

時間領域 FE-BE 法を用いたダム-基礎-貯水系の振動解析手法

A FE-BE METHOD IN TIME DOMAIN FOR DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS OF DAM-FOUNDATION-RESERVOIR SYSTEMS

東平光生*・大町達夫**

By Terumi TOUHEI and Tatsuo OHMACHI

A FE-BE method in time domain adaptable to dynamic interaction analysis of a dam-foundation-reservoir system is developed. In order to formulate the method, FEM is applied to the dam and the part of reservoir near the dam, and BEM is applied to the foundation and the part of reservoir away from the dam. The role of BEM is to satisfy the radiation conditions of waves which include elastic waves traveling from the dam to the foundation and fluid pressure waves generated at the interface of dam and reservoir. Basic equations in time domain of each region; that is dam, foundation and reservoir, is coupled by a method of weighted residuals, and an algorithm similar to the Newmark's beta method is obtained.

An advantage of this algorithm is the capability of taking into account all the effects of dam-foundation interaction, dam-reservoir interaction, and reservoir-foundation interaction.

Keywords : dam-foundation-reservoir system, FE-BE method, time domain

1. はじめに

ダムの地震時挙動を把握するためには、ダム本体の振動特性だけでなく、貯水や基礎との動的相互作用にも十分配慮しなければならないことが指摘されている¹⁾。この貯水や基礎との動的相互作用について分析すると、動的相互作用は次のように分類される。

- ① ダムと基礎の動的相互作用
- ② ダムと貯水の動的相互作用
- ③ 貯水と基礎の動的相互作用

前述のように、これらすべての動的相互作用を考慮し得る解析手法を確立することは重要ではあるが、このことは定式化をはじめとして困難も多く、研究の実例もそれほど多くないのが実情である。

そうした中で、Chopra らはダムと貯水との相互作用やダムと基礎との相互作用を解明するために、サブストラクチャー法や周波数応答関数を用いて広範囲に研究を行っている^{1)~3)}。Chopra らの手法では貯水と基礎との動的相互作用を考慮するために、基礎面以下の弾性波

の伝播が一次元的であると仮定するなど定式化の簡略化をはかっているが、貯水との相互作用や貯水の波動の放射条件の設定などで、定式化は複雑になっている²⁾。

Antes らは、時間領域境界要素法を用いて貯水との相互作用を考慮したダムの振動解析を行っている⁴⁾。彼らの手法は境界要素法を用いているために、貯水の波動の放射条件の設定などが、Chopra らの手法に比較し、かなり容易になっているものの、ダム-基礎-貯水系のすべての相互作用を考慮した解析を行うまでには至っていない。

塩尻らは、時間領域で有限要素法と差分法を組み合わせ、ダム-地盤-貯水系の相互作用ばかりでなく、ダムや地盤の非線形振動の影響まで考慮できる手法を開発している⁵⁾。彼らは、時間領域で波動の放射条件を考慮するために、ダム近傍の地盤や貯水には有限要素法を用いているのに対し、ダムから離れた地盤と貯水部を差分法でモデル化し、そこに Lax-Wendroff 法を適用している。

このように、ダム-基礎-貯水系の振動問題に関する既往の研究を概観すると、ダム-基礎-貯水系の動的相互作用自体にも、もちろん難しい問題があるが、波動の放射条件を設定しなければならないことなども、この問題をさらに複雑にしていることがわかる。

したがって、ダム-基礎-貯水系の振動解析に境界要素

* 正会員 工修 佐藤工業(株)中央技術研究所
(〒243-02 厚木市三田47-3)

** 正会員 工博 東京工業大学大学院総合理工学研究科
(〒227 横浜市緑区長津田町4259)

法を用いることで、波動の放射条件の設定などが容易になるのであれば、境界要素法を用いることにも意義がある。そして、この場合の課題とは貯水の影響がどれだけ容易に考慮できるかということになろう。

