

結晶塑性モデルによる亀裂先端近傍の弾塑性解析

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF A BLUNTING CRACK TIP IN CRYSTALLINE SOLIDS

小畠 誠*・奥田 純三**・後藤 芳顯***・松浦 聖****

By Makoto OBATA, Junzo OKUDA, Yoshiaki GOTO and Sei MATSUURA

Large elasto-plastic deformation around a blunting crack tip is analyzed with help of the theory of physically based crystal plasticity. A boundary value problem is formulated by use of boundary layer analysis under the condition of small scale yielding. The results are compared with those predicted by the usual macroscopic (J₂) plasticity. It is shown that deformation tends to localize when crystal plasticity is used. The effects of microstructures on the ductile crack growth are also discussed.

Keywords: crystal plasticity, large elasto-plastic deformations, crack tip

1. はじめに

構造部材中に存在する亀裂は、構造物の耐荷力と寿命を著しく低下させることから、亀裂の発生と進展の機構を解明することは、工学における重要な問題として認識され、過去数十年に多大の進歩を得てきた。この結果、金属材料における亀裂の問題の多くは、応力拡大係数やそれに対応した工学的パラメーターである破壊靱性値をもって議論できることが明らかになり、現在ではこの手法は金属材料にとどまらずより幅広い種類の材料に対し応用されつつある。しかしながら、応力拡大係数や破壊靱性値といった巨視的なパラメーターと亀裂の先端近傍での亀裂進展そのものの微視的なメカニズムとの関連については、不明な点があり今なお数多くの研究が続けられている。

これまで行われた多くの実験的研究により、鋼材中の亀裂の延性的な進展の微視メカニズムについては、亀裂

の先端近傍で大きな塑性変形が起き、それにより鋼材にあらかじめ含まれる大小の不純物、介在物から発生する空隙が不安定につながる形で亀裂が進展していくことが知られている^{1),2)}。このように亀裂の進展は不純物や介在物からの空隙の発生と成長、不安定的なひずみ集中化などが、複雑にからみあった微視的な破壊の進行現象であり、それは亀裂先端近傍に起きた塑性変形の大きな領域で起こっている。そのため、初期の破壊進行のメカニズムの研究では、亀裂先端近傍での塑性変形によるひずみの分布を記述する試みがなされ、全ひずみ塑性理論に基づきわゆる HRR 解などが与えられた^{3),4)}。不純物や、空隙の果たす役割についてもすべり線理論などを用いて解析されている⁵⁾。これらはいずれも微小変形を仮定した理論に基づいており適用範囲はおのずと限られている。亀裂先端近傍では、もはや塑性加工ともいいうべき巨大な塑性変形が不可避なことから、大変形弾塑性理論と数値解析法として有限要素法を用いる方法も試みられており、そこでは亀裂の成長に重要な役割を果たす大小の空隙、ひずみの集中化の影響など多くの例についての研究がある^{6)~10)}。

これらの方法では、微小変形理論の仮定内よりもより複雑で精緻な解析が可能となるが、それは適切な大変形解析の理論と物質の構成方程式に基づくものでなければ

* 正会員 Ph.D. 名古屋工業大学講師 社会開発工学科
(〒466 名古屋市昭和区御器所町)

** 学生会員 名古屋工業大学大学院 (同上)

*** 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 社会開発工学科 (同上)

**** 正会員 工博 名古屋工業大学教授 社会開発工学科 (同上)

ならない。前者の大変形解析については、境界値問題を数値的に有限要素法で解くことは、汎用コードと強力な計算機の一般化した現在では特に困難なことではない。その一方、構成方程式については、従来の研究ではほとんどが現象学的な理論に基づく塑性理論、たとえばJ2流れ理論、あるいは微小空隙の発生と成長を含む連続体の塑性を表現するために考案されたグルソンの理論¹¹⁾によるものである。しかしながら、本問題のように不安定的な現象を含むと思われる問題にJ2理論のようになめらかな降伏曲面をもつ塑性理論を適用することに、不適当な場合が多いことは、分岐やひずみ集中化といったいくつかの事例で知られているとおりである。さらにこれらの現象学的な塑性論の適用については根本的な問題も含まれている。すなわち、先にも述べた亀裂の進展に特に重要な亀裂先端近傍での塑性変形の非常に大きい領域の大きさは、さまざまな実験的研究によれば、比較的大きな不純物(10 μm程度)の平均的な間隔である100 μmから200 μm程度^{1,2)}あるいはそれ以下とみなされており、これは多結晶金属では結晶粒による物質の非一様性を無視できない大きさのレベルにある。したがって、この種の解析では、J2理論を用いるにしろ、その変形改良型の構成方程式を用いるにしろ、現象学的なものである限り、その妥当性と適用の範囲についてはさらに検討が必要であると考えられる。実際には、結晶粒の大きさが數10~數100 μmであることや、降伏曲面の形状を考えると、このような領域の弾塑性解析は、金属の微視構造に立脚した塑性理論の1つである結晶塑性モデルによることがふさわしいと考えられるが、まだそのような解析は少なくまた例も限られたものである¹²⁾。

以上のことから、本研究では結晶塑性モデル^{13)~15)}による弾塑性構成方程式を適用し、亀裂先端近傍での大きな塑性変形を大変形弾塑性解析により求める。境界値問題は典型的な問題として亀裂先端にあらかじめ空隙が存在する場合について境界層近似によって設定し、数値解析法としては有限要素法を用いるものとする。そして従来の代表的な現象学的塑性理論であるJ2流れ理論による結果と比較し、微視組織の影響などについても検討するとともに、塑性変形の分布などの指標から亀裂の進展との関連についても考察する。

