

Transfer Matrix 法による移動荷重を受けた連続ばかりの動的応答解析

TRANSFER MATRIX ANALYSIS OF DYNAMIC RESPONSES OF MULTISPAN BEAM UNDER MOVING LOADS

岩瀬 敏昭*・平島 健一**

By Toshiaki IWASE and Ken-ichi HIRASHIMA

In the present paper, the analytical treatments of dynamic behavior of beams with moving loads are shown by using of transfer matrix method to determine the natural frequencies and mode shapes of the beams and application of the mode superposition technique.

We adopt the analytical theories such as Classical, Timoshenko's and Levinson's theories for the computations of dynamic behavior of simple and multispan beams, in which the latter two theories take into consideration of the shear deformation and rotary inertia of the beams.

The accuracy, dynamic responses and dynamic magnification factors of multispan beams are illustrated through several numerical results by using of the three theories.

Keywords: dynamic responses, multispan beam, transfer matrix method, Classical, Timoshenko's and Levinson's theories

1. 緒 言

従来から、はりの動的問題に関する理論的研究が多く研究者によってなされている。それらの研究は主として単純支持のはりを対象としたものである¹⁾⁻⁶⁾。また、たとえば、Hayashikawa と Watanabe⁷⁾では古典的なはり理論を用いたはりの振動に対する微分方程式の一般解から任意の境界条件問題として、連続ばかりの固有振動数と固有モードを決定し、一定速度の移動荷重に対する連続ばかりの動的応答を解析した結果を発表している。有限要素法を用いる数値的手法を利用したものとしては Sridharam と Mallik⁸⁾による多径間を有する連続ばかりのものがある。これらに対して、多径間を有する均一および不均一なはり断面の連続ばかりの固有振動数とモード形の決定に transfer matrix 法を用いる手法は、支間数が増えてても transfer の階は増えないことから計算機の所要時間および容量の節約ができ、また、集中質量数を適切に選ぶことによって十分な精度が得られるといったような点で実用的な計算手法として適した方法であ

る⁹⁾⁻¹¹⁾。この手法を用いて固有振動数とモード形が求められ、それらのモードの重ね合わせを行うことによって動的解析としての目的とする最終的な結果が得られることになる。

たとえば、最近、Wu と Dai¹²⁾は、この transfer matrix 法によって多径間を有する均一および不均一なはり断面の連続ばかりについて、单一ならびに連行移動荷重の動的応答の解析結果を発表しているものの、Bernoulli-Euler のはり理論に限定した解析がなされている。

はりの動的挙動に対する一般的傾向として、周知のようににはり形状や支間とはり高さの比の大きさによっては回転慣性およびせん断変形の影響を考慮しなければならなくなるが、それらを考慮した理論の最初のものとして Timoshenko のはり理論が有名である。この理論では断面のせん断変形を断面にわたって一定と仮定するもので、このため古典理論を補正するためのせん断補正係数を導入してやる必要があり、それらの具体的な断面形についての考察もいくつかなされている¹⁴⁾。他方、断面のせん断変形を一定と仮定することなく、また、上下表面の荷重条件を満足するような 2 次変化の断面変形を考慮した新しいはり理論が 1981 年 Levinson により提案された¹³⁾。これは支配方程式の次数や複雑さは Timoshenko 理論とほぼ同程度であることから最近では、いわゆる

* 正会員 工修 日本文理大学助教授 工学部土木工学科
(〒870-03 大分市大字一木田尾 1727-162)

** 正会員 工博 山梨大学教授 工学部土木環境工学科
(〒400 甲府市武田 4-3-11)

Levinson 理論という名称で各種の問題への適用が試みられている。

本論文では、主として多径間の連続ばかりを対象として上述した古典的なはり理論、Timoshenko 理論および Levinson 理論の 3 理論を取り上げて、均一および不均一な断面を有するはりに対する固有振動数とモード形を transfer matrix 法で求め、動的応答解析を試みたものである。また、古典的なはり理論で求められた解析結果と本法によるそれらの値とを比較することにより transfer matrix 法の多径間問題への適用性について、多くの数値例を通して検討したものである。

2. 理 論

(1) Transfer Matrix 法の概要

Fig. 1(a) に示した分布質量をもつはりを **Fig. 1(b)** のようにいくつかの有限点に質量を分散集中させ、それらの集中質量間のはり部分は剛性のみを有するような置換モデルのはりを考える。

Fig. 1(b) の集中質量 $1, 2, 3, \dots, n-1$ の位置は station とよばれ、これらの station と station の間隔は field とよばれる。**Fig. 2(a)** は station $i-1$ と station i 間のはり要素であり、これらの station のたわみ、たわみ角、せん断力および曲げモーメントをそれぞれ y_i , ϕ_i , V_i および M_i で表わしてある。また、station $i-1$ の右側の断面諸量の肩文字に R を、station i の左側のそれらに L をつけて表わす。この要素がつり合うためには $\sum V=0$ および station $i-1$ のまわりのモーメント $\sum M=0$ であることから次式が求められる。

$$\left. \begin{array}{l} V_i^L - V_{i-1}^R = 0, \\ M_i^L - M_{i-1}^R - V_i^L l_i = 0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

ところで、片持ばかりの自由端にモーメント M とせん断力 V が加えられた場合の自由端のたわみ y とたわみ角 ϕ の式は古典的なはり理論の場合、次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{M l^3}{2 EI} + \frac{V l^3}{3 EI}, \\ \phi = \frac{M l}{EI} - \frac{V l^2}{2 EI}. \end{array} \right\} \quad (2)$$

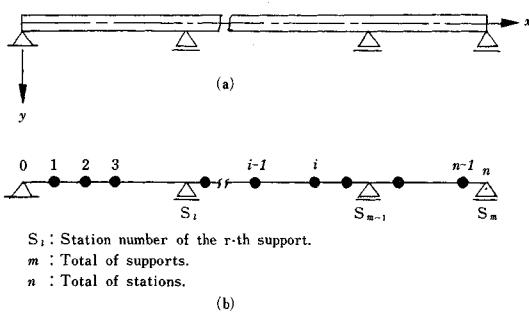


Fig. 1 Actual and discrete systems of multispan beam.