ところで、著者らは時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法（以下、時間領域 FE-BE 法）の理論と適用例を示してきた^{6,7)}。この理論の 1 つの大きな特徴は、時間領域の有限要素法と境界要素法を重み付き残差法で結合している点にある⁶⁾。重み付き残差法は、近似的な力のつり合い条件の表現であり、異なる種類の方程式を結合する際に生じる問題を扱う場合にも有効であることが、数題の解析例を通して確かめられた。

後述のように、ダム-基礎-貯水系の振動問題では、固体の波動方程式と流体の波動方程式を結合しなければならないが、重み付き残差法のこうした特色は、固体と流体の波動方程式を結合する場合にも役立つものと考えられる。そして、固体と流体の波動方程式を結合するための重み付き残差表示と、有限要素と境界要素を結合するための重み付き残差表示を統一的に処理できれば、時間領域 FE-BE 法に貯水の影響を組み入れることは容易になると考えられる。

さらに、著者らの展開している時間領域 FE-BE 法のもう 1 つの特徴は、時間領域で波動の放射条件を厳密に考慮できる点ばかりでなく⁶⁾、ダム-基礎系のように逸散減衰を生じる系の振動モードが容易に求められる点にある⁷⁾。したがって、時間領域 FE-BE 法によって、ダム-基礎-貯水系の振動解析が可能になるならば、たとえば、貯水がダムの振動モードにどのような影響を与えるかなど、工学的にも重要な問題に対して、興味ある解答が与えられると期待される。

本論文ではこうした視点から、著者らが展開してきた時間領域 FE-BE 法を、固体と流体の連成振動解析に適用可能な手法として定式化を行う。ここでは、前述のように、固体の波動方程式と流体の波動方程式の結合に重み付き残差法が有効であることを示し、これによって固体-流体の連成振動を考慮した時間領域 FE-BE 法のアルゴリズムが、既往の Newmark の β 法に類似した比較的単純な形で得られることを示す。次にこの手法を用いて、ダム-基礎-貯水系の振動解析を行い、本手法の有効性を検討する。

2. 固体と流体の連成振動問題の基本事項

ダム-基礎-貯水系の振動解析では、固体と流体の連成振動問題を扱う必要があるので、ここでは、この問題について基本事項を整理しておく。

(1) 固体の波動方程式

固体については、これを等方線形弾性体とすると、次

の波動方程式が成立する。

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u} = \vec{0} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

ここに、 ∇ は勾配演算子、 λ, μ はラメの定数、 ρ は質量密度、 t は時間、 \vec{u} は変位ベクトルである。ここでは、慣性力以外の物体力は考慮していない。

(2) 流体の波動方程式

流体は圧縮性の非粘性流体であると仮定する。流体が微小振幅の運動を行うとき圧力 p は次の波動方程式を満足する。

$$E_v \nabla^2 p - \rho_w \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

ここに、 ρ_w は流体の質量密度、 E_v は体積弾性率である。すなわち、流体の圧力の波動は伝播速度を C_H として、

$$C_H = \sqrt{E_v / \rho_w} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

で伝播する。

(3) 固体と流体の連成振動の方程式⁸⁾

固体と流体の境界では、両者が相互作用を行う。これを数式で表現すると次式となる。

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\sigma} = -\vec{n} p \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -\vec{n}^T \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u} \right) \rho_w \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

ここに、 $\vec{\sigma}$ は固体の表面力ベクトル、 \vec{n} は固体領域に関して外向きにとる法線ベクトルである。また、 n で微分することの意味は、法線方向の微分をとることを表わし、ベクトルの肩に付けた T は転置をとることを示す。

式 (4) の第 1 式は流体圧力と固体表面力との力のつり合い式であり、第 2 式は流体の連続式で、固体の弾性波動がどのように流体の圧力に変換されるかを示している。このように、式 (4) を通して固体と流体の波動方程式は結びつけられる。

