

集中衝撃荷重を受ける軸対称 Voigt 型粘弹性層体の過渡応力波伝播

TRANSIENT STRESS WAVES IN AN AXISYMMETRICALLY VOIGT-VISCOELASTIC LAYERED SPACE SUBJECTED TO CONCENTRATED NORMAL LOADS

石川清志*・夏目正太郎**

By Kiyoshi ISHIKAWA and Shotaro NATSUME

In this paper, the equations of motion in linear viscoelasticity of Voigt type are directly solved with the boundary-initial conditions, instead of employing the displacement potential theory and the integral transform technique for reducing the time variable. The problem treated is the transient wave propagation in an infinite viscoelastic layer overlaying on a viscoelastic half-space, which is excited by concentrated normal loads at the surface and inside. The solution is obtained by the use of Hankel transform and separation of variables for eigenfunction expansion based on the elastic frequency equations. The displacements and stresses generated by the sudden application of concentrated normal loads are computed. Numerical results show the wave propagation including reflection, refraction and transmission of wave front at the interface as a Love wave.

Keywords : transient wave, viscous damping, Love wave, eigenfunction method

1. まえがき

半無限体の衝撃問題は地震学に関連して重要な問題としてとらえられ、古くから研究されてきた。Lamb¹⁾は半無限弾性体の表面、あるいは内部の一点に作用する集中衝撃荷重に対して、空間の1変数と時間変数に関して複素指数関数表示と重ね合わせの原理を適用して波動方程式を解き、その内部に生じる擾乱について論じた。Lambの解およびそれを拡張した解はいく人かの研究者によって展開してきた²⁾。しかしながら、解は、2重無限積分による表示となり、無限遠の境界条件を満足させるには多価関数の適当な分枝を選ぶことが必要となり、この積分は直接積分することも、あるいは数値積分することもきわめて困難な解析となる。Lambは線積分法を用いた。

Cagniard³⁾は Lamb の問題に対して、時間変数消去に Laplace 変換を導入して解析した。後に、de Hoop⁴⁾が改良してから、衝撃問題には Laplace 変換による解析が一般となり多用されるに至った。Pekeris ら⁵⁾は半無限体の表面変位を、渋谷ら⁶⁾は内部の変位、応力を

Hankel-Laplace 変換を用いてその過渡伝播特性を明らかにした。

一方、無限厚板、あるいは層の問題に対して、Miklowitz⁷⁾は剛体滑潤面上の層について、Hankel-Laplace 変換を導入し、載荷点から離れた点に対する擾乱を論じた。Viano ら⁸⁾は剛体滑潤面上の2層問題について、Fourier-Laplace 変換を導入し、載荷点近傍、および離遠点に対する過渡伝播特性を論じた。これらはいずれも空間の1変数と時間変数に対する2重積分変換となり、式形は比較的簡潔に表わされるものの、逆変換の積分がきわめて複雑になる。

この種の動的問題には、多くの場合、連立偏微分方程式で表わされた運動方程式（Navier の式）を直接解くことなく、Helmholtz の定理による変位ポテンシャルを導入することによって、波動方程式を解く問題に置き換えて行われている。この場合、波動方程式そのものは非連立性の独立した式形で扱いやすくなる。そのようにポテンシャル理論は、連立性を消去するのに有効であるが、理論の数学的基本思想、概念が難しいと思われる⁹⁾。また、変位ポテンシャルは、Navier の式のみに限定して適用されるもので、他の運動方程式、たとえば、曲げたわみとせん断回転角が連成する Timoshenko はり問題のような異なる物理成分と連立する場合には適用されな

* 正会員 信州大学技官 工学部社会開発工学科
(〒380 長野市若里500)

** 正会員 信州大学教授 工学部社会開発工学科（同上）

い。

本研究の目的は、連立偏微分方程式で表わされる三次元軸対称 Voigt 型粘弹性体の運動方程式が、ポテンシャル理論や時間変数消去の積分変換を用いて、境界条件、および初期条件のもとで直接的に解かれる一解析法を半無限体上の層問題に適用し、数値計算により、集中衝撃荷重を受ける過渡応力波伝播の特性を明らかにする。解析の特徴は、円柱座標に依存する Hankel 変換と、粘弹性体動的問題、すなわち、運動方程式に時間の 1 階微分演算子が含まれた場合に有用と思われる Stokes 法^{10),11)}による固有関数展開(変数分離)を適用することにより、運動方程式が空間と時間の微分方程式に分離された式形で展開され、それぞれ境界条件、初期条件で直接的に解かれる。衝撃問題に固有関数展開を適用した解析は Lee ら¹²⁾の矩形厚板、小林ら¹³⁾の円形厚板の研究にみられる。これらの変位解は、運動方程式の同次解、すなわち自由振動の固有関数と、衝撃荷重に依存する特解、いわゆる静的解との重ね合わせによって表示されている。

2. 運動方程式および境界条件、初期条件

Voigt の定義に従えば、粘弹性体の運動方程式は弹性体の運動方程式における Lamé 定数 (λ, μ) をそれぞれ入 $\rightarrow (\lambda + \lambda' \partial / \partial t)$, $\mu \rightarrow (\mu + \mu' \partial / \partial t)$ の演算子で置き換えたものに相当する²⁾。ここで、 λ' , μ' は粘性係数、 t は時間である。問題を簡単化するために、次の関係

$$\lambda/\mu = \lambda'/\mu' \dots (1)$$

を仮定¹¹⁾すれば、粘弹性体の運動方程式は簡潔な式形で表わされる。

$$\mu \left(1 + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) [\nabla^2 \mathbf{u} + (1+b) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}] = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \dots (2)$$

ここで、

$$\epsilon = \lambda'/\lambda = \mu'/\mu, \quad b = \lambda/\mu \quad (1 < b) \dots (3)$$

\mathbf{u} は変位ベクトル、 ∇^2 は Laplace 演算子、 ρ は質量である。また、 ϵ は粘性係数とみることもできる。ただし、式 (2) は物体力を無視したものである。なお、式 (1) は体積膨張率の速度係数と、直ひずみおよびせん断ひずみの速度係数を等しいと仮定したもので、主に直応力成分がこの仮定による制約を受ける。また、波動理論からみれば、三次元体波動方程式における変容波の粘性係数と、他のせん断波の粘性係数を等しいと仮定したものに相当する。

系は三次元軸対称体とし、図-1 に示すような、 θ に依存せず一定な円柱座標 (r, θ, z) による半無限体上の 1 層体とする。ここで、 h は層厚である。 $P_2(t)$ は自由境界面 ($z=-h$) に、 $P_1(t)$ は層と半無限体の接触境界面 ($z=0$) に、 $P_0(t)$ は半無限体内部 $z=H$ 面にいずれ

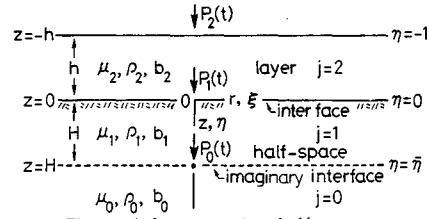


Fig. 1 A layer overing half-space.

