

# 浅い湖における日成層の混合モデルの開発

## MODELING THE DIURNAL MIXED LAYER IN A SHALLOW LAKE

田中昌宏\*・石川忠晴\*\*・小関昌信\*\*\*

By Masahiro TANAKA, Tadaharu ISHIKAWA and Masanobu KOSEKI

The numerical model simulating several processes in the diurnal mixed layer is constructed based on the DIM (Dynamic Instability Model) type entrainment law derived by authors. The model has three noteworthy features. The first is that the entrainment speed is estimated according to the density gradient below the thermocline. The second is that the model describes not only the mixing process but also the heating process. The third is that the model is basically one-dimensional model but it can estimate the pressure force caused by surface tilt. The third feature is realized by solving the basic simultaneous equations consisting of the momentum, continuity equations and the entrainment law. The model is tested to input meteorological conditions just after rainy season in 1988 at the Lake Kasumigaura, and the results agree well with measured temperature and velocities.

*Keywords* : diurnal mixed layer, numerical model, entrainment, shallow lake

### 1. 序 論

#### (1) はじめに

近年わが国では、湖の富栄養化が進行し、上水の取水や水産事業、観光事業に影響を生じている。そのため、湖の水質管理手法の確立が要請され、その基本的道具として湖内の水理現象をシミュレートできる数値モデルの開発が進められてきている。特に浅い湖では富栄養化問題が深刻であり、より詳細な情報を与えられる数値モデルの開発が望まれている。

“浅い湖”とは季節成層が安定に形成されない湖をさし、水深は10m程度以下である。浅い湖には日成層のみが存在する。日成層の温度差は1°Cのオーダーで風速4~5 m/sの風で容易に混合されその日のうちに消滅することが多い。このため浅い湖の流れや水質に関する従来の研究では、日成層のもたらす効果についてはほとんど言及されていなかった。

しかし、最近の詳細な観測によって、日成層が浅い富栄養湖の流れや水質に著しい影響を及ぼす場合のあるこ

とが明らかにされ<sup>1),2)</sup>、湖水環境を管理し改善してゆくうえで日成層現象を定量的に把握する必要性が指摘された。著者らは日成層の連行則について検討を進めてきたが<sup>3)</sup>、本論文では、それを一歩進めて、日成層の形成から消滅に至る過程のシミュレーションモデルについて述べる。

#### (2) 日成層の連行則

風が吹くと日成層は明確な躍層を形成し、その後の流れや水質の変化は躍層の位置に規定される。躍層の位置は、下層水が混合層に連行されることによって徐々に深部へ移動する。したがって、日成層の運動モデルを組み立てるうえで、連行速度を定式化することが重要となる。風によって生じる連行の概念モデルには、水面近傍で生成された乱れが下方に伝わって連行を引き起こすとするTEM (Turbulent Erosion Model) と吹送流のせん断不安定に起因する乱れが連行を引き起こすとするDIM (Dynamic Instability Model) がある<sup>4)</sup>。

著者ら<sup>3)</sup>は、霞ヶ浦の現地データをもとに日成層の連行特性について調べ、まず日成層の連行現象ではDIM型の連行が卓越すると結論した。さらに次のような基本的な条件下で、DIM型の連行則について理論的検討を行った。すなわち、①無限に広く水平方向に一様な状態の水域において、②下層密度が一様で、③全体の熱量が保存され、④風向と流向が一致する、という場合である。

\* 正会員 工博 東京工業大学助手 工学部土木工学科  
(〒152 目黒区大岡山2-12-1)

\*\* 正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科  
(〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

\*\*\* 正会員 工修 JR 東日本

その結果は次式で表わされる。

$$W_e = \dot{h} = \frac{U_*^2 \Delta U}{\varepsilon g h} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $W_e$ : 進行速度、 $h$ : 混合層厚、 $U_*$ : 水面の摩擦速度、 $\Delta U$ : 混合層と下層の流速差、 $\varepsilon$ : 相対密度差。無限に広い水域において、静止状態からステップ関数的に風が吹き始めた場合には、式(1)は次のようにも書ける<sup>3)</sup>。

$$\frac{\dot{h}}{U_*} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ \frac{\varepsilon g h}{U_*^2} \right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} Ri^{-1/2} \dots \dots \dots (2)$$

著者が霞ヶ浦で行った現地観測で、上に述べた4つの条件がおおむね満たされた時間帯の観測データを式(1)と比較したところ、その妥当性が検証された。

### (3) 本研究の内容

式(1)は、上に述べた条件のもとで成立する連行式であるが、現実の状況をシミュレートすることを考えるとそれらはかなり厳しい制約条件となる。そこで本研究では、以下の点について考察し、解析の厳密性を多少犠牲にして、より一般的な状況における計算式を求める。

① 式(1)を求める際には躍層より下の密度を一定としたが、現地では多かれ少なかれ下方に向かって増大し、安定な状態になっている場合が多い。特に前日に形成された日成層が消滅していない場合には、下層の密度が一樣な場合に比べて進行速度が遅くなると考えられる。そこで躍層より下部の密度が、任意の勾配の線形分布に従うとして連行則を求める。ただし、その場合には式(1)のような厳密解を得られないので、問題の少ない範囲で簡略化した取扱いを行う。

② 式(1)は水のもつ熱量の総量が保存されるとして導かれた。日成層の発達著しい日は、たいてい、午前中に風が弱いか無風であって表層付近に熱が蓄積し、午後には風が吹き出して躍層が形成され下降する。したがって蓄熱過程と混合過程が時間的に大体分離している場合が工学的には問題となる。しかし実際の現象を連続的にシミュレートするには、当然両者が(蓄熱過程だけでなく放熱過程も)同時に併行して生じると考えねばならない。実は、後に述べるモデルに上記の点を厳密に取り込むことは現在のところ難しい。しかし蓄熱過程だけを取り上げれば、時々刻々流入する熱によって発生する相対浮力(負のポテンシャルエネルギー)が混合層のせん断によって発生する乱れエネルギーによって解消されると考えることによって定式化できる。

③ 式(1)は、上下層の流速差  $\Delta U$  を含んでいるから、流速場も同時に求める必要がある。水域が無限に広い場合には流速の解も簡単に得られた。しかし実際には湖の大きさが有限なので、風による吹き寄せによって、水面および躍層のセットアップやセイシュが生じる。ま