(4) 固体と流体との連成振動方程式の離散化表示

通常の有限要素解析に現われる、境界条件から定められる節点力ベクトルを $\{P\}$ とすると、これは表面力 $\vec{\sigma}$ を用いて次式で表わされる⁸⁾。

$$\{P\} = \int_r [\Phi]^T \vec{\sigma} d\Gamma \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

ただし、ここで Γ は解析領域の境界を表わし、 $[\Phi]$ は変位を離散化するための補間関数である。

いま境界 Γ を固体と流体の境界であるとし、固体表面力と流体圧力の関係式、すなわち式 (4) の第 1 式を式 (5) に組み入れることを考える。流体の節点圧力ベクトルを $\{p\}$ 、流体圧力の補間関数を $[\Psi]$ とすれば、節点力と節点圧力の関係式が次のように得られる。

$$\{P\} = - \int_r [\Phi]^T \vec{n} [\Psi] d\Gamma \{p\} \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

したがって、マトリックス $[A]$ を次のように定義してお

けば、

$$[A] = - \int_{\Gamma} [\Phi]^T \vec{n} [\Psi] d\Gamma \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

式(4)の第1式の離散化表示式に相当する、固体の節点力と流体圧力の関係式が以下のように得られる。

$$\{P\} = [A] \{p\} \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

また、流体圧力の波動方程式を有限要素法表示した場合の圧力勾配を与える境界条件で定められる流体領域の節点力ベクトル $\{Q\}$ は、次のように表わされる。

$$\{Q\} = - \int_{\Gamma} E_v [\Psi]^T \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

式(9)に、流体の圧力勾配と固体の加速度との関係式、すなわち、式(4)の第2式を組み入れれば、この結果は次のようになる。

$$\{Q\} = \rho_w E_v \int_{\Gamma} [\Psi]^T \vec{n}^T [\Phi] d\Gamma \cdot \ddot{\{u\}} \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

したがって、式(7)で定義されたマトリックス $[A]$ を用いれば、式(4)の第2式の離散化表示式に相当する、ベクトル $\{Q\}$ と加速度 $\ddot{\{u\}}$ との関係式が以下のように得られる。

$$\{Q\} = -\rho_w E_v [A]^T \ddot{\{u\}} \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

以上の議論から、マトリックス $[A]$ は固体と流体の連成振動を関連づける重要なマトリックスであることがわかる。

3. ダム-基礎-貯水系の振動解析手法の定式化

(1) 前提条件

時間領域 FE-BE 法を用いたダム-基礎-貯水系の振動解析手法を定式化するに先立ち、以下の事項を前提条件とする。

- ① ダムの基礎は半無限均質線形弾性体として、境界要素法でモデル化する。
- ② ダムの材質は不均質であることもあるので、有限要素法でモデル化する。
- ③ 貯水部は、ダム近傍での動水圧分布の検討を行う場合を想定し、有限要素法を用いる定式化を行う。また、貯水の波動の放射条件を考慮するために、境界要素法を用いる。

以上の前提条件に基づく、ダム-基礎-貯水系のモデルを Fig.1 に示す。

(2) 各領域の基本式

前節の前提条件から明らかなように、ここでの定式化には、固体領域の有限要素と境界要素の結合ばかりでなく、

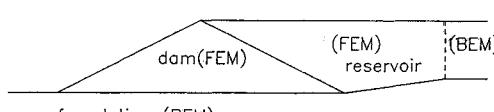


Fig.1 Model of a Dam-Foundation-Reservoir System.

