると計算値は実際と大きく異なった結果を生む。
- (4) 乾燥域の発達に従って、水蒸気による熱および水分移動が温度分布および水分分布に対して重要となる。

(5) 多孔媒体中の水分変化が地表からの蒸発による場合は本手法によって蒸発量の経時変化も推定できる。

このように、熱と水分の同時移行の解析ではエネルギーとマスの連成作用のため、単に不飽和透水係数や水分特性曲線を変えても温度および水分分布が共に実験値に適合することは難しい。本解析は特に地表付近で大きな温度勾配が形成され、乾燥層前面で水分分布が急変するような多孔媒体中の熱・水分移動の連成解析に適していると考えられる。

最後に、本研究の解析は著者の一人が一昨年プリンストン大学ピンダー研究室に席をおいていた時進められたものであることを自記する。またその折、幸いにも J.R. Philip 教授と話をする機会を得て、貴重な助言、示唆も得たことを記してお礼申し上げます。さらに、本実験を遂行するためにあたり小嶋直人氏(福井県)と富田寛之氏(建設省)の協力を得た。ここに謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Lewis, W.K. : The rate of drying of solid materials, Ind. Eng. Chem. Vol.13, pp.427~432, 1921.

- 2) Sherwood, T.K. : The drying of solids, I. Ind. Eng. Chem., Vol.21, pp.12~16, 1929.
- 3) Sherwood, T.K. : The drying of solids, II. Ind. Eng. Chem., Vol.21, pp.976~980, 1929.
- 4) Gardner, W. and J.A. Widtsoe : The movement of soil moisture, Soil Sci., Vol.11, pp.515~532, 1920.
- 5) Richards, L.A. : Capillary condition of liquids through porous mediums, J. Appl. Phys., Vol.1, pp.318~333, 1931.
- 6) Comings, E.W. and T.K. Sherwood : The drying of solids, VII. Moisture movement by capillary in drying granular materials. Ind. Eng. Chem., Vol.26, pp.1096~1098, 1934.
- 7) Hougan, O.A., H.J. McCauley and W.R. Marshall, Jr. : Limitations of diffusion equations in drying. Trans Am. Inst. Chem. Eng., Vol.36, pp.183~210, 1940.
- 8) Van Arsdell, W.B. : Approximate diffusion calculations for the falling rate phase of drying, Trans. Am. Inst. Chem. Eng., Vol.43, pp.13~24, 1947.
- 9) Philip, J.R. and D.A. De Vries : Moisture movement in porous materials under temperature gradient, Trans. Am. Geophys. Union, Vol.38, pp.222~232, 1957.
- 10) De Vries, D.A. : Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media, Trans. Am. Geophys. Union, Vol.39, pp.909~916, 1958.
- 11) Nasrallah, S.B. and P. Perre : Detailed study of a model of heat and mass transfer during convective drying of porous media, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol.31, pp.957~967, 1988.
- 12) Bories, S. : Recent advances in modelisation of coupled heat and mass transfer in capillary-porous bodies, Keynote Lecture I.D.S' 88, 1988.
- 13) Fritton, D.D., D. Kirham and R.H. Show : Soil water evaporation isothermal diffusion, and heat and water transfer, Proc. Soil Sci. Soc. Amer., Vol.34, No.2, pp.183~189, 1970.
- 14) Sophocleous, M. : Analysis of water and heat flow in unsaturated-saturated porous media, Water Resour. Res., Vol.15, No.5, pp.1195~1206, 1979.
- 15) Baradi, J.Y., D.L. Ayers and R.J. Schoehals : Transient and mass transfer in soils, J. Heat Mass Transfer, Vol.24, pp.449~458, 1980.
- 16) Abdel-Hadi, O.N. and J.K. Mitchell : Coupled heat and water flows around buried cables, Proc. ASCE, Vol.107, No. GT11, pp.1461~1487, 1981.
- 17) 堀田直哉・堀内将人・井上頼輝 : 不飽和土壌カラム内での温度勾配が非吸着物質の上方移動に及ぼす影響, 第42回土木学会年次学術講演会, II-466, pp.962~963, 1987.
- 18) 佐藤邦明・福原輝幸・宗俊雅広 : 地表表面付近の不飽和帯における溶質の鉛直移動に関する研究, 第32回水理講演会論文集, pp.113~118, 1988.
- 19) 福原輝幸・佐藤邦明 : 乾燥過程における多孔媒体中の熱と水分の移動に関する理論の一考察, 第44回土木学会年次学術講演会, II-96, 1989.
- 20) 鈴木義則 : 温度傾度下における土壌水分の移動, 農業気象, 第18巻, 第3号 pp.10~16, 1962.
- 21) 宮崎毅 : 温度勾配下の砂における水蒸気の凝縮と移動, 農業土木学会論文集, 第61号, pp.1~8, 1976.
- 22) Huyakorn, P.S. and Pinder, G.F. : A new finite element technique for the solution of two-phase flow through porous media, Advanced in Water Resources, Vol.1, No.5, 1978.
- 23) 佐藤邦明・福原輝幸・宗俊雅広, Serge Bories : 蒸発による浅層地下水の溶質移行と蓄積に関する基礎的研究, 土木学会論文集, III部門掲載予定, 1990.
- 24) 西林清茂・須藤賢・村上考司 : 熱を伴う不飽和浸透流の基礎的研究, 大林組技術研究所報, No.32, pp.37~41, 1986.

(1989.10.14・受付)