も $r=0$ 点に負荷された集中直荷重である。ここでは、 $P_0(t)$ が作用する $z=H$ 面を便宜仮想境界とする。この仮定により、系は半無限体 ($j=0$) 上の 2 層体 ($j=1, 2$) とみることもできる。ただし、 $j=0$ と $j=1$ の Lamé 定数等は等しい $\mu_0 = \mu_1$, $b_0 = b_1$, $\rho_0 = \rho_1$ とする。 j は層番号で次の領域をとる。

$$\begin{aligned} j=2 : -h < z < 0, \quad j=1 : 0 < z < H, \\ j=0 : H < z < \infty, \quad 0 < r < \infty \end{aligned} \dots (4)$$

次の無次元座標、および無次元時間

$$\xi = r/h, \quad \eta = z/h, \quad \tau = c_{s2} t/h \quad (c_{s2} = [\mu_2/\rho_2]^{1/2}) \dots (5)$$

を導入すれば、式 (2) の運動方程式は j に対して次のように表わされる。

$$\begin{aligned} V_{sj}^2 \left(1 + \zeta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\nabla^2 u_{rj} - \frac{u_{rj}}{\xi^2} + (1+b_j) \frac{\partial e_j}{\partial \xi} \right] &= \frac{\partial^2 u_{rj}}{\partial \tau^2} \\ V_{sj}^2 \left(1 + \zeta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\nabla^2 u_{zj} + (1+b_j) \frac{\partial e_j}{\partial \eta} \right] &= \frac{\partial^2 u_{zj}}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad j=0, 1, 2 \dots (6)$$

ここで、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad e_j = \frac{\partial u_{rj}}{\partial \xi} + \frac{u_{rj}}{\xi} + \frac{\partial u_{zj}}{\partial \eta} \dots (7)$$

$u_{rj} = u_{rj}(\xi, \eta, \tau)$, $u_{zj} = u_{zj}(\xi, \eta, \tau)$ は ξ , η (あるいは r , z) 方向の変位、 $\zeta = \epsilon \cdot c_{s2}/h$, $c_{sj} = [\mu_j/\rho_j]^{1/2}$ は j 層の横波伝播速度、 $V_{sj} = c_{sj}/c_{s2}$ は無次元横波伝播速度である。 μ_j , b_j , ρ_j は j によって異なるとしたが、式 (3) の ϵ も j によって一般に異なるとすべきだが、ここでは ϵ が j に依存せず一定とする。すなわち、 ϵ (あるいは ζ) は系全体に対する粘性係数とする。

応力成分は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rrj} &= \frac{\mu_j}{h} \left(1 + \zeta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(b_j e_j + 2 \frac{\partial u_{rj}}{\partial \xi} \right) \\ \sigma_{\theta\theta j} &= \frac{\mu_j}{h} \left(1 + \zeta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(b_j e_j + 2 \frac{u_{rj}}{\xi} \right) \\ \sigma_{zzj} &= \frac{\mu_j}{h} \left(1 + \zeta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(b_j e_j + 2 \frac{\partial u_{zj}}{\partial \eta} \right) \\ \sigma_{zrj} &= \frac{\mu_j}{h} \left(1 + \zeta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial u_{zj}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{rj}}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

式 (4) は無次元量で表わすと、次のようになる。

$$\begin{aligned} j=2 : -1 < \eta < 0, \quad j=1 : 0 < \eta < \bar{\eta}, \\ j=0 : \bar{\eta} < \eta < \infty, \quad 0 < \xi < \infty \end{aligned} \dots (9)$$

ただし、 $\bar{\eta} = H/h$ である。

系の境界条件は次のように与えられる。

$$\xi \rightarrow 0 : u_{rj} \rightarrow 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi \rightarrow \infty : u_{rj}, u_{zj}, \frac{\partial u_{rj}}{\partial \xi}, \frac{\partial u_{zj}}{\partial \xi}, \frac{\partial u_{rj}}{\partial \eta}, \frac{\partial u_{zj}}{\partial \eta} \rightarrow 0 \\ \dots \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta = -1 : \sigma_{zzz} = -p_2(\xi, \tau), \quad \sigma_{zrz} = 0 \\ \eta \rightarrow \infty : u_{r0}, u_{z0}, \sigma_{zrz}, \sigma_{zro}, \dots \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

式 (10) の第 2 式は $\xi \rightarrow \infty$ で変位、応力がゼロとなる。そして、層と半無限体の接続境界面 $\eta = 0$ 、および仮想境界面 $\eta = \bar{\eta}$ における変位適合および応力平衡条件から、境界面における連続条件は次のように表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0 : u_{rz} = u_{r1}, \quad u_{zz} = u_{z1}, \\ \sigma_{zzz} = \sigma_{zz1} + p_1(\xi, \tau), \quad \sigma_{zrz} = \sigma_{zr1} \\ \eta = \bar{\eta} : u_{r1} = u_{r0}, \quad u_{z1} = u_{z0}, \\ \sigma_{zzi} = \sigma_{zzo} + p_0(\xi, \tau), \quad \sigma_{zri} = \sigma_{zro} \end{array} \right\} \quad (12)$$

なお、上式に現われた $p_j(\xi, \tau)$ ($j=0, 1, 2$) は分布直荷重である。

初期条件は系が静止とすれば次式で与えられる。

$$\tau = 0 : u_{rj} = u_{zj} = 0, \quad \frac{\partial u_{rj}}{\partial \tau} = \frac{\partial u_{zj}}{\partial \tau} = 0 \quad (13)$$

3. Hankel 変換

関数 $U(\xi)$ の Hankel 変換、およびその逆変換は次のように表わされる。

$$k\tilde{U}(\gamma) = \int_0^\infty \xi U(\xi) J_k(\gamma\xi) d\xi, \quad U(\xi) = \int_0^\infty \gamma_k \tilde{U}(\gamma) J_k(\gamma\xi) d\gamma \quad (14)$$

ここで、 γ は積分演算子、関数 J_k は k 次の第 1 種 Bessel 関数である。式 (10) の条件を考慮して、式 (6) を Hankel 変換すれば、次式が得られる。

$$\left. \begin{array}{l} V_{sj}^2 \left(1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_{rj}}{\partial \eta^2} - \gamma^2 (2 + b_j) \tilde{u}_{rj} \right] \\ - \gamma (1 + b_j) \frac{\partial \tilde{u}_{zj}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_{rj}}{\partial \tau^2} \\ V_{sj}^2 \left(1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[(2 + b_j) \frac{\partial^2 \tilde{u}_{zj}}{\partial \eta^2} - \gamma^2 \tilde{u}_{zj} \right] \\ + \gamma (1 + b_j) \frac{\partial \tilde{u}_{rj}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_{zj}}{\partial \tau^2} \end{array} \right\} \quad (15)$$