固体と流体の有限要素の結合、固体の境界要素と流体の有限要素の結合、固体と流体の境界要素の結合、流体の有限要素と境界要素の結合など、多岐にわたる問題が内在している。後述するように、この問題は重み付き残差法によって、統一的に解決されるが、ここではその前段階として、各領域の基本式について示しておく。まず、ダムの領域では、固体の波動方程式を有限要素法表示するので次式となる。

$$[M_d] \{u\} + [K_d] \{u\} = \{P_{ad}\} + \{P_{rd}\} \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

ここに、 $[M_d]$, $[K_d]$ はダム領域の質量マトリックスおよび剛性マトリックス、 $\{P_{ad}\}$ はダムと基礎の動的相互作用によって現われる節点力のベクトル、さらに、 $\{P_{rd}\}$ はダムと貯水の動的相互作用によって現われる節点力のベクトルである。

次に、基礎の領域では、固体の波動方程式を境界要素法表示するので次式が成立する⁶⁾。

$$[K_r^*] \{u\}_N = \{P_{rd}\}_N + \{P_{rr}\}_N - \{F\}_N \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

ここに、 $[K_r^*]$ は境界要素領域の剛性マトリックス、 $\{F\}$ は合積演算によって生成されるベクトル、ベクトルにつけた添字の N は時間ステップを表わす。また、 $\{P_{rd}\}$ は基礎とダムの相互作用によって表わされる節点力のベクトル、さらに、 $\{P_{rr}\}$ は基礎と貯水の相互作用によって表わされる節点力のベクトルである。

次に、貯水部の有限要素領域では次式が成立する。

$$[M_r] \{\dot{p}\} + [K_r] \{p\} = \{Q_{rd}\} + \{Q_{rr}\} + \{G\}_N \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

ここに、 $[M_r]$, $[K_r]$ は貯水部の質量マトリックスおよび剛性マトリックスである。また、 $\{Q_{rd}\}$ は貯水とダムの動的相互作用に関連して現われる圧力勾配に関するベクトル、 $\{Q_{rr}\}$ は貯水と基礎の動的相互作用に関連して現われる圧力勾配に関するベクトル、 $\{G\}$ は合積演算によって生成されるベクトルである。また、 $\{Q_{rr}\}$ は貯水部の波動の放射条件に関連して現われる圧力勾配に関するベクトルである。

さらに、貯水部の境界要素領域では、基礎部と同様に次式が成立する。

$$[K_r^*] \{p\}_N = \{Q_{rr}\}_N + \{Q_{br}\}_N - \{G\}_N \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

ここに、 $[K_r^*]$ は貯水部の境界要素領域の剛性マトリックス、 $\{G\}$ は合積演算によって生成されるベクトルである。また、 $\{Q_{br}\}$ は貯水部の波動の放射条件に関連して現われる圧力勾配に関するベクトルである。

(3) 各領域の基本式の重み付き残差表示

前節ではダム-基礎-貯水系の各領域の基本式を示してきた。これらの基本式を連立して解くことでダム-基礎-貯水系の振動解析が可能になるが、これらの式は微分方程式や漸化式であり、そのまま連立させることは不可能である。さらに、前述の式(4)から明らかなように、固体の波動方程式と流体の波動方程式は微分方程式を介して結合される。したがって、各領域の方程式を結合す

そのための合理的な方法について考える必要がある。

まず、式(8)と式(11)を用いて、 $|P_{ar}|$, $|P_{sr}|$, $|Q_{rd}|$, $|Q_{rs}|$ を次のように表わす。

$$\left. \begin{array}{l} |P_{ar}| = -[\Lambda_{ar}]|p| \\ |P_{sr}| = -[\Lambda_{sr}]|p| \\ |Q_{rd}| = \rho_w E_v [\Lambda_{ar}]^T |\dot{u}| \\ |Q_{rs}| = \rho_w E_v [\Lambda_{sr}]^T |\dot{u}| \end{array} \right\} \quad (16)$$

ただし、

$$\left. \begin{array}{l} [\Lambda_{ar}] = \int_{\Gamma_{ar}} [\Phi]^T \vec{n} [\Psi] d\Gamma \\ [\Lambda_{sr}] = \int_{\Gamma_{sr}} [\Phi]^T \vec{n} [\Psi] d\Gamma \end{array} \right\} \quad (17)$$