た実際にはコリオリ力によって風向と流向が異なってくる。したがって連行則の式に加えて、各層ごとの運動方程式と連続条件式を連立して解を得てゆかねばならない。

本モデルは、湖水を密度の異なるいくつかの層の重なりとして表現する、いわゆる Layer Model である。もちろん実際の湖水の状態は大なり小なり三次元的である。三次元性が強まれば、Layer Model は適合性を失う。しかし、日成層の Wedderburn 数は通常 1 より小さい場合が多く、したがって界面のセットアップは十分発達することがない<sup>3)</sup>。また、著者らの行った現地観測によれば、明らかに層ごとの流動が認められ、層ごとの個性も長時間にわたって保存されている<sup>3)</sup>。したがって日成層は、他の密度流現象と同様、二次元的の高い現象である。このような理由から、本論文では Layer Model に上記の3つの項目を考慮することによって、日成層の基本的な挙動のシミュレーションを試みる。

## 2. DIM の基本構造と適用範囲拡張の方針

前章で述べた点について DIM を拡張するにあたり、まず著者らの DIM の要点を簡単に述べておきたい。

連行現象は一種の乱流現象であるが、一般に運動の基礎方程式を演繹的に解いて乱流現象を明らかにすることは、困難であると考えられている。そこで乱流現象を定量的に記述する際には、常に、何らかの仮説が導入される。古典的なものとして、渦動粘性係数や混合距離の思惟的または経験的設定がある。現在では仮説の内容もかなり複雑になっているが、 $k-\varepsilon$  モデルや LES のような乱流モデルにしても同種の仮説を含んでいる。いわゆる Model Closure の問題である。したがって、連行現象の内部機構を理論的に解明してゆくうえでも、何らかの仮説が必要とされる。

1つの方法は、既存の乱流モデルを適用して数値計算してしまうことであろう。最近、計算機の能力の向上に伴って、この種の研究が増えてきている。しかし乱流モデルの closure assumption は、多くの場合、それほど普遍的ではない。乱流の種類によって、実測データを用いて式の中の諸係数を同定し直さなければならない。また、DIM は連行則という1つの数式を導出することを目的としているから、個々のケースの数値計算結果を集積して関係式を推定するというのはあまり効率のよい方法とはいえない。

ここでは DIM 型の連行現象という特定された乱流現象を扱うのであるから、汎用的な乱流モデルに含まれる漠然とした仮説の同定で苦しむよりも、この特定の物理現象の機構について意味のありそうな仮説を立ててゆく方が有効な結果を導けよう。そこで DIM についての従

来の研究成果を総合して、著者らは、「局所エネルギー相似の仮説」という仮説を立てている。これは、混合層内のせん断によって生じる乱れエネルギーの1/2が連行によって生じるポテンシャルエネルギーの増分に転換されるとする仮説である。その物理的意味と従来の実験事実に対しての説明能力については文献3)を参照されたい。

なお、式(1)を求めるには、さらに付随的な仮定(レイノルズ相似の仮説)を用いて、そのうえで厳密な解析を行っている。しかし解の基本的な特性は、上に述べた局所エネルギー相似の仮説と、混合層内の密度および速度分布の境界条件によってほとんど規定されている(このことは後の近似的解析によっても間接的に示される)。そこで、以下では、「局所エネルギー相似の仮説」を保存して、他の部分を簡略化した取扱いをして、応用性の高い連行則を導出する。

### 3. 基礎方程式

湖水をいくつかの層の重なりとして表現するが、その一番上の層がいわゆる混合層であり、二番目の層との間で連行現象が生じる。そこで、説明を簡単にするため、以下の式展開はまず2層流について行われる。便宜的に第1層を混合層(あるいは上層)、第2層を下層とよぶ。

#### (1) 下層の密度分布が一様でない場合の連行則の導出

図-1(a)に示すように、水面にデルタ関数的に集中した相対浮力があり、これが風で混合されて深さ  $h$  の混合層が形成されたとする。混合層の中の相対浮力の分布は次式で表わされるとする。

$$\epsilon(\eta) = \Delta\epsilon(1-\eta^n) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\eta = z/h$ : 鉛直下方への無次元距離、 $\Delta\epsilon$ : 水面での  $\epsilon$  の値、 $n$ : ある定数である。躍層の深さ  $h$  が  $\dot{h}$  の速度("・"は時間微分を表わす)で下降していくとすると、各深さにおけるポテンシャルエネルギーの増加率は次式で表わされる。

$$BP_1(\eta) = \rho_0 \Delta\epsilon \dot{h} \eta (1-\eta^n) \dots\dots\dots (4)$$

次に、図-1(b)に示すように、深さ方向に線形な相対浮力があり、これが風で混合されて深さ  $h$  の混合層が形成されたとする。混合層の中の相対浮力は式(3)で表わされるとする。このとき各深さのポテンシャルエネルギーの増加率は次式で表わされる。

$$BP_2(\eta) = \rho_0 \Gamma g h \dot{h} \frac{n-1}{2n} \eta (1-\eta^n) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\Gamma = d\epsilon/dz$ 。右辺の  $\eta$  に関する関数形は式(4)と式(5)で同形となっている。そこで図-1の(a)と(b)を重ね合わせて、(c)の状態を考える。この状態では、混合層の総浮力と下層の密度勾配の組合せは任意となっているので、実際の状態を比較的良く近似できる。とこ

ろで、(c)の状態は数学的に(a)と(b)の状態を重ね合わせて表わされるから、実際の混合層の発達を、初期密度分布をデルタ関数とする仮想的混合と、初期密度分布を線形関数とする仮想的混合の線形重ね合わせで近似できることになる。混合層の発達はもともと非線形性の強い現象だから、それがこのように単純な系の線形重ね合わせで表現できるというのは、一見、不思議なことである。実は、式(3)において密度分布を  $1-\eta^n$  に従うと仮定した場合にのみたまたまそうなのである。しかし、だからといって、以下の式展開が意味を失うことはないであろう。実際の密度分布が  $1-\eta^n$  で近似されるならば、以下の式もやはり近似的に成り立つのである。