ただし、Hankel 変換された変位は ${}_1\tilde{u}_{rj} = {}_1\tilde{u}_{rj}(\eta, \tau)$ 、 ${}_0\tilde{u}_{zj} = {}_0\tilde{u}_{zj}(\eta, \tau)$ を意味する。同様に、式 (11)～(13) を Hankel 変換すれば

$$\left. \begin{array}{l} \eta = -1 : {}_0\tilde{\sigma}_{zzz} = -{}_0\tilde{p}_2(\tau), \quad {}_1\tilde{\sigma}_{zrz} = 0 \\ \eta \rightarrow \infty : {}_1\tilde{u}_{r0}, {}_0\tilde{u}_{z0}, {}_0\tilde{\sigma}_{zrz}, {}_1\tilde{\sigma}_{zro}, \dots \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0 : {}_1\tilde{u}_{rz} = {}_1\tilde{u}_{r1}, \quad {}_0\tilde{u}_{zz} = {}_0\tilde{u}_{z1}, \\ {}_0\tilde{\sigma}_{zzz} = {}_0\tilde{\sigma}_{zzi} + {}_0\tilde{p}_1(\tau), \quad {}_1\tilde{\sigma}_{zrz} = {}_1\tilde{\sigma}_{zr1} \\ \eta = \bar{\eta} : {}_1\tilde{u}_{r1} = {}_1\tilde{u}_{r0}, \quad {}_0\tilde{u}_{z1} = {}_0\tilde{u}_{z0}, \\ {}_0\tilde{\sigma}_{zzi} = {}_0\tilde{\sigma}_{zzo} + {}_0\tilde{p}_0(\tau), \quad {}_1\tilde{\sigma}_{zri} = {}_1\tilde{\sigma}_{zro} \end{array} \right\} \quad (17)$$

$$\tau = 0 : \left[\begin{array}{c} {}_1\tilde{u}_{rj} \\ {}_0\tilde{u}_{zj} \end{array} \right]_j = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\begin{array}{c} {}_1\tilde{u}_{rj} \\ {}_0\tilde{u}_{zj} \end{array} \right]_j = 0 \quad (18)$$

なお、上式に現われた Hankel 変換された応力 ${}_0\tilde{\sigma}_{zzz}$ 、 ${}_1\tilde{\sigma}_{zrz}$ は式 (8) から次式のものである。

$$\left. \begin{array}{l} {}_0\tilde{\sigma}_{zzz} = \frac{\mu_j}{h} \left(1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[(2 + b_j) \frac{\partial \tilde{u}_{zj}}{\partial \eta} + \gamma b_j {}_1\tilde{u}_{rj} \right] \\ {}_1\tilde{\sigma}_{zrz} = \frac{\mu_j}{h} \left(1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_{rj}}{\partial \eta} - \gamma {}_0\tilde{u}_{zj} \right) \end{array} \right\} \quad (19)$$

さて、 $\xi = 0$ で集中荷重となるためには、分布荷重 $p(\xi, \tau)$ の円形作用領域の半径を無限小にすれば良いことになり、集中荷重 $P_j(\tau)$ に対する Hankel 変換 ${}_0\tilde{p}_j(\tau)$ は次のように表わされる。

$${}_0\tilde{p}_j(\tau) = P_j(\tau)/2\pi \quad (20)$$

4. 固有関数展開

式 (15) の連立偏微分方程式を式 (16)～(18) の条件で解くにあたり、解の時間項に指數関数 ${}_1\tilde{u}_{rj} = \phi_{mj}(\eta) \exp(i\omega_m \tau)$ 、 ${}_0\tilde{u}_{zj} = \psi_{mj}(\eta) \exp(i\omega_m \tau)$ をもととして変数分離すれば、式 (15) の運動方程式には時間の 1 階微分演算子が含まれることにより、 ϕ_{mj} 、 ψ_{mj} は複素関数²¹となる。これらの関数を式 (16)、(17) の条件で決定するには複素根 ω_m を求めなければならない、この結果、解析、ならびに数値計算がきわめて煩雑になる。そこで、複素解析を避けるために、 ${}_1\tilde{u}_{rj}$ 、 ${}_0\tilde{u}_{zj}$ は次の級数で表わされると仮定する。

$$\left[\begin{array}{c} {}_1\tilde{u}_{rj} \\ {}_0\tilde{u}_{zj} \end{array} \right]_j = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left[\begin{array}{c} \phi_m(\eta) \\ \psi_m(\eta) \end{array} \right]_j \quad (21)$$

ここで、 A_m は、 ${}_1\tilde{u}_{rj}$ 、 ${}_0\tilde{u}_{zj}$ に共通な時間の任意関数 $A_m = A_m(\tau)$ であり、 j に依存しないものである。関数 ϕ_{mj} 、 ψ_{mj} は次の常微分方程式を満足するものとする。

$$\left. \begin{array}{l} V_{sj}^2 \left[\phi''_{mj} - \gamma^2 (2 + b_j) \phi_{mj} - \gamma (1 + b_j) \phi'_{mj} \right] = -\omega_m^2 \phi_{mj} \\ V_{sj}^2 \left[(2 + b_j) \psi''_{mj} - \gamma^2 \psi_{mj} + \gamma (1 + b_j) \psi'_{mj} \right] = -\omega_m^2 \psi_{mj} \end{array} \right\} \quad (22)$$

ただし、 ω_m は任意定数、プライムは η について微分を表す。Stokes 法^{10, 11}では、空間の座標関数に、弾性体の自由振動に現われる正規関数 (normal function) を適用することになり、この結果、式 (22) を与えることになる。すなわち、式 (22) は、式 (15) において、 $\xi \rightarrow 0$ とおき、 ${}_1\tilde{u}_{rj} = \phi_{mj}(\eta) \exp(i\omega_m \tau)$ 、 ${}_0\tilde{u}_{zj} = \psi_{mj}(\eta) \exp(i\omega_m \tau)$ と変数分離した場合に得られるもので、弾性体の自由振動方程式と等価である。したがって、 ω_m は弾性体の円振動数とみることもできる。

式 (21) を式 (19) に代入すれば応力は

$$\left[\begin{array}{c} {}_0\tilde{\sigma}_{zzz} \\ {}_1\tilde{\sigma}_{zrz} \end{array} \right]_j = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + \xi \dot{A}_m) \left[\begin{array}{c} \Psi_m(\eta) \\ \Phi_m(\eta) \end{array} \right]_j \quad (23)$$