であり、 Γ_{ar} はダムと貯水部の境界、 Γ_{sr} は基礎と貯水の境界を表わす。

ところで、著者らは時間領域で有限要素法と境界要素法を結合するために時間方向に重み付き残差法を用いてきた。これは有限要素領域内部と有限要素領域と境界要素領域の境界上で、力のつり合い条件が厳密には満足されなくなる問題を取り扱うためであった⁶⁾。

一般に、有限要素領域内部の力のつり合いは、有限要素領域の基本式である時間に関する微分方程式を、この微分方程式の解でない有限個の基底関数、すなわち時間に関する補間関数で解を展開することから生じる。また、有限要素領域と境界要素領域の境界上の力のつり合いは、それぞれの領域で用いる時間に関する補間関数の相違によるものである⁶⁾。

こうした、力のつり合いの問題を取り扱ううえで、重み付き残差法は有用な手段である。また、重み付き残差法は、微分方程式のあらゆる近似解法の出発点を与えることができるという特徴ももっている。

このようなことから、ダム-基礎-貯水系の各領域で与えられた方程式を結合するために、時間方向の重み付き残差法を用いることは1つの合理的な手段であると考えられる。そして、ここで用いる重み付き残差表示は、各領域の方程式を結合する観点から重み関数などを各領域で共通にとる必要がある。

以下にダム-基礎-貯水系の各領域を結合するための重み付き残差表示を列挙する。ここでは、式(16)で与えられた相互作用を表わす方程式の重み付き残差表示、ダム領域の方程式の重み付き残差表示、ダムと基礎の方程式を結合するための重み付き残差表示および貯水部の有限要素領域の重み付き残差表示、さらに貯水部の有限要素領域と境界要素領域を結合するための重み付き残差表示を順に示す。ただし、ここで用いる重み付き残差表示のための積分区間は、変位および圧力を2次の補間関数で展開するために、後述の時間を表わす無次元パラメーター ξ を用いて $-1 \leq \xi \leq 1$ とする。

$$\left. \begin{array}{l} \int_{-1}^{+1} W(\xi) |P_{ar}| + [\Lambda_{ar}] |p| d\xi = 0 \\ \int_{-1}^{+1} W(\xi) |P_{sr}| + [\Lambda_{sr}] |p| d\xi = 0 \\ \int_{-1}^{+1} W(\xi) |Q_{rd}| - \rho_w E_v [\Lambda_{ar}]^T |\dot{u}| d\xi = 0 \\ \int_{-1}^{+1} W(\xi) |Q_{rs}| - \rho_w E_v [\Lambda_{sr}]^T |\dot{u}| d\xi = 0 \\ \int_{-1}^{+1} W(\xi) [M_d] |\ddot{u}| + [K_d] |u| \\ \quad - |P_{ar}| - |P_{sr}| d\xi = 0 \\ \int_{-1}^{+1} W(\xi) |P_{ar}| + |P_{sr}| d\xi = 0 \\ \int_{-1}^{+1} W(\xi) [M_r] |\ddot{p}| + [K_r] |p| \\ \quad - |Q_{rd}| - |Q_{rs}| - |Q_{rs}| d\xi = 0 \\ \int_{-1}^{+1} W(\xi) |Q_{rd}| + |Q_{rs}| d\xi = 0 \end{array} \right\} \quad (18)$$

ここに、 $W(\xi)$ は重み関数である。また、 ξ は前述のように時間を表わす無次元パラメーターであり、次式で表わされる。

$$\xi = t / \Delta t - N + 1 \quad (19)$$

ただし、 N は時間ステップを表わし、 Δt は解析のための時間増分である。

すなわち、時間を表わす無次元パラメーターで表わされた積分区間 $-1 \leq \xi \leq 1$ は、 N ステップ目の時刻を t_N とし、

$$t_N = N \Delta t \quad (20)$$

と表わせば、 $t_{N-2} \leq t \leq t_N$ となる。

このような積分区間を設定する理由は、前述のように2次の補間関数を用いていることによる。また、2次の補間関数を用いる理由は、式(12)～(16)より明らかなように、扱う微分方程式が2階の微分方程式であるため、2次以上の次数の補間関数を用いなければならないことによる。