全体のポテンシャルエネルギーの増加率  $BP(\eta)$  は  

$$BP(\eta) = \rho_0 (\Delta\epsilon + k\Gamma h) \dot{h} \eta (1-\eta^n)$$

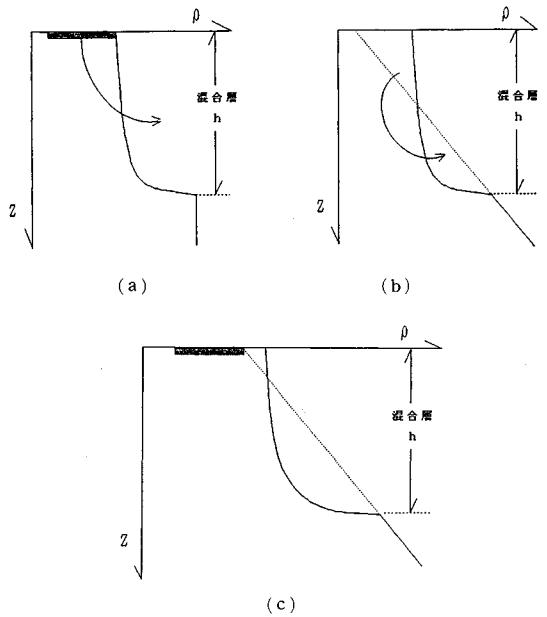


図-1 下層の密度分布が一様でない場合の連行則の概念図

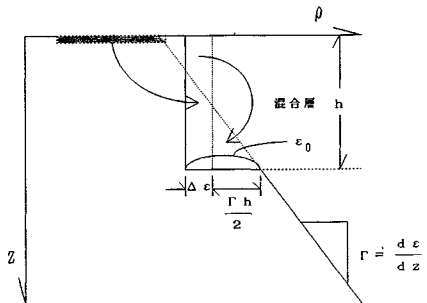


図-2 相対浮力と下層の密度分布の関係

$$= \rho_0 \varepsilon_0 g h \eta (1 - \eta^n) \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 $\varepsilon_0$ ：水面での  $\varepsilon$  の値、 $k=(n-1)/2n$ ：密度分布によって決まる係数である。

さて、混合層内の速度分布は次式で表わされるとする。

$$u = \Delta U f(\eta) \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 $\Delta U$ ：下層に相対的な水面の流速。すると、混合層内のせん断による乱れエネルギーの生産率は次式で表わされる。

$$SP = -\tau \frac{\partial u}{\partial z} \\ = -\frac{\rho_0}{h} \Delta U \left[ U_*^2 - \frac{U_*^2}{\beta} \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta + \Delta U \dot{h} \eta f(\eta) \right] f'(\eta) \dots \dots \dots (8)$$

ここに  $\beta = \int_0^1 f(\eta) d\eta$ ，“ $\dot{\phantom{x}}$ ”は  $\eta$  に関する微分を表わす。ここで局所エネルギー相似の仮説を用いると次式を得る。

$$-C_0 \frac{\Delta U}{h} \left[ U_*^2 - \frac{U_*^2}{\beta} \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta + \Delta U \dot{h} \eta f(\eta) \right] f'(\eta) \\ = \varepsilon_0 g h \eta (1 - \eta^n) \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 $C_0=1/2$ 。上式の波線の項は連行による見掛けの抵抗を表わしているが、運動量式から風応力と次のような関係で結ばれる。

$$\beta (\Delta U \dot{h} + \dot{\Delta U} h) = U_*^2 \dots \dots \dots (10)$$

左辺 ( ) 内の第2項は混合層の運動量の増加分を表わす。そこで左辺 ( ) 内で第1項の占める割合を  $D$  とおくと、

$$\Delta U \dot{h} = D \frac{U_*^2}{\beta} \dots \dots \dots (11)$$

と書ける。ここに  $D$  は分配に関する係数で0から1の値をとる。これより式(9)は次のようになる。

$$-C_0 \frac{U_*^2 \Delta U}{h} \left[ \beta - \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta + D \eta f(\eta) \right] f'(\eta) \\ = \beta \varepsilon_0 g h \eta (1 - \eta^n) \dots \dots \dots (12)$$

上式を  $\eta=[0\sim 1]$  で積分すると次式を得る。

$$\dot{h} = \frac{C_0}{\xi} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{D}{2} \right) \frac{\alpha}{\beta} \right\} \frac{U_*^2 \Delta U}{\varepsilon_0 g h} \dots \dots \dots (13)$$

ここに、 $\xi = \int_0^1 \eta (1 - \eta^n) d\eta$ 。さらに上式と式(11)から次の関係が得られる。

$$\frac{1}{C_0 F} = \frac{\beta}{\xi D} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{D}{2} \right) \frac{\alpha}{\beta} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

ここに、 $F$ ：内部フルード数の2乗 ( $=\Delta U^2/\varepsilon_0 g h$ ) である。式(14)を式(13)に代入すると、連行則は次式で表わされる。

$$\dot{h} = \frac{D}{F \beta} \frac{U_*^2 \Delta U}{\varepsilon_0 g h} \dots \dots \dots (15)$$

上式は式(1)に係数  $D/F\beta$  がかかった形になっている。

この係数の値が下層の密度勾配によって変化することとなる。次にその関係を求めよう。

式(15)を式(12)に代入すると、流速分布に関する微分方程式が得られる。

$$-\left[ \beta - \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta + D \eta f(\eta) \right] f'(\eta) \\ = \frac{D}{C_0 F} \eta (1 - \eta^n) \dots \dots \dots (16)$$

ここで  $f(\eta)$  は混合層内の無次元流速分布であったから、 $\eta=0$  で  $f(\eta)=1$ 、 $\eta=1$  で  $f(\eta)=0$  である。そこで、 $D$  の各値について、 $f(\eta)$  の境界条件を満たすように、 $C_0 F$  と  $f(\eta)$  の組合せを数値積分によって求めることができる。また求められた  $f(\eta)$  から  $\beta$  の値も求まる。

そこで次に  $D$  の値と下層の密度勾配の関係を求める。

まず  $F$  の定義式より、

$$(E_0 + k \Gamma g h^2) F = \Delta U^2 \dots \dots \dots (17)$$

である(ここに  $E_0 = \Delta \varepsilon g h$ )。ここで短い時間では  $F$  の値は一定とみなせると仮定して、上式を両辺時間で微分すると、

$$k \Gamma g h \dot{h} F = \Delta U [\dot{\Delta U}] \dots \dots \dots (18)$$

となる。上式の  $F$  に式(17)を代入して変形すると次式を得る。

$$\Delta U \dot{h} = \frac{E_0 + k \Gamma g h^2}{k \Gamma g h^2} h \Delta \dot{U}$$

ここで、 $E_0/(k \Gamma g h^2) = N$  とおくと、式(11)との関係から

$$D \frac{U_*^2}{\beta} = (N+1)(1-D) \frac{U_*^2}{\beta}$$

となり、次式を得る。

$$N = \frac{D}{1-D} - 1 \dots \dots \dots (19)$$

$N$  の値はそのときの密度分布から決定されるので、 $D$  の値も求まる。

以上から、ある時点の密度分布が知れば、その分布に対応した  $D$ 、 $F$ 、 $\beta$  が定まり、式(15)を用いて連行速度を得ることができる。

ところで式(15)は水面における相対流速  $\Delta U$  と相対浮力  $\varepsilon_0$  を含んでいるが、これらと平均流速および平均相対浮力の関係は、分布形によって変化する。式(15)を平均量で表わすと次式となる。

$$\dot{h} = C(N', n) \frac{U_*^2 U_m}{\varepsilon_m g h} \dots \dots \dots (20)$$