ここで、ドットは τ について微分を意味する。関数

Galerkin ベクトルの波動方程式⁹⁾と同じ内容を表わす。これらの解、たとえば $\square_1 \square_2 \chi = 0$ の解 χ は、 $\square_1 \chi_1 = 0$, $\square_2 \chi_2 = 0$ を満足する解の和 $\chi = \chi_1 + \chi_2$ で表わされるということから、たとえば、 $\gamma > \omega_m / V_{Sj}$ の場合、 ϕ_{mj} , ψ_{mj} は

$$\begin{aligned} \phi_{mj} &= [e^{\alpha_m \eta} e^{-\alpha_m \eta} e^{\beta_m \eta} e^{-\beta_m \eta}]_j N_{mj} \\ \psi_{mj} &= [e^{\alpha_m \eta} e^{-\alpha_m \eta} e^{\beta_m \eta} e^{-\beta_m \eta}]_j N'_{mj} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(41)$$

ここで、

$$\alpha_{mj} = [\gamma^2 - \omega_m^2 / V_{Lj}^2]^{1/2}, \quad \beta_{mj} = [\gamma^2 - \omega_m^2 / V_{Sj}^2]^{1/2} \quad \dots\dots\dots(42)$$

記号 $[\dots]$ は行マトリックスを表わし、 N_{mj} , N'_{mj} はそれぞれ 4×1 の列マトリックスで表わされる積分定数である。式 (41) を式 (22) の第 1 式に代入すると、 N_{mj} と N'_{mj} の関係が得られる。すなわち、次式の結果が得られる。

$$N'_{mj} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{mj}}{\gamma} \\ \frac{\alpha_{mj}}{\gamma} \\ -\frac{\gamma}{\beta_{mj}} \\ \frac{\gamma}{\beta_{mj}} \end{bmatrix} N_{mj} \quad \dots\dots\dots(43)$$

この関係は式 (41) を式 (22) の第 2 式に代入しても同じ結果が得られる。式 (43) を式 (41) の第 2 式に代入し、 ϕ_{mj} , ψ_{mj} を整理してまとめて表わせば

$$\begin{bmatrix} \phi_m \\ \psi_m \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \gamma e^{\alpha_m \eta} & \gamma e^{-\alpha_m \eta} \\ -\alpha_m e^{\alpha_m \eta} & \alpha_m e^{-\alpha_m \eta} \\ -\beta_m e^{\beta_m \eta} & \beta_m e^{-\beta_m \eta} \\ \gamma e^{\beta_m \eta} & \gamma e^{-\beta_m \eta} \end{bmatrix}_j N_{mj} \quad \dots\dots\dots(44)$$

式 (44) は式 (22) の一般解である。この一般解は、Miklowitz⁷⁾ が波動方程式に対し Hankel-Laplace 変換を行い、変位ポテンシャルの微分によって得られる変位関数と同じ内容を表わすものである。 $j=0$ の半無限体では、 $\eta \rightarrow \infty$ で変位、応力がゼロとなるような次の解を探ることにすれば、式 (25) の第 2 式が満足されることが明らかである。

$$\begin{bmatrix} \phi_m \\ \psi_m \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \gamma e^{-\alpha_m \eta} & \beta_m e^{-\beta_m \eta} \\ \alpha_m e^{-\alpha_m \eta} & \gamma e^{-\beta_m \eta} \end{bmatrix}_0 N_{m0} \quad \dots\dots\dots(45)$$

ここで、 N_{m0} は 2×1 の積分定数となる。また、 $j=2$ では、式 (44) の代わりに、これと等価な次の関数形の解を与えると都合良い。

$$\begin{bmatrix} \phi_m \\ \psi_m \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \gamma \cosh \alpha_m \eta & \gamma \sinh \alpha_m \eta \\ -\alpha_m \sinh \alpha_m \eta & -\alpha_m \cosh \alpha_m \eta \\ -\beta_m \cosh \beta_m \eta & -\beta_m \sinh \beta_m \eta \\ \gamma \sinh \beta_m \eta & \gamma \cosh \beta_m \eta \end{bmatrix}_2 N_{m2} \quad \dots\dots\dots(46)$$

すなわち、これは $\gamma > \omega_m / V_{Sj}$ 以外の場合に都合良く対応できるからである。式 (24) を考慮して、式 (26) の条件から次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} N_{m2} &= \frac{1}{\gamma^2 - \beta_{m2}^2} \begin{bmatrix} A & D\gamma\beta_{m1} \\ B\alpha_{m1}/\alpha_{m2} & C\gamma/\alpha_{m2} \\ C\gamma/\beta_{m2} & B\beta_{m1}/\beta_{m2} \\ D\gamma\alpha_{m1} & A \end{bmatrix} N_{m0}, \\ N_{m1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} N_{m0} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(47)$$

すなわち、 N_{m2} , N_{m1} はすべて N_{m0} に従属して表わされることになる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} A &= 2 \gamma^2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} (\gamma^2 + \beta_{m1}^2), & B &= \gamma^2 + \beta_{m2}^2 - 2 \gamma^2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \\ C &= \gamma^2 + \beta_{m2}^2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} (\gamma^2 + \beta_{m1}^2), & D &= 2 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(48)$$

ただし、式 (47) の第 2 式では $\mu_0 = \mu_1$, $\alpha_{m0} = \alpha_{m1}$, $\beta_{m0} = \beta_{m1}$ とした。また、式 (47) の第 2 式の結果から、 ϕ_{m1} , ψ_{m1} は式 (45) と同じ式形となる。以後 $j=0$ は省略し、半無限体はすべて $j=1$ で代表させる。式 (24), (46), および式 (47) の第 1 式によって、式 (25) の第 1 式の条件から、次の方程式が誘導される。

$$\begin{bmatrix} K_1 & \gamma K_2 \\ \gamma K_3 & K_4 \end{bmatrix} N_{m0} = 0 \quad \dots\dots\dots(49)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= (\gamma^2 + \beta_{m2}^2) \left(A - B \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{m2}} \tanh \alpha_{m2} \right) \\ &\quad - 2 \gamma^2 \frac{\cosh \beta_{m2}}{\cosh \alpha_{m2}} (\bar{C} - D \alpha_{m1} \beta_{m2} \tanh \beta_{m2}) \\ K_2 &= 2 \frac{\cosh \beta_{m2}}{\cosh \alpha_{m2}} (A \beta_{m2} \tanh \beta_{m2} - B \beta_{m1}) \\ &\quad - (\gamma^2 + \beta_{m2}^2) \left(\frac{C}{\alpha_{m2}} \tanh \alpha_{m2} - D \beta_{m1} \right) \\ K_3 &= 2 (A \alpha_{m2} \tanh \alpha_{m2} - B \alpha_{m1}) \\ &\quad - (\gamma^2 + \beta_{m2}^2) \frac{\cosh \beta_{m2}}{\cosh \alpha_{m2}} \left(\frac{C}{\beta_{m2}} \tanh \beta_{m2} - D \alpha_{m1} \right) \\ K_4 &= (\gamma^2 + \beta_{m2}^2) \frac{\cosh \beta_{m2}}{\cosh \alpha_{m2}} \left(A - B \frac{\beta_{m1}}{\beta_{m2}} \tanh \beta_{m2} \right) \\ &\quad - 2 \gamma^2 (C - D \beta_{m1} \alpha_{m2} \tanh \alpha_{m2}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(50)$$