2次の補間関数は $t_{N-2} \leq t \leq t_N$ の区間にに対して、次の3種類の関数が定義され、これを用いて、変位や圧力が展開される。

$$\left. \begin{array}{l} \phi_N(t) = \frac{(t - t_{N-1})(t - t_{N-2})}{2 \Delta t^2} \\ \phi_{N-1}(t) = \frac{(t - t_N)(t_{N-2} - t)}{\Delta t^2} \\ \phi_{N-2}(t) = \frac{(t - t_{N-1})(t - t_N)}{2 \Delta t^2} \end{array} \right\} \quad (21)$$

なお、式(18)のうち、固体と流体の波動方程式を結び付けるために用いた重み付き残差表示は、ダムと貯水の方程式および貯水と基礎の方程式を結びつけるものである。すなわち、これは固体と流体の有限要素の結合、固体の境界要素と流体の有限要素の結合、さらに固体と流体の境界要素を結合する式であることを意味する。し

たがって、固体と流体の波動方程式を結びつけるために用いた重み付き残差法によって、固体と流体は、有限要素法表示や境界要素法表示などの表示方法に関係なく、統一的に結合されることになる。

(4) ダム・基礎・貯水系の振動解析のためのアルゴリズム

式(18)で与えられた重み付き残差表示式の変位と圧力を式(21)の補間関数で展開し、積分を施すことでこれらの方程式は容易に結合される。結合された方程式は、ダム・基礎・貯水系の振動解析のための漸化式となるが、この漸化式を単純に表示するため、次のマトリックスとベクトルを定義しておく。

$$\left. \begin{array}{l} \{x\}^T = \{u\}^T \{p\}^T \\ \{E\}^T = \{F\}^T \{G\}^T \\ [\Lambda] = [\Lambda_{dr}] + [\Lambda_{fr}] \\ [T] = -\rho_w E_v [\Lambda]^T \\ [M] = \begin{bmatrix} M_d & 0 \\ T & M_r \end{bmatrix} \\ [K] = \begin{bmatrix} K_d & A \\ 0 & K_r \end{bmatrix} \\ [K^*] = \begin{bmatrix} K_f^* & 0 \\ 0 & K_r^* \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (22)$$

これらのマトリックスとベクトルを用いて表わされる、ダム・基礎・貯水系の振動解析のための漸化式は次式となる。ただし、次式は式(18)に用いる重み関数 $W(\xi)$ を偶関数として得られるものである。

$$\begin{aligned} & [M + \beta \Delta t^2 K + 1/2 \Delta t^2 K^*] \{x\}_N = [2M - (1-2\beta)\Delta t^2 K \\ & - 1/2 \Delta t^2 K^*] \{x\}_{N-1} + [-M - \beta \Delta t^2 K] \{x\}_{N-2} \\ & + 1/2 \Delta t^2 \{E\}_N + \{E\}_{N-1} \end{aligned} \quad (23)$$

ここに、 β は Newmark の β 法の β に相当するパラメーターで次式で与えられる。

$$\beta = \frac{\int_{-1}^{+1} W(\xi)(\xi+1)\xi d\xi}{2 \int_{-1}^{+1} W(\xi) d\xi} \quad (24)$$

いま、重み関数を次のように用いれば、

$$W(\xi) = |\xi| \quad (25)$$

β は次の値となる。

$$\beta = 1/4 \quad (26)$$

式(26)で与えられる β により安定な時間ステップ解析が行えるので⁶⁾、本論文では β にこの値を用いることにする。

式(23)で示された漸化式は、Newmark の β 法に類似した時間ステップ解析のアルゴリズムであるという特徴をもつが、本質的には前述の、①ダムと基礎の動的相互作用、②ダムと貯水の動的相互作用、③貯水と基礎の動的相互作用、のすべてを考慮し得る点が最大の特徴である。また、貯水部の波動や基礎面から地中に逸散する