ここに、 $C(N', n) = D \lambda / F \beta^2$ 、 $\lambda = \int_0^1 (1 - \eta^n) d\eta$ 、 $U_m$ ：下層に対する混合層の平均流速、 $\varepsilon_m$ ：混合層の平均相対浮力、 $C(N', n)$  は係数で  $N'$  と  $n$  の関数、 $N'$  は式(19)の  $N$  と類似の密度分布パラメーターで、次式で定義される。

$$N' = \frac{\varepsilon_m g h}{1/2 \Gamma g h^2} = 2 \varepsilon_m / \Gamma h \dots \dots \dots (21)$$

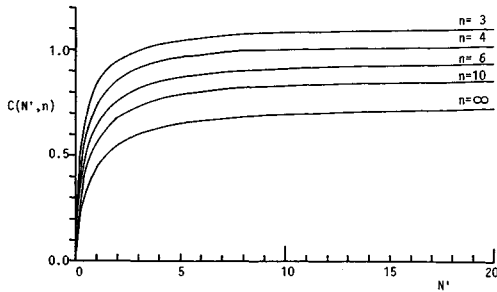


図-3 N' と C(N', n) の関係

なお、式(1)を式(20)の形に書き直すと次式となる。

$$\dot{h} = \frac{9}{8} \frac{U_*^2 U_m}{\epsilon_m g h} \dots\dots\dots (22)$$

図-3は C(N', n) の値を、N' を横軸に、n をパラメーターとして示したものである。

次にこの連行則の考え方の妥当性を検討しておく。Kato and Phillips<sup>5)</sup> (KP) は円形水路において深さ方向に線形に増加する密度分布 (図-1 (b) に対応) のもとで DIM 型の連行実験を行い、Kantha et al.<sup>6)</sup> (KPA) は同じ装置を用いて下層の密度が一様な場合 (図-1 (a) に対応) の連行実験を行っている。図-4 は両者の実験データをまとめて示している。両者ともリチャードソン数の小さい範囲のデータは、DIM 型の連行則に従って -1/2 のべき乗に従っている (リチャードソン数が大きくなるにつれてこの関係からずれるのは、側壁の影響であると考えられている)。円形水路の実験では 2 次流の影響も無視できないという指摘もあり、連行速度の絶対値には問題がある可能性がある。しかし、KP の連行速度は KPA の 5 ~ 6 割の値となっており、下層の密度勾配によって連行速度が異なるのはほぼ確実である。そこで、本理論がこの違いを説明できるか検討する。

図-4 の連行則は、速度スケールに U\* のみを用いた関係で示されているので、本理論結果もこの関係に合わせて比較する必要がある。式(15)を変形すると、

$$\frac{\dot{h}}{U_*} = \frac{D}{\beta} F^{-1/2} \lambda^{1/2} \left( \frac{U_*^2}{\epsilon_m g h} \right)^{1/2}$$

となり、変数をまとめて書き直すと次式となる。

$$E[U_*] = C'(N', n) R_{im}[U_*]^{-1/2} \dots\dots\dots (23)$$

さて、本章の式展開では、式(21)の N' を ∞ にすると下層密度が一様な場合になり、N' を 1 とすると線形分布の場合になる。図-4 には、密度分布関数の指数が n=3 と ∞ (密度分布が矩形) に対し、N' が 1 と ∞ の場合の式(23)の関係が示されている。理論値は実験値より若干大きめの値を示しているが、下層の密度が一様な場合と線形な場合の連行速度の違いをよく表わしている。さらに表-1 には、下層の密度分布が一様な場合と線形な場合の

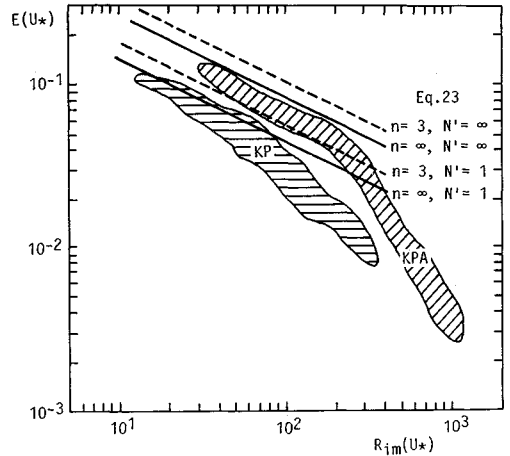


図-4 Kato and Phillips<sup>5)</sup> (KP), Kantha et al.<sup>6)</sup> (KPA) の実験結果

表-1 n と [C'(1, n)]/[C'(∞, n)] の関係

n	3	4	6	8	10	∞
C'(1, n)	0.56	0.56	0.55	0.55	0.54	0.54
C'(∞, n)						0.54

C'(N', n) の比 [C'(1, n)]/[C'(∞, n)] が、n のいくつかの値に対し示されている。これより、C'(N', n) の比は n にあまり依存せず、0.55 程度である。したがって、本研究の考え方で下層の密度勾配が連行速度に及ぼす影響をおおむね取り込めたと判断される。

(2) 日射による加熱がある場合の連行

透過した日射による加熱は混合層の内部に相対浮力を発生させ、負のポテンシャルエネルギーを生じる。混合層が混合層であり続けるためには、この負のポテンシャルエネルギーが解消されなければならない。そこで吹送流の内部シアーによって生成される乱れエネルギーの一部が新たに流入した熱を混合し、さらに余剰なエネルギーがあれば、躍層の連行を生じさせると考える。以下この考え方に基づいて、日射による加熱の機構を含んだ連行則を導出する。

一般に深さ z における光強度 I(z) は次式で表わされる。

$$I(z) = I(0) \exp(-\kappa z) \dots\dots\dots (24)$$

ここに、κ: 光の消散係数である。上式より、深さ z における密度変化は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dT} \cdot \frac{1}{\rho_r C_p} \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{B}{\rho_r C_p} \kappa I_0 \exp(-\kappa z) \dots\dots\dots (25)$$

ここに、ρ<sub>r</sub>: 基準密度、C<sub>p</sub>: 比熱、T: 温度、I<sub>0</sub>: 水面

での光強度,  $B = dp/dT$ . ここで, 相対密度差  $\varepsilon$  を基準密度  $\rho_r$  に対して定義する,

$$\dot{\varepsilon}(z) = \frac{-\dot{\rho}}{\rho_r} = AI_0 \exp(-xz) \dots\dots\dots (26)$$