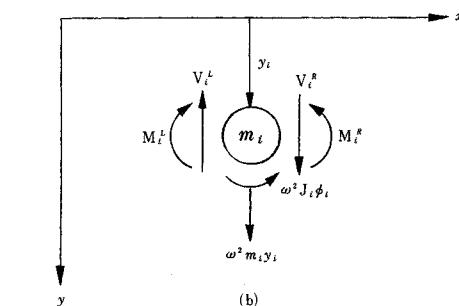
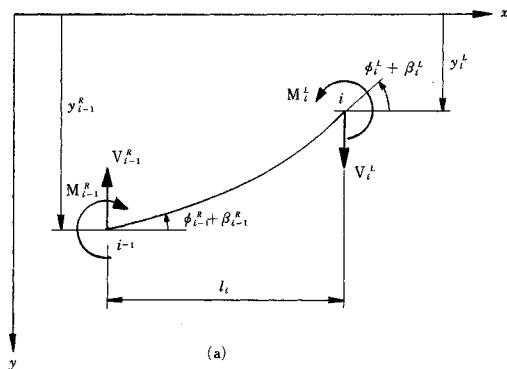


Fig. 2 Free-body diagram of i th station and i th field.

これに対し、せん断変形の影響を考慮した場合の変位は次式のように求められる。

$$y = -\frac{M l^3}{2 EI} + \frac{V l^3}{3 EI} + \frac{\chi V l}{GA} \quad (3)$$

また、断面奥行方向の変形の影響を考慮した場合の変位は次式のようになる。

$$y = -\frac{M l^3}{2 EI} + \frac{V l^3}{3 EI} + \frac{(1+\nu) l h^2}{4 EI} V \quad (4)$$

ここに、 EI は曲げ剛性、 GA はせん断剛性であり、 χ 、 ν はそれぞれせん断補正係数、ポアソン比を表わす。これらの式を station $i-1$ のたわみ y_{i-1} 、たわみ角 ϕ_{i-1} に適用すると次式が得られる。

$$\left. \begin{array}{l} y_i^L = y_{i-1}^R - \phi_{i-1}^R l_i - \frac{l_i^2}{2 EI_i} M_{i-1}^R - \frac{l_i^3}{6 EI_i} V_{i-1}^R \\ \quad + \frac{\chi l_i}{GA_i} V_{i-1}^R + \frac{(1+\nu) l_i h^2}{4 EI_i} V_{i-1}^R, \\ \phi_i^L = \phi_{i-1}^R + \frac{l_i}{EI_i} M_{i-1}^R + \frac{l_i^2}{2 EI_i} V_{i-1}^R, \\ M_i^L = M_{i-1}^R + l_i V_{i-1}^R, \\ V_i^L = V_{i-1}^R. \end{array} \right\} \quad \dots(5)$$

式 (5) を行列表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & -l_i & -\frac{l_i^2}{2EI_i} & t_i + t_i - \frac{l_i^3}{6EI_i} \\ 0 & 1 & \frac{l_i}{EI_i} & \frac{l_i^2}{2EI_i} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{i-1}^R \quad (6)$$

ここに, $t_i = (\chi l_i / GA_i) V_{i-1}^R$, $t_i = [(1+\nu) l_i h^2 / 4 EI_i] V_{i-1}^R$ であり, これらの量を零とおけば古典理論の場合の field matrix が, また, t_i のみを零とおけば Timoshenko 理論の場合に, また, t_i を零とおけば Levinson 理論の場合の field matrix がそれぞれ得られることになる. 式 (6) を次のような行列関係式に書き表わす.

$$\{Q\}_i^L = [T_F]_i \{Q\}_{i-1}^R \quad (7)$$

ここに, $[T_F]_i$ は station i の field matrix である. Fig. 2 (b) から定常振動状態を仮定すると station i での力のつり合いとたわみ量が, 集中質量点 m_i の左右で連続であることを考慮すれば次の関係式が成立しなければならない.

$$\left. \begin{array}{l} y_i^R = y_i^L, \quad M_i^R = M_i^L - \omega^2 J_i \phi_i^L, \\ \phi_i^R = \phi_i^L, \quad V_i^R = V_i^L - \omega^2 m_i y_i^L. \end{array} \right\} \quad (8)$$

これに対する行列表式は次のようになる.

$$\begin{bmatrix} y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_s & 1 & 0 \\ -\omega^2 m_i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} y \\ \phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_i^L. \quad (9)$$

ここに, m_i , J_i は, はりの集中質量, 回転慣性モーメント, $t_s = -\omega^2 J_i$ は, はり断面の回転慣性による効果を表わす. したがって, $t_s = 0$ とおけば古典理論の場合の station matrix が得られ, t_s のみ考慮し, $t_i = t_i = 0$ としたものが Rayleigh はり理論とよばれるものである. ω , m_i および J_i は固有円振動数, i 番目の station での質量および慣性モーメントを表わす. 式 (9) は次のような行列関係式に書き表わせる.