波動の放射条件を、理論上は厳密に考慮できることも重要な点である。

なお、Wolf らは時間領域で有限要素法と境界要素法を結合させた方程式を次のように記述している⁹⁾。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} + \int_0^t [S(t-\tau)]\{u(\tau)\}d\tau = \{P\} \quad \dots (27)$$

ここに、マトリックス $[S(t-\tau)]$ は、境界要素領域の Green 関数から定められる積分方程式の核である。本論文で展開した手法と Wolf らの手法の違いは、本論文では式(27)の積分項に相当する項をあらかじめ時間方向に離散化している点にある。したがって、式(23)に現われる境界要素領域のマトリックス $[K^*]$ は時間に依存しない定数となっている。

4. 数値計算例

著者らは前述の定式化をもとに、ダム・基礎・貯水系の振動解析プログラムを作成した。この解析プログラムでは、式(23)の境界要素領域のマトリックス $[K^*]$ の対角項の算定を容易にするため以下の条件を設定している。

$$\frac{2C\Delta t}{L} < 1 \quad \dots (28)$$

ここに、 L は境界要素の長さ、 Δt は時間増分、 C は波動の伝播速度である。

ここで、固体と流体の波動の伝播速度が大きく異なる場合を考えると、固体と流体で同一のメッシュ分割を目指す限り、式(28)の条件から Δt や L の選択に大きな制約が加わることが予想される。

この問題を避けるために、本解析プログラムでは固体と流体を別々にメッシュ分割できるように配慮した。すなわち、式(7)で定義される、固体と流体の相互作用を表わすマトリックス $[\Lambda]$ を、固体と流体を別々にメッシュ分割しても求められるようにした。

なお、変位および圧力に対する空間方向の補間関数には 2 次関数を用い、有限要素には 3 角形 6 節点要素を用いている。

ここでは、以上に示した一連の過程の妥当性を検証するため、これを用いて数値計算を行った結果について検討する。

(1) ダムと基礎が剛体の場合の貯水部の振動特性

まずははじめに、ダムおよび基礎と剛体と仮定して、貯水部の振動解析を行う。ダムおよび基礎が剛体の場合の動水圧の研究は、Westergaard の研究¹⁰⁾をはじめとして数多くなされている。近年では Chopra²⁾ や Antes⁴⁾ が、ダムおよび基礎を剛体として動水圧を計算し、既往の研究結果との対比を行っている。このようにダムと基礎が剛体の場合の動水圧の数値計算は最も基本的な例題の 1

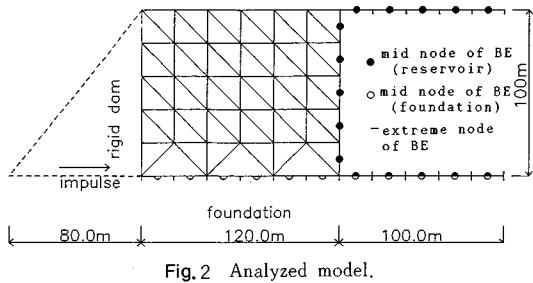


Fig. 2 Analyzed model.

つである。

ここでは、Fig. 2 に示す解析モデルを用いて動水圧の計算を行い、Antes の計算結果を中心に比較検討を行う。ただし、ダムおよび基礎が剛体であるという条件は、式(23)のマトリックス [A] をゼロとし、固体と流体の振動の非連成化をはかることで設定する。すなわち、Fig. 2 では境界要素の端節点を線分で、中央節点を小さな円で表わし、基礎と貯水のメッシュ分割の相違を表現しているが、この数値計算では基礎のメッシュ分割は数値計算結果に影響しない。また、この貯水モデルは既往の研究結果と対比するために、水深を 100 m、圧力波の伝播速度を 1438 m/s とする。ただしここでは、ダムから 120 m 離れたところに境界要素を設け、貯水部は右方へ無限に続いているものと仮定する。また、境界要素は数値計算結果に影響しないように 100 m 程度で打ち切ることにする。さらに、解析のための時間ステップ増分は 0.005 秒とする。