ここに,  $A = Bx/\rho_r^2 C_p$  である. この微小な密度差を混合層の深さ  $h$  の範囲で混ぜるために必要な仕事率を求めよう (混合層の深さ  $h$  で混ぜるといふのは, 発生した相対浮力を混合層内の相対密度分布式 (3) の形に分配することを意味する). 式 (26) の分布について深さ  $h$  より上層の相対浮力  $J$  およびポテンシャルエネルギーの増加率  $\dot{E}_{p1}$  は次のようになる.

$$J = g \int_0^h \{\dot{\varepsilon}(z) - \dot{\varepsilon}(h)\} dz$$

$$= gAI_0 \{1 - (1 + \xi) \exp(-\xi)\} \dots\dots\dots (27)$$

$$\dot{E}_{p1} = g \int_0^h \{\dot{\varepsilon}(z) - \dot{\varepsilon}(h)\} z dz$$

$$= gAI_0 \frac{1}{x} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{2} \xi^2 + \xi + 1 \right) \exp(-\xi) \right\} \dots (28)$$

ここに,  $\xi = xh$  は光の透過距離 ( $1/x$ ) で無次元化した混合層厚である.

一方上記の相対浮力の増分を混合層内で混ぜた後のポテンシャルエネルギーの増加率  $\dot{E}_{p2}$  は次のようになる.

$$\dot{E}_{p2} = \zeta \varepsilon_s g h^2 \dots\dots\dots (29)$$

ここに,  $\varepsilon_s$  は混ぜられた後の表層の  $\varepsilon$  の値である.

また, 質量の保存則から

$$\lambda \varepsilon_s g h = J \dots\dots\dots (30)$$

となる. そこで式 (27) と式 (30) から式 (29) は

$$\dot{E}_{p2} = gAI_0 \cdot \mu h \{1 - (1 + \xi) \exp(-\xi)\} \dots\dots\dots (31)$$

となる. ここに,  $\mu = \zeta/\lambda$  である.

したがって, 日射によって混合層の中に発生する熱分布を連続的に混ぜるといふことは  $\dot{E}_{p1}$  の率で発生する負のポテンシャルエネルギーを  $\dot{E}_{p2}$  にするということになる. つまり  $\dot{E}_{p2} - \dot{E}_{p1}$  の率で仕事をしなければならぬ.

$$\dot{E}_{pc} = \dot{E}_{p2} - \dot{E}_{p1}$$

$$= gAI_0 \frac{1}{x} \left\{ \mu \xi - 1 - \left( \mu \xi + \mu \xi^2 - \frac{1}{2} \xi^2 - \xi - 1 \right) \exp(-\xi) \right\} \dots\dots\dots (32)$$

以上から, 日射によって熱量が供給される場合には, 混合層内で生産された乱れエネルギーが, 連行によるポテンシャルエネルギーの増分のほかに  $\dot{E}_{pc}$  に使用される. したがって, 連行則は次式となる.

$$\zeta \varepsilon_0 g h \frac{dh}{dt} = \zeta \frac{D}{F\beta} U_*^2 \Delta U - \dot{E}_{pc} \dots\dots\dots (33)$$

右辺が正の場合には躍層の下降が可能である. しかし, 右辺が負の場合には, せん断乱れエネルギーをすべて

使っても日射により発生する安定な熱分布を解消できないことになるから, 混合層はもはや混合層として成り立ち得ないことになる. その場合には上部に新しい混合層が形成される. そこで上式の右辺を連行を生じさせることのできる有効な余剰エネルギー,  $E_{av}$  とよぶ.

$$E_{av} = \zeta \frac{D}{F\beta} U_*^2 \Delta U - \dot{E}_{pc} \dots\dots\dots (34)$$

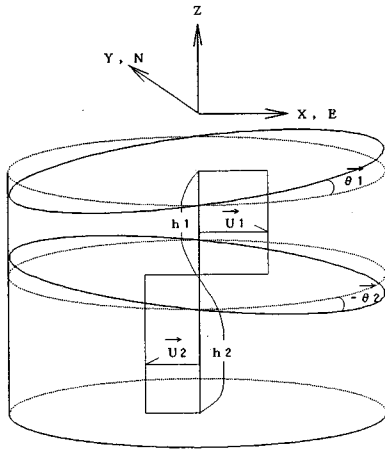
これより, 躍層の動きを次のように分類できる.

$$\begin{cases} E_{av} > 0 \rightarrow \text{躍層下降} \\ E_{av} = 0 \rightarrow \text{躍層停留} \\ E_{av} < 0 \rightarrow \text{新しい躍層の形成} \end{cases}$$

新しい躍層が形成される場合には, 水面から新たに混合を開始する.

### (3) 流れの基礎方程式

成層の混合モデルには鉛直一次元モデルが多い. Layer Model もそうである. しかし, DIM 型の混合を鉛直一次元モデルで表わそうとすると, 1つの困難が生まれる. DIM 型の連行現象では上下層の相対流速差  $\Delta U$  が連行速度を支配する1つの要素となっている. したがってモデルの中に層ごとの水平流速を組み込まねばならない. ところが湖の大きさは有限であるから, 水平流動の結果として水面や躍層のセットアップが生じる. つまり水面や躍層の傾きを考えねばならないのだが, それは鉛直一次元というモデルの枠組みを逸脱している. このことは, 海洋のように無限に広いとみなせる水域の場合には問題とはならないが, 霞ヶ浦程度の広さでは問題となる. 著者らが行った現地観測結果<sup>1)</sup>では下層でしばしば逆流が現われているが, これはその証拠である. Spigel *et al.*<sup>7)</sup>は, DIM 型の連行の機構を部分的に組み込んだモデルで日成層の挙動を1日弱の時間シミュレートしているが, その際は, 界面のセットアップに要する時間をあらかじめ決めておき, 風の吹き始めからその時間までは水域を無限に広いとして混合層を加速度運動させ, その時間以降は水平流動を停止させている. しかしそのような便宜的な取扱いでは, 風向や風速が変化する場合を正しく計算できないことは明らかである. さらに, 湖がある程度大きくなると, コリオリ力のために風向と流向が一致しなくなるが, その影響も上記の便宜的な取扱いでは考慮することができない. 鉛直一次元モデルのもつこのような困難が今まであまり議論されていなかったのは, DIM 型の連行則が海洋の混合層の研究から生まれてきたためである. 一方湖の混合には, 今まで主に TEM 型の連行則が使われてきた. TEM 型の連行則は水平流動という概念を含まないので, 鉛直一次元モデルで話が済んでいたのである. 以上の困難を克服するには, 鉛直一次元的な枠組みから多少とも脱出する必要がある. そこで本研究では次のように流れをモデル化した.