2. 解析方法

(1) 単結晶の構成方程式

結晶塑性論は金属の微視的な塑性変形に物理的に即する塑性理論であり、主として塑性加工時のテクスチャの発達の解析などに応用され、J2関連流れ理論に代表される現象学的塑性理論とは異なる発展を遂げてきた。本来、現象学的塑性理論は微視的な塑性変形の平均的挙動

を記述するとも考えられるものであり、その意味でこれまでこれら2つの塑性理論の関係は積極的に議論されてきた。実際、現象学的塑性理論のもついくつかの不備は、微視的な観点から容易に説明されることが、多くの研究で明らかになっている。たとえば、本研究との関連では、分岐や、不安定現象の解析になめらかな降伏曲面をもつJ2系の塑性流れ理論を用いると、現実的ではない結果ができる場合が多いが、結晶塑性論では、降伏曲面が必然的にとがりをもつためにその種の問題は生じないことになる。

ここでは、有限変形下の結晶塑性モデルによる構成方程式について簡単に述べる¹⁴⁾。以下の定式化では、テンソルはデカルト座標の成分で表わすものとし、総和規約を用いるものとする。変形勾配テンソル F_{ij} は形式的に弾性、塑性の変形成分の積として次のように表わすことができる¹⁶⁾。

$$F_{ij} = F_{ik}^e F_{kj}^e \dots \quad (1)$$

結晶塑性モデルでは塑性変形は結晶の幾何構造によって決まるすべり面上での転移すべりによってのみ引き起こされるものと定義される。図-1ではすべり面は格子状の線として表わされている。したがって、そこに示すように塑性変形に対応する F_{ij}^e はすべり面の回転を含まないことになる。それ以外の変形は F_{ij}^e に含まれることになるが、弾性変形は図にあるように結晶格子のゆがみとして理解される。こうして結晶塑性モデルによる式(1)の分解の意味は明解となる。式(1)から速度勾配テンソル $v_{ij} = L_{ij}$ を求めるところとなる。

$$L_{ij} = \dot{F}_{ik}^e F_{kj}^{e-1} + F_{il}^e \dot{F}_{lm}^e F_{mk}^{e-1} F_{kj}^{e-1} \dots \quad (2)$$

$$= L_{ij}^e + L_{ij}^p$$

式(2)第2項は塑性変形に対応するものである。すべり面上でのすべりの方向も区別してそれぞれをすべり系とよぶことにすると、結晶の α すべり系でのすべり率を $\dot{\gamma}^\alpha$ として、その項は次式のように与えられる。

$$L_{ij}^p = \sum_\alpha s_i^\alpha n_j^\alpha \dot{\gamma}^\alpha \dots \quad (3)$$

ここに、 s_i^α と n_i^α は図-1に示すように変形後のすべり系の幾何構造に依存するベクトルであり、初期状態でのものとは次の関係がある。

$$s_i^\alpha = F_{ik}^e \bar{S}_k^\alpha, n_i^\alpha = \bar{n}_k^\alpha F_{ki}^{e-1} \dots \quad (4)$$

また、式(2)のそれぞれの項は、対称部分 D_{ij} (変形率テンソル)と逆対称部分 W_{ij} (スピントンソル)との和として表現することができる。

式(2)の第1項は塑性変形以外の変形、すなわち結晶格子のひずみと結晶格子の回転による寄与に対応する。したがって、単結晶の弾性を表わす関係は次式で与えることが最も適当と考えられる。

$$\tau_{ij} = L_{ijkl} D_{kl}^e \dots \quad (5-a)$$

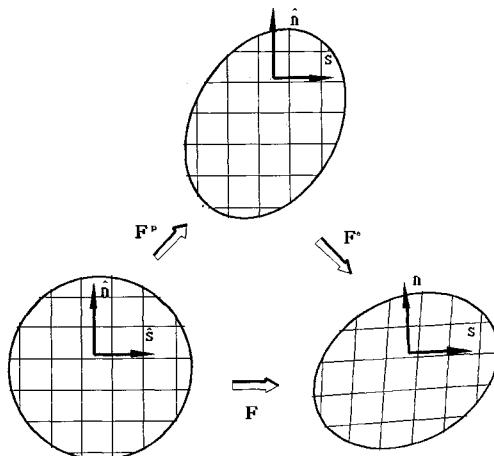


図-1 結晶の弾塑性変形

二二

$$\tau_{ij} = \dot{\tau}_{ij} - W_{ik}^e \tau_{kj} + \tau_{ik} W_{kj}^e \quad \dots \dots \dots \quad (5.b)$$

τ_{ij} は F_{ij}^e で表わされる変形に対して定義されたキルヒホフ応力 τ_{ij} のヨーマン変化率である。 L_{ijkl} は弾性係数テンソルで、添字に関して通常の対称性をもつものとする。また L_{ijkl} は結晶構造の対称性に依存し、異方性を有するのが通常である。以上の関係式をまとめて

$$\tau_{ij} = L_{ijkl}(D_{kl} - \sum_a p_{kl}^a \dot{y}^a) \quad \dots \dots \dots \quad (6-a)$$

を得る。式(6-a)は、塑性変形が変形速度に依存する場合も含めて、単結晶の弾塑性構成方程式の最も基本となる形である。塑性変形が速度に依存しない場合について考えるとすべり率 $\dot{\gamma}^a$ と適当な応力変化率を関係づけることにより、式(6-a)は構成方程式として閉じた形に書き直すことができる。最も単純なシュミットの流れ則を用いると、 α すべり系でのせん断応力を τ^a 、すべり面上での降伏応力を τ_0^a として

$$\dot{\tau}^a = \dot{\tau}^\alpha h^{a\beta} \dot{\gamma}^\beta \quad \text{ならば} \quad \dot{\gamma}^a \geq 0 \quad \dots \dots \dots \quad (7 \cdot a)$$