式 (49)において、 $N_{m0} \neq 0$ であるならば、この係数マトリックスの行列式がゼロとなるべきである。すなわち、次式の方程式が得られる。

$$K_1 K_4 - \gamma^2 K_2 K_3 = 0 \quad \dots\dots\dots(51)$$

この結果を利用すれば、式 (49) は N_{m0} を次式と置く

ことにより満足される。

N_{mo} が決定されたことにより、 ϕ_{mj} , ψ_{mj} は式 (44)～(47) によってすべて定義され、変位、応力は式 (21), (23) によって得られる。

6. Hankel 逆変換

式(14)の第2式より、 ${}_1\tilde{u}_{rzj}$, ${}_0\tilde{u}_{zzi}$ および ${}_0\tilde{\sigma}_{zzj}$, ${}_1\tilde{\sigma}_{zrj}$ の Hankel 逆変換は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u_{rj} &= \int_0^\infty \gamma \cdot {}_1\tilde{u}_{rj} \cdot J_1(\gamma\xi) d\gamma \\ u_{zj} &= \int_0^\infty \gamma \cdot {}_0\tilde{u}_{zj} \cdot J_0(\gamma\xi) d\gamma \\ \sigma_{zj} &= \frac{\mu_j}{h} \left(1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \int_0^\infty \gamma \left[(2 + b_j) \frac{\partial_0 \tilde{u}_{zj}}{\partial \eta} \right. \\ &\quad \left. + y b_j \cdot {}_1\tilde{u}_{rj} \right] J_0(\gamma\xi) d\gamma \\ \sigma_{rzj} &= \frac{\mu_j}{h} \left(1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \int_0^\infty \gamma \left[\frac{\partial_1 \tilde{u}_{rj}}{\partial \eta} - \gamma \cdot {}_0\tilde{u}_{zj} \right] J_1(\gamma\xi) d\gamma \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

上記以外の応力は直接的な Hankel 逆変換で表わすことができず、工夫¹⁵⁾を要するが、 σ_{rrj} , $\sigma_{\theta\theta j}$ の Hankel 逆変換は次のように表わされる。

$$\sigma_{rrj} = \frac{\mu_j}{h} \left(1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \int_0^\infty \gamma \left\{ \left[b_j \left[\frac{\partial_0 \tilde{u}_{rz}}{\partial \eta} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \gamma (2 + b_j)_h \tilde{u}_{rj} \right] J_0(\gamma \xi) - 2 \frac{\tilde{u}_{rj}}{\xi} J_1(\gamma \xi) \right] d\gamma, \right. \\ \left. \sigma_{\theta\theta j} = \frac{\mu_j}{h} \left(1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \int_0^\infty \gamma \left\{ b_j \left[\frac{\partial_0 \tilde{u}_{zj}}{\partial \eta} + \gamma_1 \tilde{u}_{rj} \right] J_0(\gamma \xi) \right. \\ \left. + 2 \frac{\tilde{u}_{rj}}{\xi} J_1(\gamma \xi) \right\} d\gamma \right\} \quad (54)$$

7. 数值計算

式(53), (54)におけるHankel逆変換の積分を直接解析積分することはきわめて困難である。なぜなら式(51)の根 ω_m は、半無限弾性体Rayleigh波のように γ に依存せず一定値とならず、Love波特有な分散性をもつからである。すなわち、式(51)の根 ω_m は γ の関数 $\omega_m(\gamma)$ として表わされるからである。しかし、Hankel逆変換の積分は数値積分を用いて行うとすれば、解は比較的簡単に求まる。すなわち、数値積分の分割ステップに合わせた γ をとれば、これに対する式(51)を満足する根 ω_m を求めることができる。この根 ω_m は $V_{S2} < V_{S1}$ ($V_{S2}=1$) の場合に現われるもので、 ω_m が存在し得る範囲は $0 < \omega_m/\gamma < V_{S1}$ となる。

図-2～図-4 は次の値

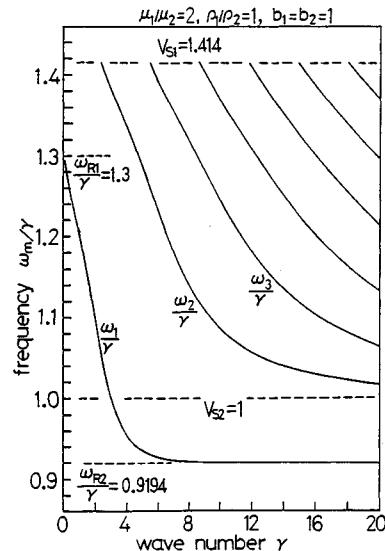


Fig. 2 Frequency spectrum for the case $\mu_1/\mu_2=2$, $\rho_1/\rho_2=1$, and $b_1=b_2=1$.

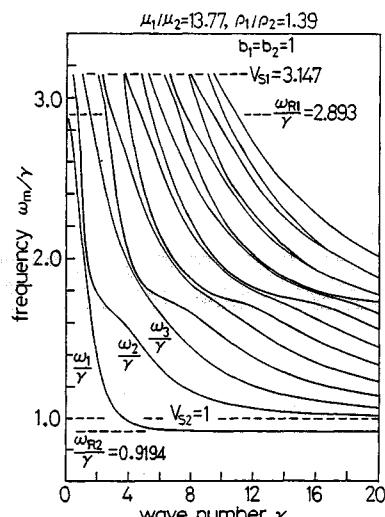


Fig. 3 Frequency spectrum for the case $\mu_1/\mu_2=13.77$, $\rho_1/\rho_2=1.39$ and $b=b_*=1$

- (a) $\mu_1/\mu_2=2$, $\rho_1/\rho_2=1$, $b_1=b_2=1$,
 $V_{s1}=1.414$

(b) $\mu_1/\mu_2=13.77$, $\rho_1/\rho_2=1.39$, $b_1=b_2=1$,
 $V_{s1}=3.147$

(c) $\mu_1/\mu_2=100$, $\rho_1/\rho_2=2$, $b_1=b_2=1$,
 $V_{s1}=7.071$

.....(55)

を採用した場合の振動数スペクトル, すなわち, γ に依存した式 (51) の根 ω_m/γ を表わした位相速度曲線である. ここで, (a) は層体と半無限体の剛性率比が低く,

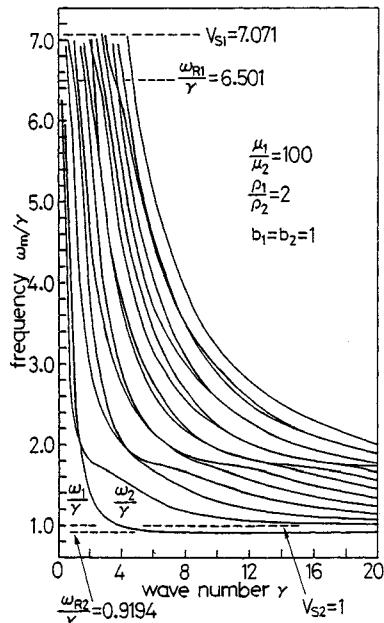


Fig. 4 Frequency spectrum for the case $\mu_1/\mu_2=100$, $\rho_1/\rho_2=2$, and $b_1=b_2=1$.