図一五 本モデルの概念図

湖を図一五に示すような円筒形のタンクと考え、その中に成層が形成されているとする。簡単のためにまず二層の場合を考える。水理量は図中に示すようにタンクを中心で定義する。圧力が静水圧分布に従うとして、中心点での上層と下層の運動方程式は次のように書ける。

上層（第1層）：

$$\frac{d}{dt}(h_1 \vec{U}_1) + h_1 f \vec{e} \times \vec{U}_1 = -g \vec{\theta}_1 h_1 + \frac{\vec{\tau}_s}{\rho_1} + \vec{U}_2 \frac{dh_1}{dt} - f_d h_1 |\vec{U}_1| \vec{U}_1 \dots \dots \dots (35)$$

下層（第2層）：

$$\frac{d}{dt}(h_2 \vec{U}_2) + h_2 f \vec{e} \times \vec{U}_2 = -g \vec{\theta}_1 h_2 - \epsilon g \vec{\theta}_2 h_2 - f_b \vec{U}_2 |\vec{U}_2| - \vec{U}_2 \frac{dh_1}{dt} - f_d h_2 \vec{U}_2 |\vec{U}_2| \dots \dots \dots (36)$$

ここに、 $h_1, h_2$ ：上下層厚さ、 $\vec{U}_1, \vec{U}_2$ ：上下層の平均流速ベクトル、 $f$ ：コリオリ係数、 $\vec{e}$ ：鉛直方向の単位ベクトル、 $\vec{\tau}_s$ ：水面に作用する風応力ベクトル、 $\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2$ ：水面、界面勾配、 $\rho_1, \rho_2$ ：上下層密度、 $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_2$ ：上下層相対密度差、 $f_b$ ：底面の摩擦係数（ここでは、滑面とし  $f_b = 5 \times 10^{-4}$  で一定とした）、 $f_d$ ：水平流動の抵抗係数である。両式右辺の最後の項は、“実際の”湖の岸辺が入り組んでいるために生じる水平流動の抵抗を表わしている。

上式では水平方向の移流項および拡散項を無視している。本モデルは湖の中心でのみ水理量を定義しているので、移流項・拡散項（どちらも空間微分を含む）を式に含めるには何か特別な仮定を設けなければならない。しかし、福島・村岡<sup>9)</sup>が霞ヶ浦について運動方程式の各項の相対的重要性を調べたところによれば、移流項と拡散項は他の項に比べて1オーダー小さいので無視して差し支えない。ただし、水平拡散項の効果が全くないとすると、

セイシュやコリオリ力による回転運動が生じた場合に、それらを減衰させる要素が底面摩擦力以外に存在しなくなる。したがって、たとえば上層のみが運動している場合には、セイシュや回転運動が永久に続くという不都合が生じる。福島<sup>9)</sup>が述べているように、これらの運動は、少なくとも霞ヶ浦においては、入り組んだ岸辺での抵抗によって減衰されていると推測される。そこで Niiler<sup>10)</sup> にならって、次のような抵抗項を付加している。

$$\vec{F} = \rho f'_d |\vec{U}_1| \vec{U}_1 \dots \dots \dots (37)$$

海洋においてはこの項は界面の内部波などによる抵抗と考えられている。しかし、湖ではむしろ上記したように横方向の抵抗が卓越していると考えた方が妥当であろう。ただし、横方向の長さスケールは風の吹く方向によって異なるので、ここでは  $f'_d$  の代わりに横方向の平均的な長さスケールを含めた形の抵抗係数  $f_d$  を用いる。このため  $f_d$  の値は個々の湖の特性によって異なる。ここでは福島・村岡<sup>11)</sup>の霞ヶ浦におけるセイシュの観測から得られた値を参考に次のように決める。福島・村岡は成層がない場で観測を行っている。したがってセイシュの減衰は底面の摩擦と岸辺の摩擦の両方を含んでいる。そこで次のようにおく。

$$\frac{f}{H} = \frac{f_b}{H} + f_d \dots \dots \dots (38)$$

ここに  $f$  は福島・村岡が求めた減衰係数で  $2.47 \times 10^{-3}$  である。また底面の摩擦係数  $f_b$  は先に述べたように  $5 \times 10^{-4}$  であり、 $H$  を霞ヶ浦の平均水深（4 m）とすると、

$$f_d = 4.9 \times 10^{-6} \text{ [1/cm]} \dots \dots \dots (39)$$

連続条件式は、水面と内部界面が平面状であると仮定すると、次のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} \text{上層： } U_1 h_1 + U_2 h_2 &= KR^2 \frac{d\vec{\theta}_1}{dt} \\ \text{下層： } U_2 h_2 &= KR^2 \frac{d\vec{\theta}_2}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

ここに、 $R$  は湖の半径、 $K$  は一種の形状係数で円形の場合  $1/3$  である。

以上の方程式は躍層が1段の2層系に対するものであるが、実際には躍層が複数形成されることもあるので、任意の躍層数に対して運動方程式および連続式を導出する。

上と全く同じ考えで多層系の運動方程式を書いてゆくと、式(36)の右辺第2項に相当する内部界面の傾きによる圧力項が累積し、大変複雑な式となる。加えて、異なる傾きの躍層が非常に接近して存在する場合、湖の内部で2つの面が交わる状態が出現し、連続条件式が式(40)のような簡単な形で書けなくなる。それでも数値計算は不可能ではないがかなり面倒である。

しかし、日成層の場合、次のような理由によって内部

界面の傾きによる圧力項は、水面の傾きによる圧力項に比べてかなり小さいと推測できる。前論文<sup>3)</sup>で述べたように、日成層の Wedderburn 数はかなり小さい。霞ヶ浦の場合には約 0.1 である。Wedderburn 数は、躍層が湖底に達して消滅するまでの時間と、界面のセットアップが完了するに要する時間の比である。したがって、躍層が消滅するまでに、界面のセットアップは平衡状態の 1/10 のオーダーしか達成されない。実際には、躍層が消滅する前に風がやんだり変化してしまうことも多いので、その場合の界面のセットアップの達成度はさらに小さくなる。ところで、水面のセットアップは比較的すみやかに生じ、これが界面のセットアップを誘起する。そして界面のセットアップが平衡状態に達したところで、両者のもたらす圧力項が同程度になる。以上のことから、界面の傾きによる圧力項は、水面のそれに比べて、大きなうえから 1 オーダー小さいと考えられるのである。

そこで、界面の傾きの項を省略して多層系の方程式を書くこととなる。

[運動方程式]