それ以外の場合は $\dot{\gamma}^a = 0$

たたし

$$\tau^a = \tau_{ij} n_i^a s_j^a \quad \dots \dots \dots \quad (7.b)$$

となる。ここで、 $h^{\alpha\beta}$ は単結晶のレベルでの加工硬化係数であり、式(7-a)にみるように $h^{\alpha\beta}$ は β すべり系のすべりによる α すべり系の硬化を表わしている。単結晶レベルでの加工硬化係数については、さまざまな形が提案されているが、本研究では次に示す線形のティラー形を用いる。すなわち

式(7)は結晶塑性モデルにおける降伏条件であるが、式

(7・b)より、応力空間内での降伏曲面が、すべり系の数だけの超平面で囲まれた、超多面体で表わされることになる。このことより単結晶の降伏曲面が最初から、とがりをもつことは明らかである。また、このシュミット則がそれぞれのすべり系で考えれば、直交則を満たしていることは、式(7・b)の右辺が、 τ_{ij} の対称性から $\tau_{ij}\tau_{ji}$ と書き直すことができることより明らかである。式(4)と(7・b)から弾性係数 L_{ijkl} の成分が応力 τ_{ij} の成分に比べて十分大きいとの仮定の下で式(7・a)の左辺より次式を得る。

$$\tau_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}^{\alpha} = h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

式(5)～(9)から、結晶面上でのすべりがシュミット則に支配される場合についての、弾塑性構成方程式は

$$\tau_{ij} = \{L_{ijkl} - \sum_m L_{ijmn} p_{mn}^a M^{ab} p_{rs}^b L_{rskl}\} D_{kl}$$

$$M^{\alpha\beta} = (h^{\alpha\beta} + p_{ij}^\alpha L_{ijkl} p_{kl}^\beta)^{-1} \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

で与えられることになる。ただし、式(10)では a , β は実際にすべりが起こっているすべり系だけについて和を取り、また、 M^{ab} は右辺のマトリックスとしてのインパースを表わす。

本報告では数値計算法を変形後の状態を常に基準状態として更新していく更新ラグランジュ (Updated Lagrange) 流に考える所以、第1種ビオラ-キルヒホフ応力テンソルの時間微分 N_{ij} と速度勾配テンソル L_{ij} との関係に書き改めると式(10)は結局次のようになる。

$$\dot{N}_{ij} = \{L_{ijkl} - \frac{1}{2}(\delta_{ik}\sigma_{lj} + \delta_{il}\sigma_{kj}) - \frac{1}{2}(\sigma_{ik}\delta_{lj} - \sigma_{il}\delta_{kj})\}$$

$$-\sum_{\alpha\beta}(L_{ijmn}\not{p}^{\alpha}_{mn} + \omega^{\alpha}_{im}\sigma_{mj} - \sigma_{im}\omega^{\alpha}_{mj})M^{\alpha\beta}\not{p}^{\beta}_{rs}L_{rsik}\}$$

$$\omega_{ij}^a = \frac{1}{2}(s_i^a n_j^a - s_j^a n_i^a)$$

ここで、 L_{ijmn} とコーシー応力 σ_{ij} の添字に関する対称性を用いている。

(2) 単結晶の二重すべりモデル

式(11)は一般に、塑性変形が離散的なすべり系でのすべりにのみ支配されている場合について有効な表現である。面心立方構造をもつ結晶は、方向も含めて 24 個のすべり系をもち、軟鋼などの体心立方構造をもつ結晶ではさらに多くのすべり系をもつ。本報告では、平面問題に限るので、二次元的に変形する結晶に対する 2 重すべりモデルを用いる¹⁷⁾。このモデルは図-2 に示すように、2 つのすべり線をもち、すべりの方向も含めて合計 4 つのすべり系を有するものであり、結晶塑性モデルの基本的な特徴を備えた最も簡単なモデルである。そして、式(4)のベクトル \vec{n}^a と \vec{s}^a は次のように表わすことができる。

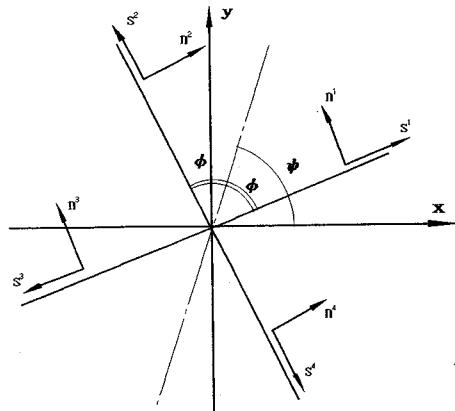


図-2 單結晶の2重すべりモデル

$$\begin{aligned}\hat{n}^1 &= \hat{n}^3 = (-\sin(\phi - \psi), \cos(\phi - \psi)) \\ \hat{n}^2 &= \hat{n}^4 = (\sin(\psi + \phi), -\cos(\psi + \phi)) \\ \hat{s}^1 &= -\hat{s}^3 = (\cos(\phi - \psi), \sin(\phi - \psi)) \dots \dots \dots (12) \\ \hat{s}^2 &= -\hat{s}^4 = (\cos(\psi + \phi), \sin(\psi + \phi))\end{aligned}$$