$$\{Q\}_i^R = [T_S]_i \{Q\}_i^L \quad (10)$$

ここに, $[T_S]_i$ は i 番目の station における station matrix である. また, 式 (6), (9) で各はりの長さ l_i , 断面二次モーメント I_i および各質点の質量 m_i をそれぞれの基準値 l_s , I_s および m_s との比を l'_i , I'_i および m'_i を用いてたわみ, たわみ角, 曲げモーメントおよびせん断力を無次化した行列関係式を次式のように書き表わしておく.

$$\{\bar{Q}\}_i^R = [\bar{T}]_i \{\bar{Q}\}_i^L \quad (11)$$

$$\{\bar{Q}\}_i^L = [\bar{T}_F]_i \{\bar{Q}\}_{i-1}^R \quad (12)$$

(2) 円振動方程式

Fig. 1(b) のようにモデル化した集中質量からなるはり系に対し, 式 (11), (12) を組み合わせると次のような関係式が得られる.

$$\left. \begin{array}{l} \{\bar{Q}\}_i^R = [\bar{T}_S]_i [\bar{T}_F]_i \{\bar{Q}\}_i^L = [\bar{T}]_i \{\bar{Q}\}_{i-1}^R, \\ [\bar{T}]_i = [\bar{T}_S]_i [\bar{T}_F]_i. \end{array} \right\} \quad (13)$$

次に, 一般的な境界の場合について適用し得るように中間支持に対する station matrix を求める. Fig. 3 に示したような中間支持 S_k と隣接する支点 S_l の間の transfer matrix を考えるものとすれば次式が成立する.

$$\left. \begin{array}{l} \{\bar{Q}\}_{sl}^L = [\bar{T}_F] \prod_{s=k+1}^{s_l-1} [\bar{T}] \{\bar{Q}\}_{kl}^R = [\bar{T}_R]_{kl} \{\bar{Q}\}_{sk}^R, \\ [\bar{T}_R]_{kl} = [\bar{T}_F]_{sl} \prod_{s=k+1}^{s_l-1} [\bar{T}_r] = \begin{bmatrix} \bar{T}_{11} & \cdots & \bar{T}_{14} \\ \bar{T}_{21} & \cdots & \bar{T}_{24} \\ \bar{T}_{31} & \cdots & \bar{T}_{34} \\ \bar{T}_{41} & \cdots & \bar{T}_{44} \end{bmatrix}. \end{array} \right\} \quad (14)$$

ここで, 中間支点 S_l に対する境界条件として $\bar{y}_{sl}^L = 0$ を式 (14) に適用すれば次式が得られる.

$$\bar{V}_{sk}^R = -\frac{\bar{T}_{11}^{kl}}{\bar{T}_{14}^{kl}} \bar{y}_{sk}^L - \frac{\bar{T}_{12}^{kl}}{\bar{T}_{14}^{kl}} \bar{\phi}_{sk}^L - \frac{\bar{T}_{13}^{kl}}{\bar{T}_{14}^{kl}} \bar{M}_{sk}^L \quad (15)$$

ここに, \bar{V}_{sk}^R は支点 S_k 番目の右側断面のせん断力である. また, 同じ S_k 番目の左側断面の状態変数は右側断面のものに対して

$$\bar{y}_{sk}^R = \bar{y}_{sk}^L, \quad \bar{\phi}_{sk}^R = \bar{\phi}_{sk}^L, \quad \bar{M}_{sk}^R = \bar{M}_{sk}^L \quad (16)$$

の関係が成立することから上式と式 (16) を行列形に書き表わせば次のようになる.

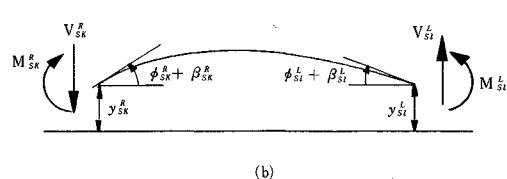
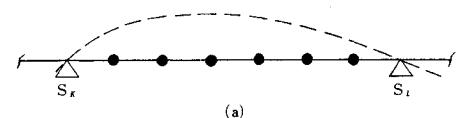


Fig. 3 Discrete system for beam segments and state variables.

$$\begin{aligned} \overline{[Q]}_{sk}^R &= [[\overline{T}_s]]_{sk} \overline{[Q]}_{sk}^L, \\ \text{ここに, } & \left. \begin{aligned} [[\overline{T}_s]]_{sk} &= \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\overline{T}_{11}^{kl}}{\overline{T}_{14}^{kl}} & -\frac{\overline{T}_{12}^{kl}}{\overline{T}_{14}^{kl}} & -\frac{\overline{T}_{13}^{kl}}{\overline{T}_{14}^{kl}} & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \cdots(17) \end{aligned}$$

上式の $[[\overline{T}_s]]_{sk}$ が中間支点 S_k に対する station matrix である。

$$\begin{aligned} \overline{[Q]}_0^L &= [\overline{T}_F]_n \prod_{r=1}^{n-1} [\overline{T}]_r \overline{[Q]}_0^R = [\overline{T}]_0 \overline{[Q]}_0^R, \\ \text{ここに, } & \left. \begin{aligned} [\overline{T}]_0 &= [\overline{T}_F]_n \prod_{r=1}^{n-1} [\overline{T}]_r = \left[\begin{array}{cccc} {}_0\overline{T}_{11} & - & - & {}_0\overline{T}_{14} \\ {}_0\overline{T}_{21} & - & - & {}_0\overline{T}_{24} \\ {}_0\overline{T}_{31} & - & - & {}_0\overline{T}_{34} \\ {}_0\overline{T}_{41} & - & - & {}_0\overline{T}_{44} \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \cdots(18) \end{aligned}$$