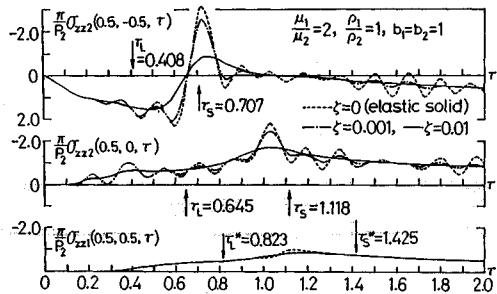


Fig. 5 Variation of normal stresses $\sigma_{zzj}(\xi, \eta, \tau)$ with time for the case $\mu_1/\mu_2=2$, $\rho_1/\rho_2=1$, and $b_1=b_2=1$.

(c) は比較的高いことを示す。 $b_1 = b_2 = 1$ とした場合、Rayleigh 波の伝播速度は $\omega_{R1}/\gamma = 0.9194 V_{S1}$ となる。1 次モードの振動数 ω_1/γ は $\omega_{R1}/\gamma = 0.9194 V_{S1}$ 付近から現われ、 γ の漸増に従って $\omega_{R2}/\gamma = 0.9194$ に漸近する。2 次以上の高次振動数は V_{S1} から現われ、 $V_{S2} = 1$ に漸近する形態を示す。(b) は Tolstoy ら²⁾が用いたデータであり、図-3 の振動数スペクトルは Tolstoy らの結果 ($m = 1 \sim 4$ 次) と一致するものである。

図-5～図-9 は静止状態の層体表面の原点 ($\xi=0$, $\eta=-1$) のみにステップ型衝撃荷重

$$P_2(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau = 0 \\ P_2 & 0 < \tau \end{cases}, \quad P_0(\tau) = P_1(\tau) = 0 \dots \dots \dots (56)$$

が負荷された場合、時間変化に対する直応力、および、変位の応答を示したものである。なお、 P_2 は集中荷重

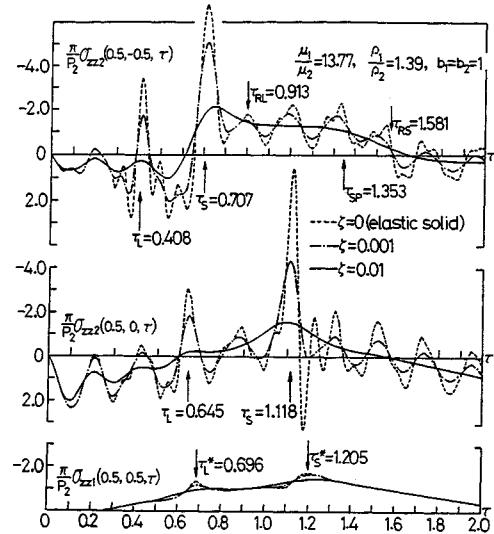


Fig. 6 Variation of normal stresses $\sigma_{zz}(\xi, \eta, \tau)$ with time for the case $\mu_1/\mu_2=13.77$, $\rho_1/\rho_2=1.39$, and $b_1=b_2=1$.

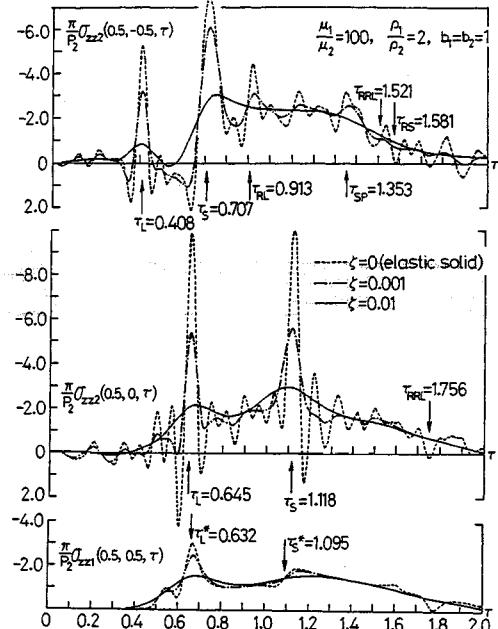


Fig. 7 Variation of normal stresses $\sigma_{zz}(\xi, \eta, \tau)$ with time for the case $\mu_1/\mu_2=100$, $\rho_1/\rho_2=2$, and $b_1=b_2=1$.

の大きさである。

図-5～図-7は式(55)のデータに対する、3点($\xi=0.5$, $\eta=-0.5$), ($\xi=0.5$, $\eta=0$), ($\xi=0.5$, $\eta=0.5$)に注目した直応力 $\sigma_{zz}(\xi, \eta, \tau)$ の応答である。ここで、 τ_L は載荷点から発生した先行縦波の波面が直接注目点に到達した時刻、 τ_S は後行横波の直接到達時刻、 τ_{RL} , τ_{RS} は層体内を伝播してきた縦波、横波がそれぞれ接続

境界面で反射され、反射縦波、横波として注目点に到達した時刻、 τ_{SP} は載荷点から発生した横波が伝播し接続境界面で反射縦波に変わって到達した時刻で、いわゆる SP 波の回折到達時刻である。また、 τ_{RRL} は伝播縦波がまず接続境界面で反射され、続いて層体表面でも反射されて注目点に到達した時刻である。さらに、 τ_L^* 、 τ_S^* は層体内を伝播してきた縦波、横波がそれぞれ接続境界面を透過し、屈折縦波、横波として半無限体の注目点に到達した時刻である。なお、式(55)のすべてのデータに対して、層体($j=2$)の無次元縦波伝播速度は $V_{L2} = \sqrt{3}$ 、横波伝播速度は $V_{S2}=1$ である。また、反射波の到達時刻 τ_{SP} 、あるいは屈折波の到達時刻 τ_L^* 、 τ_S^* には光学における Snell の法則を適用し、その伝播経路より求めた。すなわち、載荷点と、接続境界面における反射点あるいは屈折点、および注目点の関係から得られる方向余弦と、層体と半無限体の縦波、横波の伝播速度から、反射点あるいは屈折点を根とした固有値方程式が誘導され、その最小根による経路から算出した。この場合、 τ_{SP} の反射点は $\xi=0.259$ 、また、 τ_L^* 、 τ_S^* の屈折点は、(a) のデータでは $\xi=0.288$ 、(b) では $\xi=0.176$ 、(c) では $\xi=0.090$ となり、層体と半無限体の剛性率比 (μ_1/μ_2) が高くなるに従って $\xi=0$ 点に近づき、接続境界面への入射角が大きく、屈折角が小さくなる。