本報告では二次元的に変形する体心立方構造をもつ結晶を想定し $\phi = 55^\circ$ としているが、 ϕ の選択についての詳しい議論については文献 13), 17) にみられる。この 2 重すべりモデルはあくまで仮想的なものであるが、二次元的に変形する結晶に対しては有効なモデルであることが示されている^{13), 15), 17)}。このモデルで注意すべきことは、独立したすべり系が 2 つしかないため、任意の体積変形を含まない塑性変形に対し幾何学的条件のみからすべり率が一意的に決定できることである。これは 2 重すべりモデルの数値計算上の有利点であると同時に、実際の結晶が任意の変形を表現するために必要な数以上の多くのすべり系を有しているという点で、物理モデルとしての弱点ともなり得る。この点を考慮した平面モデルも提案されている¹⁸⁾。いずれにしろ、すべり系の数を増やすと与えられた塑性変形増分に対し一意的なすべり率を決めるることは困難になり数値計算上の複雑さが増加することになる。

(3) 解析対象と境界値問題

境界値問題の数値解法としては更新ラグランジュ流に定式化した有限要素法を用いる。領域の離散化は三角形一次要素で行う。亀裂先端部の解析モデルの典型的なものとして、図-3 にみられるように無限平面上の鈍化した亀裂の先端に空隙が存在し、無限遠で P-P' に垂直な引張力が働いているものを考える⁷⁾。この空隙は、破壊進行の初期の段階で比較的大きくもろい針状の不純物がマトリックスのわずかな変形にも追随できずに界面が剥離あるいは不純物が破壊して生ずるものに相当する²⁾。最終的にはすでに存在する亀裂とこのような空隙の間のリガメントが変形により不安定につながるかたちで亀裂は

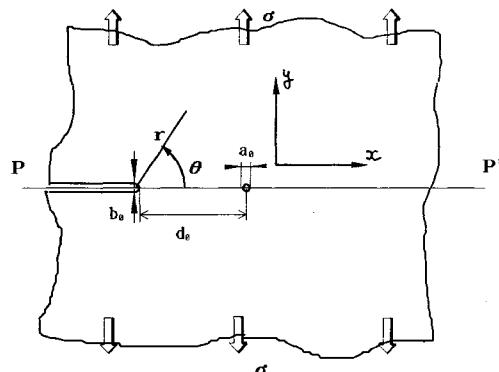
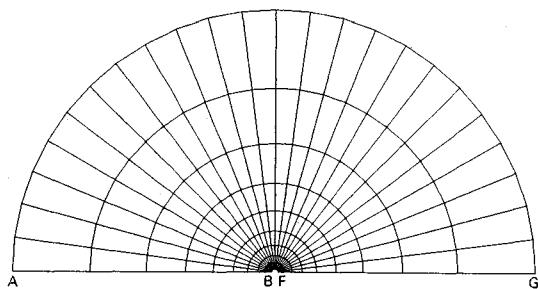
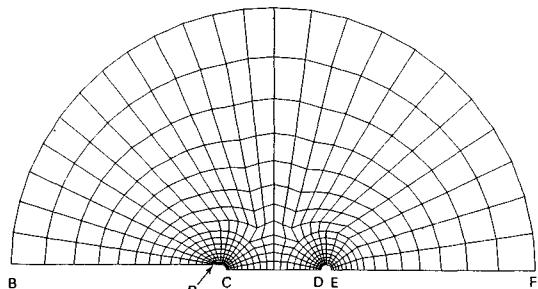


図-3 亀裂先端近傍のモデル化



(a)



(b)

図-4 要素分割

進展していくと考えられている。結晶塑性モデルは塑性的にはきわめて強い異方性を示すためにこの図のような場合でも亀裂先端近傍での応力場、変位場は一般には対称とはならない。しかしながら本報告では簡便化のために、図-2 の ψ で示される結晶の方向を、P-P' に対して 0° または 90° と選ぶことにより、亀裂近傍の場を対称化した場合のみを扱う。したがって数値解析の対象としては、図-4 に示すように要素分割を行った領域を考えた。図-4 (b) の外周に図-4 (a) が接続される。亀裂先端部は空隙の半径 $a_0/2$ と同じノッチで表わしている。最外円周部の半径は亀裂先端部の半径の 4 000 倍であり、材料中の不純物の分布を考えて d_0 は a_0 の 10 倍としている。

る。図-4の四角形はそれぞれその対角線によって作られる4個の三角形要素からなる。総節点数は1404、要素数は2684である。境界条件としては、塑性域が十分小さいとする小規模降伏を仮定した境界層近似を用いる⁹⁾。それによれば、最外円周部では等方線形弾性体に対する亀裂近傍での変位の漸近解を与える。すなわち、モードIの応力拡大係数を K_I として

$$u_x = \frac{2(1+\nu)}{E} K_I \bar{u}_x(r, \theta, \nu) \quad \dots \dots \dots \quad (13 \cdot a)$$

$$u_y = \frac{2(1+\nu)}{E} K_I \bar{u}_y(r, \theta, \nu) \quad \dots \dots \dots \quad (13 \cdot b)$$

E, ν はそれぞれ、ヤング率、ポアソン比である。さらに、亀裂表面上の条件と場の対称性から次の条件を得る。

$$\begin{aligned} t_x &= t_y = 0 & (\text{ABC および円弧 DE 上}) \\ t_x &= 0, u_y = 0 & (\text{CD および EFG 上}) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

ここに、 t_x, t_y はトラクションを表わす。

具体的な、数値計算は次の3例について行う。

- a) J2流れ理論による構成方程式に基づくもの。
- b) 解析対象全体で結晶の方向をそろえたもの、すなわち単結晶体を想定したもの。
- c) 図-5に示すように、疑似的な多結晶体を想定したもの。