以上の準備によって、Fig.1 に示すような多径間の両端に対する transfer matrix は最終的に式 (18) のようになる。また、最左端支点の右側断面と次の支点の左側断面の transfer matrix は次のようになる。

$$\begin{aligned} \overline{[Q]}_{s1}^L &= [\overline{T}_F]_{s1} \prod_{r=1}^{s1-1} [\overline{T}]_r \overline{[Q]}_0^R = \left[\begin{array}{cc} {}^{1-s1} \\ \overline{T}_s \end{array} \right] \overline{[Q]}_0^R, \\ \text{ここに, } & \left. \begin{aligned} [\overline{T}_s] &= [\overline{T}_F]_{s1} \prod_{r=1}^{s1-1} [\overline{T}]_r = \left[\begin{array}{cc} \frac{1-s1}{\overline{T}_{11}} & \frac{1-s1}{\overline{T}_{14}} \\ \frac{1-s1}{\overline{T}_{21}} & \frac{1-s1}{\overline{T}_{24}} \\ \frac{1-s1}{\overline{T}_{31}} & \frac{1-s1}{\overline{T}_{34}} \\ \frac{1-s1}{\overline{T}_{41}} & \frac{1-s1}{\overline{T}_{44}} \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \cdots(19) \end{aligned}$$

両端が単純支持の場合は次のような境界条件を設定してやればよい。

$$\overline{y}_0^R = \overline{M}_0^R = \overline{M}_n^L = 0. \quad \cdots(20)$$

式 (18), (19) に式 (20) の境界条件を適用してやれば最終的に次式が得られる。

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{1-s1}{\overline{T}_{12}} & \frac{1-s1}{\overline{T}_{14}} \\ \frac{1-s1}{\overline{T}_{32}} & \frac{1-s1}{\overline{T}_{34}} \end{array} \right] = 0. \quad \cdots(21)$$

上式が考えている問題に対する円振動数方程式である。したがって、式 (21) から固有円振動数 ω が得られる^{注1)}とともに 4 つの初期状態変数が上式と式 (20) から次のように決定される。

注 1) 計算法としては $\omega=0$ から始めて順次、増大させて式 (21) の左辺の行列式の値を 4 倍精度で計算し、その符号の変化する区間を求める。この区間を次第に縮めていき、所要の精度（ここでは、有効数字 8 術程度）におさまるように計算した。

$$\overline{V}_0^R = - \left(\frac{1-s1}{\overline{T}_{12}} / \frac{1-s1}{\overline{T}_{14}} \right) \overline{\phi}_0^R. \quad \cdots(22)$$

いま、 $\overline{\phi}_0^R=1$ とおくと $\overline{V}_0^R = - \frac{1-s1}{\overline{T}_{12}} / \frac{1-s1}{\overline{T}_{14}}$ が得られて次のようになる。

$$\overline{[Q]}_0^R = [y \ \phi \ M] V_0^R = \left\{ 0 \ 1 \ 0 \ - \frac{1-s1}{\overline{T}_{11}} / \frac{1-s1}{\overline{T}_{14}} \right\} \cdots(23)$$

(3) モードの解析

$$\begin{aligned} \overline{[Q]}_i^R &= [\overline{T}_s]_i [\overline{T}_F]_i \cdots [\overline{T}_s]_1 [\overline{T}_F]_1 \overline{[Q]}_0^R = {}^{1-i} \prod_i \overline{[Q]}_0^R, \\ \text{ここに, } & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{1-i} &= [\overline{T}_s]_i [\overline{T}_F]_i \cdots [\overline{T}_s]_1 [\overline{T}_F]_1 = \left[\begin{array}{cccc} \overline{T}_{11} & - & - & \overline{T}_{14} \\ \overline{T}_{21} & - & - & \overline{T}_{24} \\ \overline{T}_{31} & - & - & \overline{T}_{34} \\ \overline{T}_{41} & - & - & \overline{T}_{44} \end{array} \right] \end{aligned} \cdots(24)$$

式 (21) より固有円振動数が求められた後に、質量 matrix に関するモードの規準直交化を行う。

まず、前述のような方法に従って集中質量点 i の transfer matrix を求めると式 (24) のようになる。また、式 (23) と (24) から変位モード matrix が次式から求まる。

$$[\overline{y}]_{1-i} = [\overline{T}_{12} \ \overline{T}_{14}]_{1-i} \left[\begin{array}{c} 1 \\ - \frac{1-s1}{\overline{T}_{11}} / \frac{1-s1}{\overline{T}_{14}} \end{array} \right] \cdots(25)$$

集中質量に対する規準化係数は次式から得られる。

$$M = \sum_{i=1}^n \overline{y}_{in}^2 m_i \cdots(26)$$

さらに、集中質量に対する規準直交化されたモード matrix は次式によって求められる。

$$[\overline{Z}] = M^{-1/2} [\overline{y}]_{1-i} \cdots(27)$$

3. 動的応答解析

(1) 運動方程式とその解

振動系の一般的な運動方程式を行列表示で書くと次のようになる。

$$[m] \ddot{y} + [c] \dot{y} + [k] y = F \cdots(28)$$

ここに、 $[m]$, $[c]$ および $[k]$ は質量、減衰および剛性 matrix であり、 \ddot{y} , \dot{y} および y は加速度、速度および変位ベクトルである。また、 F は外力ベクトルである。