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}_1}{dt} &= -f\vec{e} \times \vec{U}_1 - g\vec{\theta}_1 - f_d|\vec{U}_1|\vec{U}_1 \\ &\quad - \frac{(\vec{U}_1 - \vec{U}_2) \cdot dh_1}{h_1} \frac{d\vec{h}_1}{dt} + \frac{\vec{\tau}_s}{\rho_1 h_1} \\ &\quad \vdots \\ \frac{d\vec{U}_i}{dt} &= -f\vec{e} \times \vec{U}_i - g\vec{\theta}_i - f_d|\vec{U}_i|\vec{U}_i \\ &\quad \vdots \\ \frac{d\vec{U}_{m+1}}{dt} &= -f\vec{e} \times \vec{U}_{m+1} - g\vec{\theta}_{m+1} - f_d|\vec{U}_{m+1}|\vec{U}_{m+1} \\ &\quad - \frac{f_b}{h_{m+1}}|\vec{U}_{m+1}|\vec{U}_{m+1} \dots \dots \dots (41) \end{aligned}$$

[連続式]

$$\frac{d\vec{\theta}_1}{dt} = \frac{1}{KR^2} \sum_{j=1}^{M+1} \vec{U}_j h_j \dots \dots \dots (42)$$

これに、次の連行則を加えた連立一次常微分方程式系でモデルが構成される。

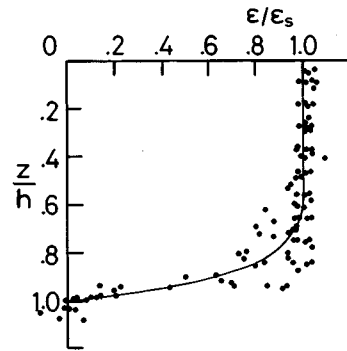
$$\left. \begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= \frac{E_{av}}{\zeta \epsilon_0 g h} \\ E_{av} &= \zeta \frac{D}{F\beta} U_*^2 \Delta U - \dot{E}_{pc} \\ \Delta U &= \cos w_a \cdot (\vec{U}_1 - \vec{U}_2) / \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

ここに、 $w_a$  は風向と上下層平均流向のなす角である。

#### 4. 計算条件および計算方法

##### (1) 密度分布 (密度分布のベキ乗の設定)

3.(1)で導いた連行則の式は、密度分布形、式(3)の指数  $n$  を定めることによって決まる。ここでは、特徴的



図一六 8月1日から8日の平均的な密度分布

な日成層現象が観測された'88年8月1日～8日のシミュレーションを目標とし、この期間での平均的な密度分布に合うように密度分布のベキ乗を決定する。

図一六はこの期間の混合層の代表的な密度分布を無次元化して示している。図中の曲線は  $n$  の値を 10 としたものであり、以下の計算では  $n=10$  として計算を行う。

##### (2) 初期条件

式(41)～(43)は1階の連立常微分方程式であり、初期条件は従属変数すべての値に対して必要となる。ここでは温度に実測値を与え、流速および水面勾配はゼロとした。水面勾配をゼロとするのは水面勾配が測定されていないためである。また、流速値は測定されているが、初期値として水面勾配をゼロとし、流速値のみを与えると、初期値が運動方程式および連続式を満たしていないことになり、数値的な原因によるセイシュが生ずるなどの問題が生じると予想されるからである。そこで、躍層がなく無風かあるいは無風に近いときから計算を開始し、上記の初期条件を与えた。

##### (3) 水面に作用する風応力

水面に作用する風応力は、湖心観測所に設置されている水面から 10 m の高さにある風向風速計のデータから与える。風応力の評価式は次式を用いる(水理公式集)。

$$\left. \begin{aligned} |\vec{\tau}_s| &= \rho_1 C_{10} U_{10}^2 \\ C_{10} &= 0.5 (U_{10})^{0.5} \times 10^{-3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

##### (4) 日射条件

本章の計算例では、日射の透過による蓄熱過程のみを考慮し、水面および底面でのその他の熱の出入りを省略している。1つの理由は、それらの熱移動の過程が十分明らかにされていないことである(少なくとも現行推定式を用いた時間変化の推定の精度は不明)。もう1つの理由は、日成層が発達して水質などに影響を及ぼすのは、梅雨明けなどの比較的急激な受熱期であるため、そのような条件では、日射の透過による加熱を考慮するだけでも、水温変化をおおむね表わすことができることであ



る<sup>2)</sup>。

図-7は著者らの行った現地観測の中で日成層が顕著に発達した期間の、蓄熱量測定値と熱量換算日射量の累加値を比較したものである。両者はおおむね一致していることがわかる。そこで、湖心観測所に設置した日射計のデータを用い、光の消散係数  $x$  を  $2.0 [1/m]$  として、熱量の変化を見積る。

(5) 計算方法

式(41)~(43)は1階の連立常微分方程式であり、上記した計算条件に従って数値積分することによって解が得られる。時間に関する数値積分にルンゲ・クッタ法を用い、積分時間間隔は1分とした。なお、実際の計算にあたっては、日射の透過や混合の履歴による下層の密度変化を10 cm 間隔で評価し、その後の計算に用いている。

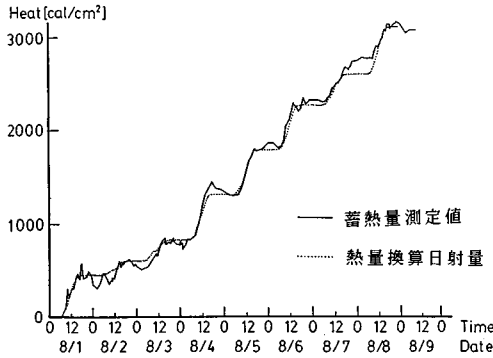


図-7 蓄熱量測定値と熱量換算日射量の累加値の比較

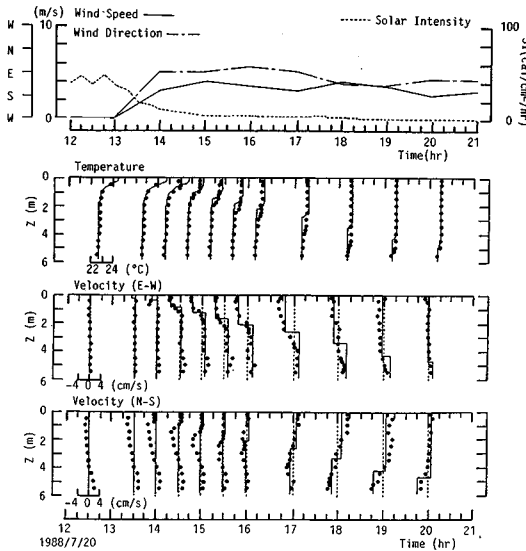


図-8 計算結果—熱量が保存される場合(1988年7月20日)