それぞれの場合において、用いられた材料定数は表-1にまとめて示す。図-5は図-4(b)の領域について、太い枠と数字で結晶粒とその領域内での結晶の方向を示す ψ を表わしたものである。結晶レベルでの弾性率は単純に等方的なものを使っている。a)のJ2流れ理論によるものは、等方硬化と移動硬化の複合硬化を仮定したもので、 h_i と h_k はそれぞれ等方硬化、移動硬化係数を表わしている。現象学的なJ2理論によるものと、2重すべり理論によるものでは、厳密な材料定数の対応を考えることは困難でありそれ自体1つの研究テーマであるが、ここでは降伏応力に関しては結晶レベルのものが基本的にはせん断力によるものであることから、加工硬化係数については単結晶での一軸引張の挙動がJ2のそれ

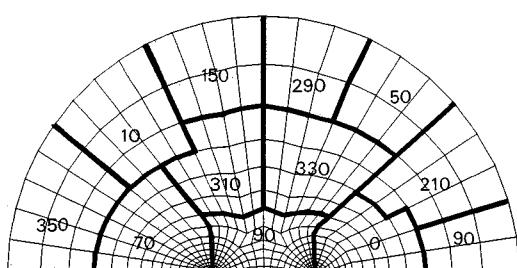


図-5 結晶の方向分配図

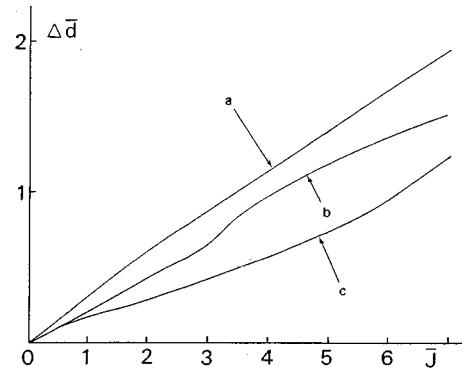
表-1 材料定数

case	E/σ_Y	ν	h_i/σ_Y	h_k/σ_Y	h/σ_Y	$\phi(\deg)$
a	300	0.3	1	1	—	—
b	600	0.3	—	—	1	90
c	600	0.3	—	—	1	see Fig. 5

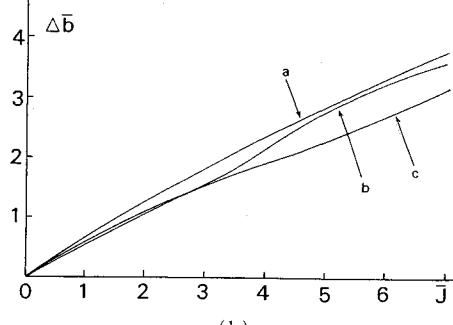
に近くなるように選んでいる。c)では、全体の対称性を維持するためP-P'軸に接する結晶の方向は $\phi=0^\circ$ あるいは 90° としている。図には示していないが図-4(a)に対応する領域に対しても同様に無作為に方向性を与えている。また、結晶粒界においては変位を完全に連続としており、いかなる粒界すべりも考慮していない。

3. 数値解析結果と考察

以下結果は長さに関しては、亀裂先端の空隙の直径 a_0 で、また応力に関しては、巨視的な降伏応力を無次元化して表わして⁻(バー)を付けて表わすものとする。すなわち、a)では σ_Y 、b), c)の場合では $2\sigma_Y$ を用いる。また、外力パラメーターとしては、通常この種の研究で用いられる J を使う。小規模降伏の条件が満足されており、本報告で用いた境界層近似解析が妥当である範囲では、平面ひずみ状態に対し J は応力拡大係数 K_I を用いて次式を用いて表わされる。



(a)



(b)

図-6 $\bar{J} \sim \Delta \bar{b}$ 曲線

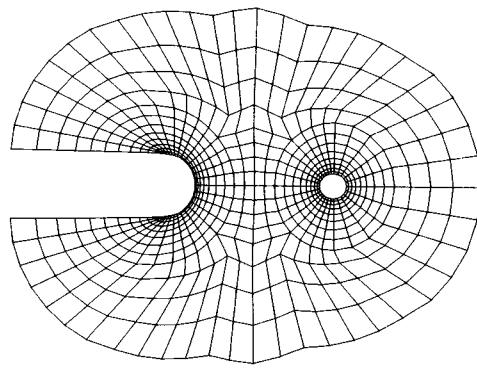
$$J = \frac{1 - \nu^2}{E} K_1^2 \dots \quad (15)$$

これから明らかなように、 J は(応力)×(長さ)の次元をもつことになる。

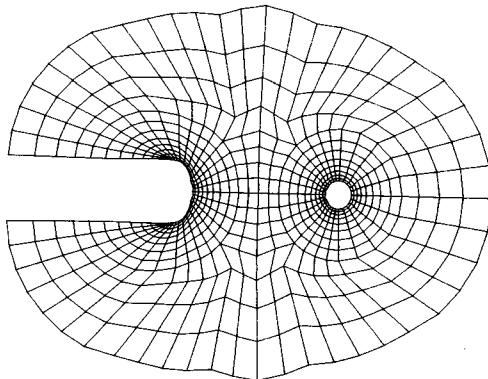
図-6は横軸に無次元化された $J(\bar{J})$ 、縦軸に変形の指標として、(a)亀裂先端と空隙までの距離(リガメントの幅)の変化、(b)亀裂先端部開口変位(図-4(b)、点Pのy方向変位)をそれぞれ表わしたものである。これによると、J2流れ理論を用いた場合の亀裂開口変位と \bar{J} の関係は文献7)の完全弾塑性体にみられるものに近いものになっている。線形硬化を仮定しており、降伏直後の接線剛性がべき乗硬化則に比べてきわめて低いことから、この結果は妥当な範囲にあると考えられる。亀裂開口変位に限れば、初期に多少の乱れはあるもののJ2理論、結晶塑性モデルによらず、ほぼ同様の線形挙動を示している。その一方、リガメントの幅の変化はJ2理論と結晶塑性モデルとでは大きく異なっている。これは、後に示すように、亀裂先端の空隙の成長の違いの影響である。特にJ2理論ではこの指標は \bar{J} に対して最初からほぼ線形的に変化しているのに対し、結晶塑性モデルによるものでは、特に \bar{J} の小さい範囲で局所的な変形の影響を受け線形から離れた挙動を示す。しかし、どの場合でも \bar{J} の値が5~6を越える付近ではほぼ線形に近い関係となっている。