次にモード形を質量、剛性の各 matrix に関して規準直交化を行えば次式が求められる。

$$[\overline{Z}]^T [m] [\overline{Z}] = [I] \cdots(29)$$

$$[\overline{Z}]^T [k] [\overline{Z}] = [\omega^2] \cdots(30)$$

ここに、 $[\overline{Z}]$ は無次元のモード matrix, $[\overline{Z}]^T$ はその転置 matrix, また、 $[I]$ は正方単位 matrix である。ところで、変位、速度および加速度ベクトルは規準化されたモード matrix と一般化座標 $q(t)$ を導入することによって次の

$$\left. \begin{array}{l} R_i = P; S_{i-1} = -\frac{P}{\Delta t} \\ R_i = 0; S_i = \frac{P}{\Delta t} \\ R_r = S_r = 0; r \neq i-1, i; i=1, 2, \dots, n \end{array} \right\} \dots\dots(48)$$

よって式(46)は単一移動荷重 P によるおののの station 上の P の時間軌跡を与えるものである。

4. 数値計算例

本論文の計算例として、減衰を考えない場合で均一な断面の単純ばかりと 2 ないし 3 径間の連続ばかりおよび変断面の 3 径間連続ばかりを対象とし、単一集中荷重が一定速度で移動する場合の動的応答解析を行う。

まず、最初に Timoshenko 理論において支間長 l と断面高 h の比を $l/h=5$ とした単純ばかりの場合に対し、集中質量数が変位に及ぼす影響を静的変位について求めた結果を Fig. 5 に示した。

これは単純ばかりの支間中央位置での理論値と本解法での値の比と分割数との関係を示したものである。この図から分割数が 14 程度以上で収束していることがわかる。なお、支間長を 18 等分割した $l/h=5$ の場合の単純ばかりについて支間中央位置での静的変位を Timoshenko 理論の解析解と本解法による結果を Table 1 に示したが、表中の Location は荷重の載荷点を表わす。この表からも両者はほとんど一致しており非常に高い精度の結果が得られていることが確認される。

そこで以下では断面が均一な連続ばかりの各支間の集中質量数として 17 を採択した。なお、はりの諸数値として $P=9.8 \times 10^3 \text{ N}$, $L=60 \text{ m}$ (各支間 20 m), $EI=1.96 \times 10^3 \text{ Nm}^2$, 単位長さ当たりの質量 $\mu=1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}$, ポアソン比 $\nu=0.29$, せん断補正係数 $\kappa=5/6$ を採用した。また、 μ および EI については一定として、 l/h のみを変化させて数値計算を実施した。

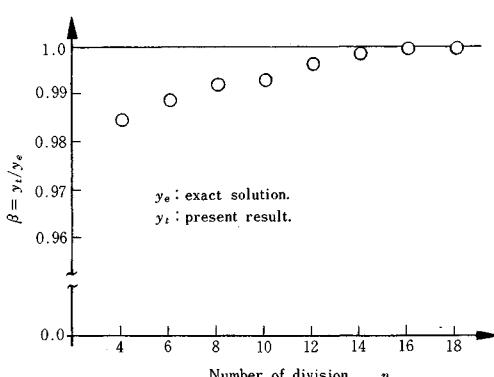


Fig. 5 Convergence of the calculated results versus to number of the discretization for simple beam with $l/h=5.0$.

Table 1 Comparison between the calculated results and exact solution for simple beam with $l/h=5.0$.

Location	はりの位置 (X/L)	Exact solution	Transfer matrix
1	0.056	0.00150	0.00148
3	0.167	0.00435	0.00434
6	0.333	0.00779	0.00776
9	0.500	0.00932	0.00933
12	0.667	0.00779	0.00776
15	0.833	0.00565	0.00565
17	0.944	0.00150	0.00148

Fig. 6 は 3 径間連続ばかりを対象とし、古典理論による解析解と Timoshenko 理論で $l/h=5, 10, 20$ の 3 種類に対し本法で求めた静的変位の比較を示したものである。また、 $l/h=5$ で一定移動速度 $v=50 \text{ km/h}$ の場合を Timoshenko 理論による本法で求めた動的変位も示している。第一支間中央位置での変位を図(a)に、第二支間中央位置での変位を図(b)にそれぞれ示したが、両図とも l/h の値を大きくとれば古典理論の結果に収束していくことが観察でき、ほぼ l/h を 20 程度にとれば古典理論の結果に一致する。したがって、 l/h が 20 程度以上になるとせん断変形、回転慣性の影響は現われず、古典理論のレベルで考えてもよいことが推察される。逆に l/h が小さくなつたいわゆる deep beam に近づくとそれらの影響は大きくなつて、 $l/h=5$ のとき第一支間で古典理論値の 18 %、第二支間で 20 % および $l/h=10$ のときそれぞれ 4 %、5 % と大きな変位を示している。動的変位は両図ともに静的変位を基準にして上下に変動していることがわかる。

Fig. 7 は Fig. 6 と同じ形状のもので、ここでは Timoshenko 理論の代わりに Levinson 理論を採用して本法によって求めた静的変位および動的変位を示したものである。この結果はほぼ Fig. 6 の Timoshenko 理論のそれと同様の結果となるが、具体的には $l/h=5$ のとき第一支間で古典理論の 28 %、第二支間で 33 % および $l/h=10$ のとき 17 %、8 % と大きな変位を示し、これらの値はいずれも Timoshenko 理論のときよりある程度の大きさの値となっている。