5. 現地のシミュレーション

(1) 熱量が保存される場合

まずモデルのチェックの意味で、現象が最もシンプルな場合を取り上げる。

1988年7月20日は、ほぼ静止状態から海風がステップ関数的に吹き出し、混合が生じている間、熱量が保存されていた。この日のデータは前論文において連行則の検討に用いたものである。

図-8に計算結果を示す。上段は日射と風速であり、以下温度の鉛直分布、流速  $u$  ( $W \rightarrow E$ が正)、 $v$  ( $S \rightarrow N$ が正)を示しており、実線が計算結果である。計算結果は躍層の降下速度が観測値に比べ多少遅くなっているが、躍層の形成過程および降下の様子を全般的に良く表わしており、流速も実測値と良く一致している。

(2) 連続計算

次に水質の変化が顕著にみられた1988年8月6日~8日のシミュレーションを行う。4日、5日は風速9 m/s 前後の強風が吹き続いたため躍層は形成されておらず、5日の21時以降風速が2 m/sに弱まったので、5

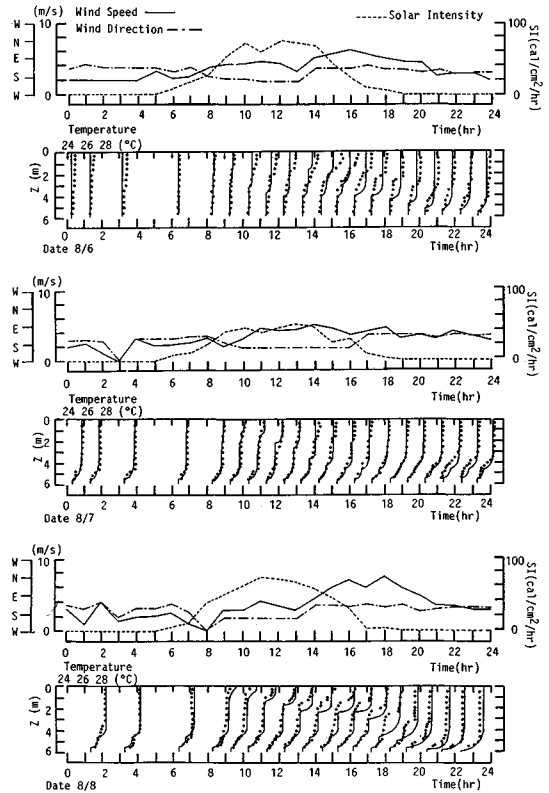


図-9 計算結果—連続計算 (1988年8月6日~8日)

日の21時から計算を開始した。

図-9に計算結果を示す(紙面の制約から計算結果は水温分布のみを示す)。6日はほぼ晴天で朝方から夜まで4~6m/sの風が吹いている。実測値は17時頃明確な躍層が形成され、それ以後下降し、23時には4.5m付近で止まっている。計算値は午前中に形成された温度差0.5度程度の弱い躍層が4m付近に停滞し、13時頃新たに1.5m付近に形成された躍層が蓄熱と同時に下降し、16時頃下層の躍層と合体した後、さらに下降し20時頃5m付近で止まっている。7日は曇りがちの天気で日射が弱く午前中から夜中まで4m/s程度の風が吹いている。このため明確な躍層は形成されず、前日の躍層の上に小さな躍層が重なった状態となっている。計算値はこの状況をよく表わしている。8日は晴天で、風は8時にいったんやんだ後3、4m/sの風が吹き、13時以後風が強まり、15時から19時にかけて6~8m/sの風となっている。午前中に1.5m付近に形成された躍層は日射によってその温度差を大きくし、15時頃からの強風とともに下降し、20時頃5m付近で止まっている。計算値は蓄熱過程をよく表わしており、躍層の下降も実測値に比べ下降を開始する時間がやや早い。最終的に停留する深さや時間はほぼ一致している。

以上のように計算結果は躍層の停留、2段の躍層の形成、合体等、現地の日成層の動きを良くシミュレートしている。

## 6. おわりに

本研究では前論文<sup>3)</sup>で導いた連行則をベースに日成層を対象とした混合モデルを開発し、現地観測結果との比較からその妥当性を確認した。

本モデルは、湖の鉛直的な構造しか計算できないという点では鉛直一次元モデルである。しかし、水面の傾き(圧力勾配)および水平流速を含んでいるので、複数のボックスを並べて同様の式を立て、適合条件式を加えれ

ば、湖の三次元的構造を表わす計算モデルに拡張できる可能性をもっている。その意味では、三次元一要素モデルとみることもできる。

なお、本研究は文部省科学研究費(一般(c)、代表:石川忠晴)の補助を受けた。

## 参 考 文 献

- 1) 田中昌宏・石川忠晴: 日成層形成時の吹送流の特性について, 土木学会論文集, No. 405/II-11, pp.63~72, 1989.
- 2) 石川忠晴・田中昌宏・小関昌信: 浅い湖の日成層が水質に及ぼす影響, 土木学会論文集, No. 411/II-12, pp. 247~254, 1989.
- 3) 石川忠晴・田中昌宏: DIM型の連行現象に関する理論的研究, 土木学会論文集, No. 416/II-13, pp.99~108, 1990.
- 4) Price, J.F., Mooers, C.N.K. and Leer, J.C.V.: Observation and simulation of storm-induced mixed-layer deepening, J. Phys. Oceanogr., Vol. 8, pp.582~599, 1978.
- 5) Kato, H. and Phillips, O.M.: On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid, J.F.M., Vol. 37, pp.643~665, 1969.
- 6) Kantha, L.H., Phillips, O.M. and Azad, R.S.: On turbulent entrainment at a stable density interface, J.F.M., Vol. 79, pp.753~768, 1977.
- 7) Spigel, R.H., Imberger, J. and Rayner, K.N.: Modeling the diurnal mixed layer, Limnol. Oceanogr., Vol. 31, pp.533~556, 1986.
- 8) 村岡浩爾・福島武彦: 陸水域の富栄養化に関する総合研究(III)一霞ヶ浦(西浦)の湖流一, 国立公害研究所研究報告, No. 19, 1981.
- 9) 福島武彦: 浅い湖沼の水質変化特性と水質管理方法に関する研究, 東京大学博士論文, 1984.
- 10) Naylor, P.P.: Deepening of the wind-mixed layer, J. Mar. Res., Vol. 33, pp.405~422, 1975.
- 11) 福島武彦・村岡浩爾: 浅い湖におけるセイシュの観測とモデル化, 第25回水理講演会論文集, pp.577~583, 1981.

(1990.6.13・受付)