図-7は、 $\bar{J}=5.0$ における亀裂先端近傍のそれぞれの変形状態を初期状態とあわせて表わしたものであるが、変形の様子は亀裂先端部開口変位にみられるよりも大きく異なっている。J2理論によるものでは先端部の表面はほぼ相似的に変形しているが、結晶塑性モデルに基づくb), c)の2つの例では、亀裂先端部および空隙の自由表面の変形は単調ではなく小さな凹凸が現われており、表面の変形状態からは全般的にJ2理論によるa)の場合に比べ変形が部分的に集中していることがわかる。これについては、変形の様子を等相当塑性ひずみ線で表わした図-8を合わせると良くわかる。J2理論ではひずみの特に大きい領域が鈍化した亀裂先端にほぼ均等に薄く層状にみられるが、結晶塑性モデルによる他の2つの例ではその様子は複雑である。b)の単結晶では、 \bar{J} の増加とともに最初に塑性状態に達する領域である先端部のほぼ $80^{\circ}\sim 90^{\circ}$ 付近に大きなひずみが集中している。また多結晶モデルであるc)ではひずみの分布は一層複雑なものになっている。ここに挙げた例では亀裂前方よりも、亀裂上部の領域に変形の大きな領域がややいびつな形で広がっている。このいびつきは結晶粒の方向が領域によって異なるためであることが図-8と図-5を比較すると明らかになる。

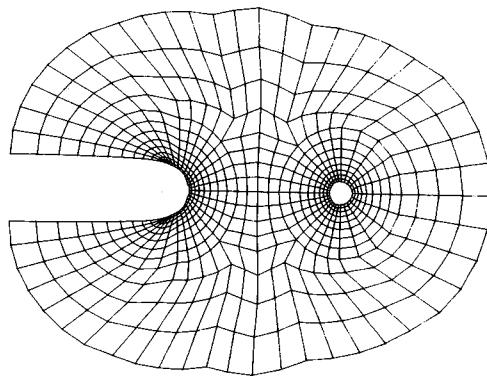
このように結晶塑性モデルではひずみの大きい領域が



(a) J2 理論



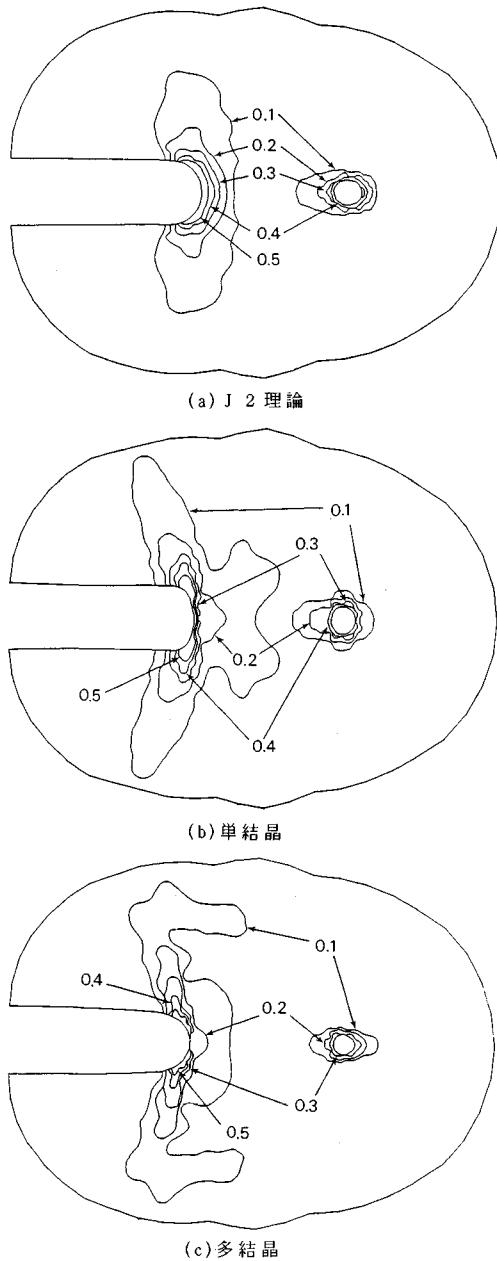
(b) 单結晶



(c) 多結晶

図-7 龜裂先端近傍での変形 ($\bar{J}=5.0$)

特定の方向や部分に現われたりする傾向があるが、それは単結晶の降伏曲面がとがりをもつものであることから、妥当な結果であるといえる。また次のようにも考えることができる。結晶塑性モデルでは、塑性変形のモードは、結晶の幾何構造に依存して離散的にのみ存在し得るため、塑性変形のモードとその他の条件が合致した部分だけが優位に変形を起こす。一方、現象学的塑性論が微視的なものの平均的な挙動を表わすものとの立場にた

図-8 亀裂先端近傍での相当塑性ひずみ分布 ($\bar{J}=5.0$)

ては、J₂ 理論はあらゆる方向に連続して分布する無限のすべり系からなる連続体の塑性理論とみなすこともできる。そのため、先と同じ理由で変形の集中は起きにくく、図にみると、なめらかな変形が生じることになる。現実には結晶の方向はランダムに分布しており、したがって J₂ 理論の結果はある意味で典型的な結果を与えるとも考えられるが、亀裂先端部開口変位やリガメントの長さといった指標でとらえると、それはここに挙げた