以上までによって単純ばかりおよび 3 径間連続ばかりに対し本法による解析の精度上の妥当性、有効性を示したが以下では移動荷重が作用する場合の動的効果を評価するために通常よく用いられる次式のような動的増幅率 δ を定義する。

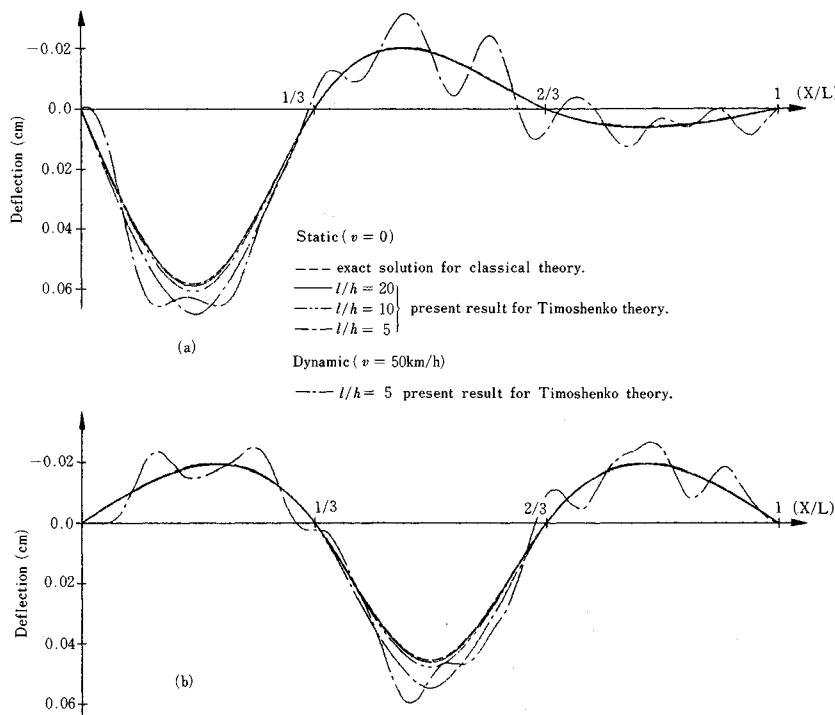


Fig. 6 Responses of deflection at the centers of first and second spans for three-span continuous beam.

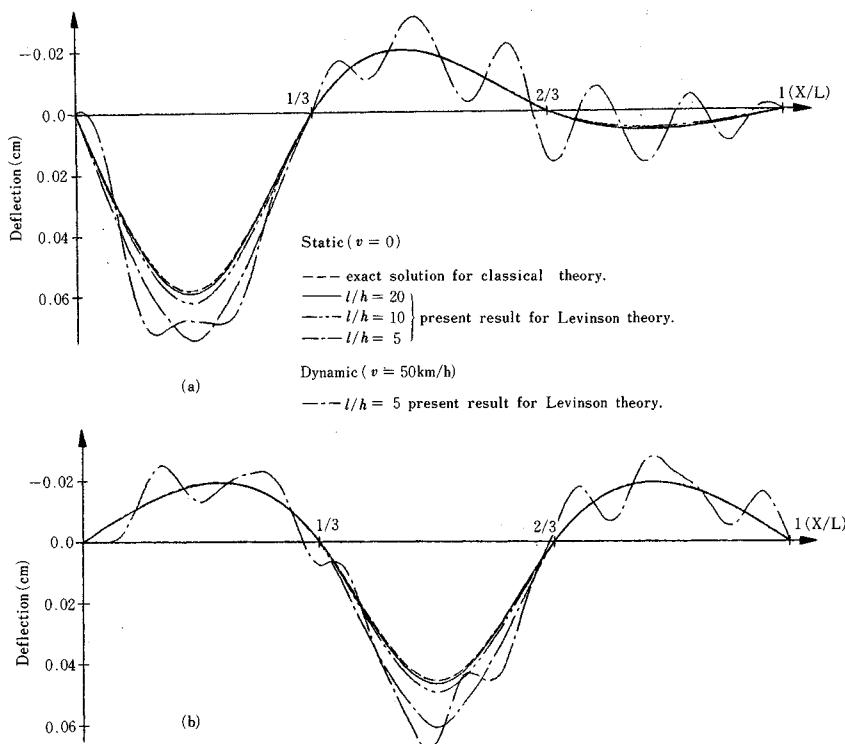


Fig. 7 Responses of deflection at the centers of first and second spans for three-span continuous beam.

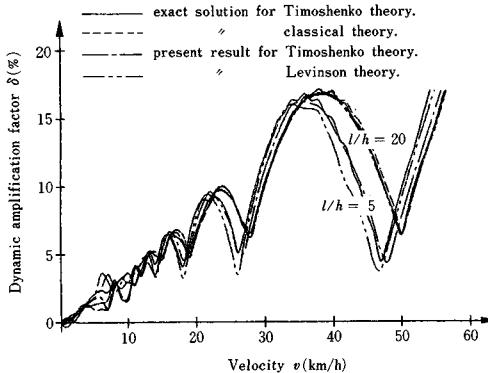


Fig. 8 Relation between dynamic amplification factor δ and moving load velocity v for simple beam.