静止の層体表面に集中荷重が衝撃的に負荷されると、まず、載荷点を中心とした半円球状の波面をもつ先行縦波が誘起発生し放射状に層体内を伝播する。続いて後行横波が誘発され伝播する。載荷点から離れた注目点では先行縦波の波面が到達して初めて応答することになる。しかし、層体と半無限体の剛性率比 (μ_1/μ_2) が低い図-5 では、 τ_L 時刻以前からすでに応答しており、また、 τ_L 付近でも応力の立ち上がりが現われず、 τ_S 付近に至って応力波頭が現われるものの全体的に緩慢な応答となり、典型的な過渡応力波伝播特性がみられない。図-6 でも τ_L 以前から応答してしまうが、 τ_S 付近はむろん、 τ_L 付近でも応力の誘発がみられ、波頭が現われる。一方、 $\mu_1/\mu_2=100$ とした図-7 では、 τ_L 以前から応答しているものの、その振幅は τ_L あるいは τ_S 付近の立ち上がった振幅と比較してきわめて小さく、したがって、 τ_L 以前は静止状態を表わしているとみて差し支えないであろう。この応答形態は、静止の状態から τ_L 付近で急激に応力の誘発が起こり鋭い波頭となって現われ、続いて τ_S 付近でも波頭が現われる。また、 τ_{RL} 、 τ_{SP} 、 τ_{RRL} 、 τ_{RS} 附近、さらに、 τ_L^* 、 τ_S^* 付近に至っても波頭がより鮮明に現われることになり、応力波の伝播、反射、半無限体への透過屈折現象を顕著に表わすことになり、図-5 の応答と際立った相違をみせ、典型的な層体の過渡応力波伝播特性を表わす。

剛性率比が低い図-5 の場合は、Love 波の特性が顕著に現われず、むしろ Layleigh 波的な特性が載荷点近傍の注目点に現われたことによるもので、 τ_L 以前で静止を表現することなく応答が現われてしまう。これは、図-2 が示すように、振動数は層体の縦波伝播速度 ($V_{L2} = \sqrt{3}$) より小さく、このため、 τ_L 付近で応答の卓越が生じ得ない。また、振動数の現われる範囲は $0.9194 < \omega_m/\gamma < 1.414$ と狭く、しかも γ の変化に対する ω_m/γ の変化特性が緩慢であることにより、一般に γ の積分に対する解の収束性が劣る。さらに、 γ の積分値に対する m の展開次数が制限され、すなわち、 $\gamma=0 \sim 3$ では $m=1$ 次まで、 $\gamma=4$ で $m=1 \sim 2$ 次まで、 $\gamma=40$ に至っても $m=1 \sim 20$ 次程度までしか採用されず、これによって得られる解は m の低次項の値が支配的となり、緩慢な応答形態を表わすことになる。この結果、 τ_L 以前の静止の状態から τ_L 付近で急変する応答の形態を表現できない。

図-7において、 $\zeta=0$ とした弾性体では顕著な過渡応答現象を表わすのに対し、粘性減衰を有する Voigt 体では、弾性体のものと比較して全体に緩慢な応答となり、その振幅は時間経過とともに減衰する様子を表わし、

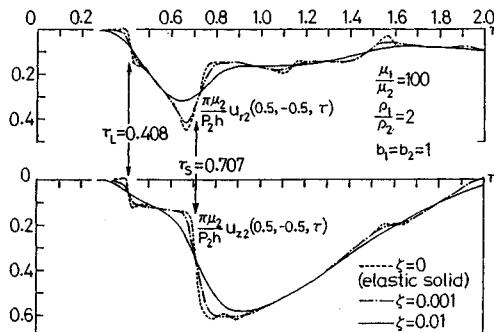


Fig. 8 Variation of radial and normal displacements at $\xi=0.5$, $\eta=-0.5$ with time for the case $\mu_1/\mu_2=100$, $\rho_1/\rho_2=2$, and $b_1=b_2=1$.

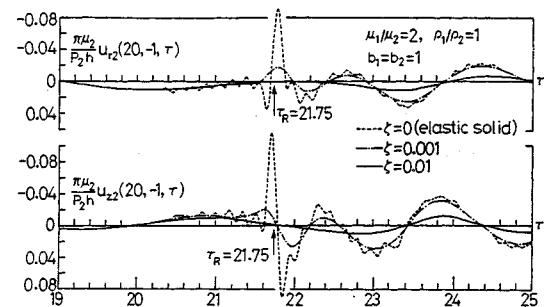


Fig. 9 Variation of radial and normal surface displacements at $\xi=20$, $\eta=-1$ with time for the case $\mu_1/\mu_2=2$, $\rho_1/\rho_2=1$, and $b_1=b_2=1$.

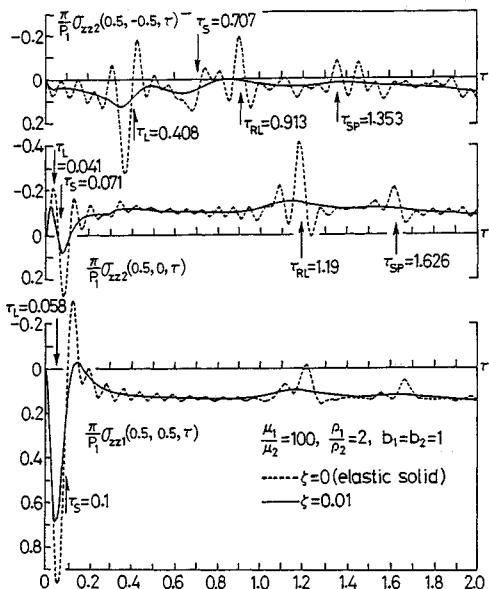


Fig.10 Variation of normal stresses with time for the case $\mu_1/\mu_2=100$, $\rho_1/\rho_2=2$, and $b_1=b_2=1$.

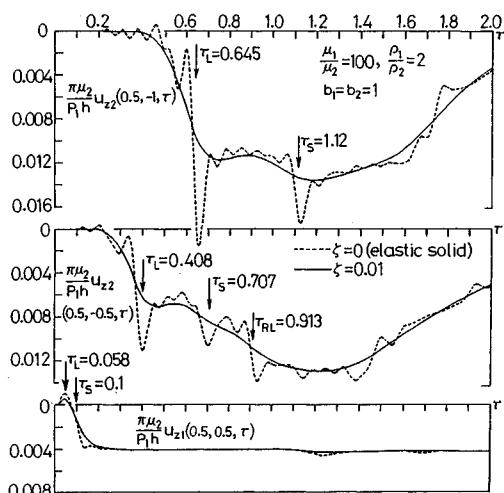


Fig. 11 Variation of normal displacements with time for the case $\mu_1/\mu_2=100$, $\rho_1/\rho_2=2$, and $b_1=b_2=1$.