考察により、最も‘やわらかい’ものである可能性がある。結晶塑性モデルにおける 2 重すべりモデルと現象学的塑性論における J₂ 理論との材料定数の対応が厳密に議論できないことから断定的ではないが、ここに示した例でも、特に亀裂と空隙の相互作用において重要なリガメントの幅が結晶塑性を考慮したものの方が‘かたい’挙動を示したことは注目してよいものと思われる。

亀裂先端にある空隙の変形状態は、a), b), c) すべての例で大きく異なる結果を示している。J₂ 理論では成長した空隙の形状はほぼ橢円とみなすことができ、その長軸は亀裂の方向に平行である。無限遠での荷重方向を考えると、もし亀裂が存在しなければ、空隙の長軸は荷重方向を向くべきであり、この結果は、亀裂との相互作用が非常に大きいことを示している。一方、単結晶の場合では空隙は橢円形とはならずにはほぼ相似的に拡大している。さらに細かくみると、表面の要素の変形状態も J₂ 理論によるものとは大きく異なっており亀裂に近い側は亀裂先端表面と同様の凹凸がみられる。強い塑性異方性を有する結晶塑性モデルを用いると、このように空隙の成長に対しては J₂ 理論とはまったく異なる結果を導く可能性があることがわかる。亀裂の進展の例にとどまらず一般に、微小空隙の成長は材料の破壊に大きな役割を果たしていることから、物理的な代表長の考察から結晶塑性モデルの適用が適当な場合にこの事実は重要である。c) の場合では図-5 をみてもわかるように結晶の方向が空隙の左右で異なっているので、空隙の変形の様子も粒界を境としてはっきりとした相違が認められる。空隙の成長が他の 2 つの場合に比べて小さいのもこの場合の特徴である。結晶粒界の存在は一般に変形を起こしやすい方向をもつ領域に変形をより集中させる働きをもつ。また、結晶粒界の存在はすべりを阻止するように働くので全体としての挙動が剛になることから、この結果は妥当なものと考えられる。

亀裂の進展は、亀裂と空隙の間のリガメントが不安定的に連結していく現象として広く受け入れられているが、この不安定現象が微小介在物からの空隙の発生によるひずみ軟化によるものであるものなのか、あるいは、本報告で考慮したような降伏曲面のとがりに起因するものなのかについてはまだ実験的にも確証は得られていないようである。本報告における数値解析例では、結晶塑性モデルを用いた場合の方が、J₂ 理論に比べてより特定の領域に変形が集中する結果を与えたものの、いわゆるせん断帯などの著しいひずみの集中化現象はみられなかった。そのような形でのひずみの集中化についてはさまざまな例についてすでに数多くの研究が行われている^{19,20)}。それによれば数値解法として本報告のような要素で領域を離散化した有限要素法を用いて解析した場合

には、ひずみの集中化の発生と成長は要素分割に敏感に依存していることが認められている。したがってもせん断帶の発生の予測のみを目的とするならば、より細かい要素分割についての考察が必要となる。しかしながら、それは同時に現在でも著しい計算機資源を必要とするものであり本報告では扱うことはできなかった。せん断帶ではないが、文献9)は鈍化した亀裂先端部近傍でのひずみの集中化の数値解析例を示している。それはグルソンの構成方程式を用いたものであり、変形の局所化はここで考慮しているような降伏曲面のとがりによるものではなく、微小空隙の発生と成長に起因する材料の軟化によるものである。

この種の数値解析の最終的な目的は亀裂の成長と巨視的なパラメーターである応力拡大係数や J 積分値を関連づけることにより、亀裂先端の微視構造と巨視的な材料の破壊の関係を求めることがある。しかし、現段階では直接的な数値解析においても、亀裂の成長の最終的な段階まで計算を行うことはほとんど不可能である。そのため亀裂の進展開始に対して何らかの条件をおくのが普通である。これには、実際に J_c 値を決定する実験に倣った J_c 曲線によるもの¹⁰⁾、あるいは空隙と亀裂の間のさまざまな幾何学的条件を用いたものがある¹¹⁾、その他にも、一様に変形する場に対して与えられたものではあるが、場の支配偏微分方程式の形式から材料の崩壊に至るような変形の局所化の条件²¹⁾をリガメントの部分に近似的に適用する方法も考えられている。仮に本報告の解析結果にこれらの条件の中で最も簡単なもの、すなわち(リガメントの幅)=0となるときを亀裂の進展とみなす条件を当てはめ外挿により亀裂先端開口変位を求めると J_2 理論で $b_f/d_0=1.5$ 程度、結晶塑性モデルではともにやや大きく 1.7~1.8 程度となる。ここに b_f は亀裂進展時の亀裂先端開口変位 d_0 はリガメントの幅の初期値である。 b_f/d_0 は材料中の不純物の分布状況と亀裂が進展するときの亀裂先端部の開口変位との関係を示すもので文献7)に実験値も含めてまとめられている。本報告での J_2 理論に対する値はそこにみられるよりもかなり大きいものになっているが、これは本報告では線形硬化を仮定しているためである。ここでもまた J_2 での値は結晶塑性モデルよりも‘弱い’挙動を示している。ただし結晶塑性モデルでは変形が集中しやすく実際の亀裂進展は早い時点で起こると考えられるので、本来このような基準はそぐわない。 b_f/d_0 の値そのものは 1 つの上界という以外あまり意味がなく、実際には局所化していく変形を表現する指標でなければならない。