ここに、 $W_{d,\max}$ および $W_{s,\max}$ はそれぞれ動的応答の最大値および静的応答の最大値を表わす。

Fig. 8 に質点数を 17 に取った場合の単純ばかりについて横軸に移動速度 v を、また、パラメーターとして l/h をとって Timoshenko 理論の解析解による動的増幅率および Timoshenko 理論、Levinson 理論を本法で求めた動的増幅率の比較を示した。この図から $l/h=5$ の場合に対し Timoshenko 理論と Levinson 理論との間にわずかの差がみられるが、 $l/h=20$ の場合になると予想どおり Timoshenko 理論の解析解を含めた三者がほとんど一致することが確認される。また、三者ともに時速 50 km/h までピークの山がいくつも現われている。

次に、3径間連続ばかりの場合の動的増幅率を第一支間中央位置に対して Timoshenko 理論の場合の結果を Fig. 9(a) に、Levinson 理論のそれを Fig. 9(b) にそれぞれ示した。また、第二支間中央位置に対し Timoshenko 理論の場合の結果を Fig. 10 に示した。これら 3 図から δ は l/h が相対的に小さくなるとせん断変形、回転慣性による影響がみられるが、 l/h が 20 程度になるとそれらの影響はほとんどなくなる。また、単純ばかりの場合と同様に時速 50 km/h までにピークの山がいくつも現われ、なかでも $l/h=5$ の場合のピークが一番大きくなり、単純ばかりの場合と違って複雑な曲線を描いている。なお、この結果のうちの古典理論によるものは文献 7) に示されたデータに一致していることも確認されている。

次に、単純ばかり、2および3径間連続ばかりの第一支間中央での動的増幅率について Timoshenko 理論と Levinson 理論を比較したものを Fig. 11 に示した。このうちの図 (a) は $l/h=5$ の場合、図 (b) は $l/h=10$ の場合のものである。両図とも δ は単純ばかりの場合が一番大

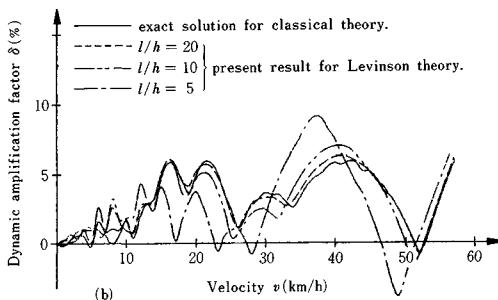
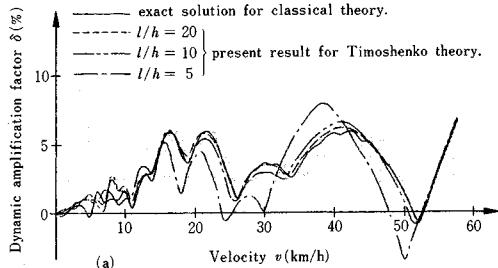


Fig.9 Relation between dynamic amplification factor δ and moving load velocity v at the center of first span of three-span continuous beam by Timoshenko and Levinson theories.

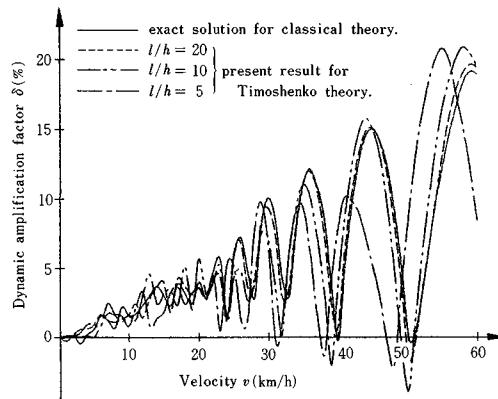


Fig.10 Relation between factor δ and velocity v at the center of second span of three-span continuous beam by Timoshenko theory.

きく、径間数が増えるに従って減少していく傾向となっている。 $l/h=5$ の場合に Timoshenko 理論と Levinson 理論の結果に多少の差がみられるが $l/h=10$ の場合にはその差はほとんどみられない。また、径間数が増えるにつれて δ は複雑に変化することがわかる。

Fig. 12 は文献 12) でとり上げられた 5 径間の変断面連續ばかりの両側径間を除去した断面の諸数値 (断面形状は円形で第 1, 第 2, 第 3 の支間長および断面直径はそれぞれ 8, 10, 9 ft および 3, 5, 4 in であり, 載荷量 P は

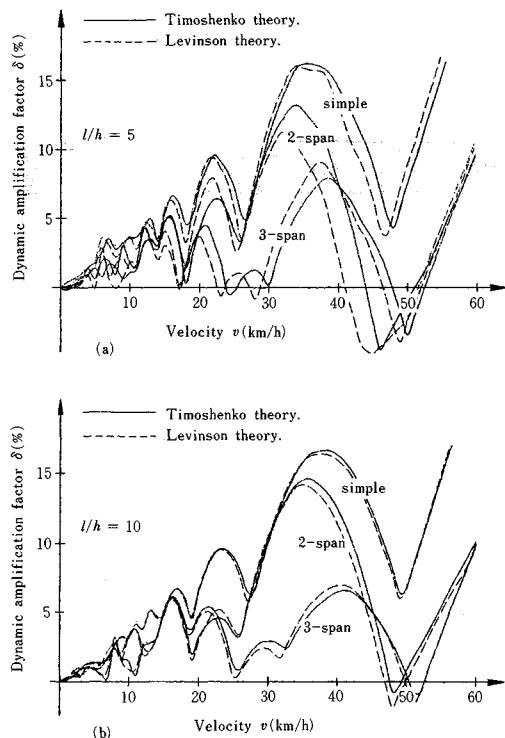


Fig. 11 Relation between factor δ and velocity v for simple beam and continuous beam.