弾性体の運動のよそ中心を通る形態となる。これは高次振動項が粘性減衰によって影響を受けないことによる。

図-8は(c)のデータに対する層体の中心面($\xi=0.5$, $\eta=-0.5$)での変位挙動を示したものである。静止状態から、先行縦波の到達時刻付近から急激に立ち上がり、横波の到達時刻付近で再び不連続的な急変がみられる。特に弾性体の挙動で顕著に現われる。

図-9 は載荷点から離れた表面点 ($\xi = 20$, $n = 1$)

-1)に注目したときの変位挙動で、Rayleigh波の到達によって引き起こされる擾乱の様相を示したものである。振幅は載荷点近傍の表面変位と比較して小さいが、Rayleigh波の到達によって誘起され、弾性体では顕著な波頭を現わす。ここで、 τ_R はRayleigh波の到達時刻である。ただし、無次元Rayleigh波の伝播速度は $\omega_{R2}/\gamma = 0.9194$ である。

図-10, 図-11 は系内部に集中荷重を負荷させたものの、すなわち、接続境界面の原点 ($\xi=0$, $\eta=0$) にステップ型衝撃荷重

$$P_1(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau = 0 \\ P_1 & 0 < \tau \end{cases}, \quad P_2(\tau) = P_0(\tau) = 0 \dots \dots \dots (57)$$

が負荷された場合の直応力と鉛直変位の過渡挙動を示したものである。なお、 P_1 は集中荷重の大きさである。この場合は、原点から誘発された先行縦波、後行横波の半円球状の波面が、層体内では η の負方向へ、半無限体内では η の正方向へ伝播することになる。ここで τ_{RL} 、 τ_{SP} は層体の表面 ($\eta = -1$) で反射された回折到達時刻である。

上記の数値計算では、Hankel 逆変換の数値積分上限値を $\gamma=40$ 、積分分割ステップを 0.2、固有関数の展開次数を $m=40$ まで採用した。ただし、式(55)の(a)のデータでは $\gamma=40$ で最大 $m=20$ 程度である。弾性体の場合の解が数値積分の上限値、および固有関数の展開次数等に最も影響を受ける。解の収束性を調べるために、式(55)の(c)のデータに対して、数値積分上限値を $\gamma=60$ 、積分分割ステップを 0.2、固有関数の展開次数を $m=60$ としたものと比較して、注目点 ($\xi=0.5$, $\eta=-0.5$) の応力の時間変化の形態はいくらか変化するものの、変位の形態はほぼ収束した結果を得た¹⁶⁾。

8. あとがき

本研究は連立偏微分方程式で表わされる Voigt 体運動方程式を Stokes の方法を適用することによって、境界条件、および初期条件で直接的に解かれる解析法を提示し、数値計算結果から集中衝撃荷重を受ける半無限体上層体の過渡伝播特性を明らかにした。解析法の特徴を要約すると次のとおりである。

(1) 空間の座標関数に正規関数、すなわち、弾性体の自由振動に現われる直交固有関数を導入し運動方程式を展開すれば、時間のみの常微分方程式が誘導され、初期条件で解く Stokes 法は、連続体の Navier の式のみならず、他の多くの動的衝撃問題に現われる運動方程式に適用できる幅のある解析法である。弾性体の自由振動は馴染みやすく、良く知られた関係が利用できる。

(2) 粘弾性体の運動方程式、すなわち時間の1階微分演算子を含む運動方程式に、時間項に対し複素指數関

数 $\exp(i\omega_m \tau)$ を基本解にとれば、 ω_m は固有値方程式の複素根²⁾を探ることになり、解析をきわめて複雑にするが、Stokes 法によれば、すべて実数解析の範囲で問題が比較的簡単に解決される。

(3) 層体と半無限体の剛性率比が低い (a) のデータでは Love 波の特性が顕著に現われず、むしろ Layleigh 波的な特性が載荷点近傍の注目点に現われ、衝撃荷重を受けても顕著な過渡応力波伝播の現象を生じ得ない。一方、剛性率比が高い (c) のデータでは、応力波の伝播、反射、透過屈折現象が現われ、(a) のデータによる応答と際立った相違をみせ、典型的な層体の過渡応力波伝播の様相を表わす。粘性減衰を有する Voigt 体では、弾性体の応答と比較して、全体的に緩慢な応答を示し、弾性体の運動のおよそ中心を通る形態となる。

謝 辞：本研究を遂行するにあたり、多大な助言を賜った早稲田大学理工学部 平嶋政治教授、ならびに当学部 島坦教授に感謝の意を表します。また、本論文を作成するにあたり協力を頂いた当学部大学院生 赤堀裕君に感謝いたします。

参考文献

- 1) Lamb, H. : On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, Phil. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A, 203, pp. 1~42, 1904.
- 2) Ewing, W.M., Jardetzky, W.S. and Press, F. : Elastic Waves in Layered Media, New York, McGraw-Hill Co., 1957.
- 3) Cagniard, L. : Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques Progressives, Paris, Gauthiers-Villars, 1935.
- 4) de Hoop, A. T. : Representation Theorems for the Displacement in an Elastic Solid and Their Application to Elastodynamic Diffraction Theory, Thesis, Technische Hogeschool Te Delft, 1958.
- 5) Pekeris, C. C. and Lifson, H. : Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse, J. Acoustical Soc. America, 29, pp. 1233~1238, 1957.
- 6) 渋谷寿一・中原一郎：表面に集中荷重をうける半無限体、日本機械学会論文集（第 1 部），34-260, pp. 610~618, 1968. 6.
- 7) Miklowitz, J. : Transient compressional waves in an infinite elastic plate or elastic layer overing a rigid half-space, J. of Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 84, pp. 53~60, 1962.
- 8) Viana, D. C. and Miklowitz, J. : Transient wave propagation in a symmetrically layered elastic plate, J. of Appl. Mech., Trans. ASME, pp. 684~690, 1974.
- 9) Fung, Y. C. (大橋義夫ほか共訳)：固体の力学/理論, 培風館, 1970.
- 10) 小平吉男：物理数学（第 2 卷）, 岩波書店, 1933 (復刻版 : 文献社, 1971).
- 11) 西村源六郎：振動工学, 誠文堂新光社, 1969.
- 12) Lee, Y. C. and Reismann, H. : Dynamics of rectangular plates, Int. J. Eng. Sci., Vol. 7, pp. 93~113, 1969.
- 13) 小林治俊ほか：衝撃荷重を受ける弾性厚円盤の解析, 土木学会第 44 回年次学術講演会, I-328, 1989.
- 14) Dolph, C. L. : On the Timoshenko theory of transverse beam vibrations, Quart. Appl. Math., Vol. 12, pp. 175~187, 1954.
- 15) 宮本 博：3 次元弾性論, 豊華房, 1977.
- 16) 石川清志：Voigt 型粘弹性体無限帯板の過渡応力波伝播, 土木学会論文集, 第 380 号 / I-7, pp. 273~281, 1987.

(1990.1.5・受付)