4. おわりに

亀裂先端近傍で、物理的な尺度の考察から適当と考え

られる結晶塑性モデルを用いて大変形弾塑性解析を行うことによって、亀裂先端近傍での弾塑性変形の様子を解析した。微視組織を考慮した変形と巨視的な塑性論によるものとには顕著な相違が認められた。すべり系によって塑性変形が支配される結晶塑性モデルを用いた場合には、ひずみ軟化を仮定しなくても現象学的な塑性理論に比べてひずみの集中化ははるかに起こりやすいことが明らかになった。そして J_2 理論による結果は微視組織のばらつきを含めたある意味での代表値となるがそれは全体的な変形の指標でとらえた場合最も大きいものを与える可能性があることが明らかになった。これは J_2 理論によって解析した文献7)の結果が全般的に亀裂の成長時の先端開口変位を実験結果に対し低めに予想している事実を説明し得る 1 つの要因と考えられる。また、降伏曲面が強いとがりをもつにもかかわらず、結晶塑性モデルを用いた場合でも、せん断帶の発生に至るような著しいひずみの集中化は認められなかった。この原因としては、有限要素法に用いた要素分割にも原因があるものと予想されるが、これについてはさらに注意深い取扱いが必要である。注目すべき点としては、亀裂先端付近での変形の指標としての亀裂開口変位がいずれの構成方程式を用いた場合でも J がある程度大きくなると、 J と線形に近い関係を呈したことが挙げられる。

本研究では、平面問題に限られるとの理由で縮退した結晶モデルである 2 重すべりモデルを用いた。すべり系の多い格子構造をもつ材料も含めて講論するには、やはり三次元モデルに対しての検討が必要と考えられる。その場合、すべり系の選択についての取扱いが数値計算上問題となるがそれはすべりに時間依存性を考えることにより効率的に回避できる。そして、実験的にはその重要性が認められている微小空隙の影響は結晶塑性論の枠組みの中で考慮する必要があるものと思われる。

不安定現象としての亀裂の進展をここで用いたような手法で定量的に解析するには、微小空隙、微視組織を含めた大変形下での材料挙動といった構成方程式の取扱いに依然多くの問題が残されているといえる。いたずらに問題を複雑にすることは無益であるにしても、現象に寄与する影響因子を整理し、それに対する十分な検討を加えたうえで、適当な構成モデルを試みることが大切である。微視組織の影響を考慮した点で本報告はそのような試みの一助となるべきものである。

謝 辞：本研究は平成元年度文部省科学研究費の奨励研究助成によって行われた。また、本研究にあたってさまざまな助言とご協力をいただいた小井手秀人氏(愛知県)と有益なご意見をいただいた査読者の方々に感謝します。

参考文献

- 1) Cox, T.B. and Low, J.R. : An investigation of the plastic fracture of AISI 4340 and 18 Nickel-200 grade maraging steels, *Metall. Trans.*, Vol. 5, pp.1457~1470, 1974.
- 2) Green, G. and Knott, J.F. : The initiation and propagation of ductile fracture in low strength steels, *J. Engineering Materials and Technology*, Vol. 37, pp.37~46, 1976.
- 3) Rice, J.R. and Rosengren, G.F. : Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 16, pp.1~12, 1968.
- 4) Hutchinson, J.W. : Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 16, pp.13~31, 1968.
- 5) Rice, J.R. and Johnson, M.A. : The role of large crack tip geometry changes in plane strain fracture, in *Inelastic behavior of Solids*, eds. M.F. Kanninen, W.F. Adler, A.R. Rosenfield and R.I. Jaffee, McGraw-Hill, New York, 1970.
- 6) McMeeking, R.M. : Finite deformation analysis of crack-tip opening in elastic-plastic materials and implications for fracture, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 25, pp.357~381, 1977.
- 7) Aravas, N. and McMeeking, R.M. : Finite element analysis of void growth near a blunting crack tip, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 33, pp.25~49, 1985.
- 8) Aoki, S., Kishimoto, K., Takeya, A. and Sakata, M. : Effects of microvoids on crack blunting and initiation in ductile materials, *Int. J. Fracture*, Vol. 24, pp.267~278, 1984.
- 9) 宮本 博・菊池正紀・久保光宏・猪平 剛：ボイド材の構成方程式を用いたき裂先端近傍の解析, *材料*, 第37巻, pp.878~884, 1988.
- 10) Needleman, A. and Tvergaard, V. : An analysis of ductile rupture modes at a crack tip, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 35, pp.151~183, 1987.
- 11) Gurson, A.L. : Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth-I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *J. Engrg. Mater.*, Vol. 99, pp.2~15, 1977.
- 12) Kitagawa, H. and Komeda, S. : Finite element analysis of crack tip opening—a simulation of vertex blunting, *Proc. ICCM'86*, Tokyo, V157~V162, 1986.
- 13) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S. : Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals, *Proc. R. Soc. Lond.*, A394, pp.87~119, 1984.
- 14) Asaro, R.J. : Crystal plasticity, *J. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp.921~934, 1983.
- 15) Nemat-Nasser, S. and Obata, M. : Rate-dependent, finite elasto-plastic deformation of polycrystals, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A409, pp.343~375, 1986.
- 16) Lee, E.H. : Elastic-plastic deformation at finite strains, *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, pp.1~6, 1969.
- 17) Asaro, R.J. : Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of single crystals, *Acta Metall.*, Vol. 27, pp.445~453, 1979.
- 18) Kitagawa, H. and Matsushita, H. : Flow localization in elastic-plastic material developing from stress-free surface, *Int. J. Solid Struct.*, pp.351~368.
- 19) Hill, R. and Hutchinson, J.W. : Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp.239~264, 1975.
- 20) Tvergaard, V., Needleman, A. and Lo, K.K. : Flow localization in the plane strain tensile test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 29, pp.115~142, 1981.
- 21) Hill, R. : Acceleration waves in solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 10, pp.1~16, 1962.

(1989.9.11・受付)