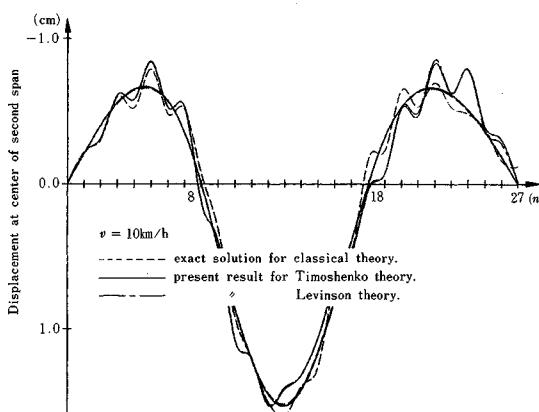


Fig. 12 Responses of deflection at the center of second span for three-span continuous beam by Classical, Timoshenko and Levinson theories.

9.0 t) を採用した変断面の 3 径間連続ばかりの第二支間中央位置での古典理論、Timoshenko 理論および Levinson 理論による変位図の比較を表わしたものである。静的変位はほとんど一致しているが動的応答で Timoshenko 理論および Levinson 理論は、古典理論の解析解との間に差がみられる。

5. 結 言

本論文は、多径間を有する連続ばかりの動的応答解析を目的として transfer matrix を用いる手法の実用性および有用性について考察したものである。得られた数値結果から次のようなことが指摘できる。すなわち、

(1) 単純ばかりにおいて Timoshenko 理論による解析解と本法で求めた動的静的応答を比較することにより本法は非常に高い精度の結果が得られることが確認された。

(2) $l/h=20$ 程度以上の細長いはりになると古典理論、Timoshenko 理論および Levinson 理論の動的増幅率(式(49)参照)は通常の予想どおり、ほとんど一致して差はみられない。

(3) 3 径間連続ばかりについても第一支間および第二支間中央位置での Timoshenko, Levinson 両理論の動的増幅率は $l/h=20$ 程度以上になると古典理論の解析解で求めたものとほとんど一致するとともに本論文の結果は文献 7) にほとんど一致していることも確認された。

(4) l/h が比較的小さい、いわゆる deep beam に近い場合はせん断変形、回転慣性およびボアソン比の影響が大きく現われることを量的的に提示した。

(5) 動的増幅率は一般に荷重速度の増大につれて増加する傾向になるのに対し、支間数が増大すれば動的増幅率の増大割合は相対的に減少する傾向になるとともに複雑な変化をする。

(6) 変断面の連続ばかりに対しても本法を適用して静的動的応答解析のできることが確認された。

以上のことから Timoshenko 理論および Levinson 理論の応答解析問題は比較的容易に解析できることから本手法は実用的で有用性の高いものであることが結論される。

この論文の数値計算は日本文理大学および大分大学の大型電子計算機を使用した。

参考文献

- 1) Fryba, L. : Vibration of Solid and Structures under Moving Loads, Noordhoff International Publishing, Groningen, The Netherlands, 1972.
- 2) Hirai, I. : Fundamental Equations of Beam Structures under the Moving Loads and Its Application, Proceedings of Japan Society of Civil Engineers, No. 90, pp. 29 ~36, Feb., 1963.
- 3) Yoshida, D. M. and Weaver, W. : Finite Element Analysis of Beam and Plates with Moving Loads, Publications, International Association for Bridges and Structural Engineering, Vol. 31-I, pp. 179~195, 1971.
- 4) Blezwas, T. E., Feng, C. C. and Ayre, R. S. : Dynamic Interaction of Moving Vehicles and Structures,

- Journal of Sound and Vibration, Vol. 67, No. 4, pp. 513 ~521, Dec., 1979.
- 5) Timoshenko, S. P. and Young, D. H. : Vibration Problem in Engineering, John Wiley and Sons Inc., New York, N. Y., 1974.
- 6) Warburton, G. B. : The Dynamical Behavior of Structures, 2nd ed., Pergamon Press, Ltd., Oxford, England, 1976.
- 7) Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Dynamic Behavior of Continuous Beam with Moving Loads, Journal of The Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol. 107, No. EM1, Feb., 1981.
- 8) Sridharan, N. and Mallik, A. K. : Numerical Analysis of Vibration of Beam Subjected to Moving Loads, Journal of Sound and Vibration, Vol. 65, No. 1, pp. 147 ~150, July, 1979.
- 9) Clough, R. W. and Penzien, J. : Dynamics of Structures, McGraw-Hill, International Book Company, New York, N. Y., 1979.
- 10) Meirovitch, L. : Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Company, London, U.K., 1967.
- 11) Pilkey, W. D. and Chang, P. Y. : Modern Formulas for Statics and Dynamics, McGraw-Hill Book Company, New York, N. Y., 1978.
- 12) Wu, J. S. and Dai, C. W. : Dynamic Responses of Multispan Nonuniform Beam Due to Moving Loads, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 113, No. 3, pp. 458~474, 1987.
- 13) Levinson, M. : A New Rectangular Beam Theory, Journal of Sound and Vibration, Vol. 74, No. 1, pp. 81~87, 1981.
- 14) Cowper, G. R. : The Shear Coefficients in Timoshenko beam theory, J. Appl. Mech. pp. 335~340, 1966.

(1989.12.26・受付)