数値計算は、ダムと貯水の境界に単位分布の衝撃力を与えることで行う。これはダムを剛体とし、ダムの底面に単位衝撃力を与える Antes らの方法と等価である。このような解析における貯水の境界条件を示すと次式となる。

$$p=0 \text{ (自由表面および貯水右方遠方)} \\ \frac{\partial p}{\partial n}=0 \text{ (基礎面およびダムと貯水の境界)} \quad | \dots \dots \dots (29)$$

ここに ν は境界の法線方向を示す

数値計算結果のうち、ダムに加わる全動水圧の時刻歴を Fig. 3 に示す。ただし、ここでの動水圧は、ダムに加わる全静水圧で除して無次元化している。

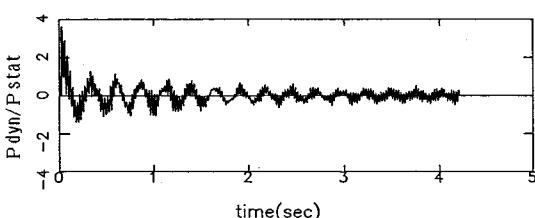


Fig. 3 Time history of total hydrodynamic force on dam with rigid dam and rigid foundation.

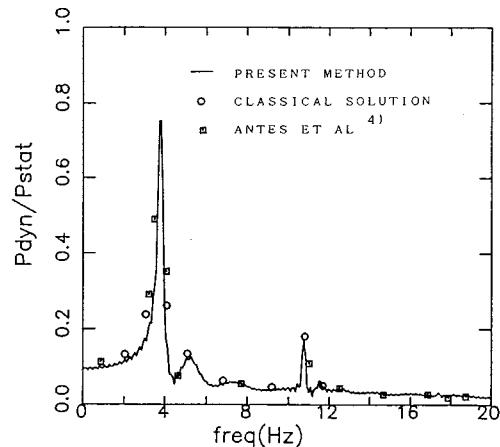


Fig. 4 Total hydrodynamic force on dam versus excitation frequency-infinite reservoir with rigid dam and rigid foundation.

この時刻歴から明らかなように、動水圧は時間の経過とともに振動しながら単調に減衰していく。このことは、貯水部の波動が自由表面と基礎との間を往復しながら、逸散していく状況を示している。このような意味で動水圧の時刻歴は貯水部の自由表面と基礎の境界条件に基づく固有振動を反映しているはずである。

式(29)に示された、自由表面と基礎の境界条件による貯水の固有振動数は次式で与えられる。

$$f_k = \frac{(2k-1) \cdot C_H}{4H} \dots \dots \dots \quad (30)$$

ここに, f は固有振動数であり, k は固有振動の次数を表わす. また, H は貯水部の水深であり, C_h は貯水部の圧力波の伝播速度である. したがって, 式 (30) によれば, 貯水部の 1 次固有振動数は 3.6 Hz, 2 次固有振動数は 10.8 Hz になる.

このような観点から、ここでは Fig. 3 の時刻歴にフーリエ変換を施し、基礎を単位振幅の加速度で調和加振した場合の動水圧を求めてみる。このような問題については、過去にも研究結果^{4), 11)}が報告されているので、これらの結果についても比較し、Fig. 4 にまとめて示す。

Fig. 4より明らかなように、ここで得られた結果は前述の固有振動をよくとらえている。また、本計算結果と既往の研究結果もよく一致している。特に、ここに示した古典解はHannaらの論文より拾ったうえで、前述の境界条件のもとで波動方程式を解析的に解き照合したものである。したがって、時間領域FE-BE法で得られた解の精度は非常に良いといえる。

さらに、ここで貯水の境界要素の打ち切りによる影響について考えてみる。仮に境界要素を打ち切ったところから反射波が生じるとすると、この波動はダムで再び反

射し固有振動を生成するはずである。ところが、Fig. 4 ではこれに相当するモードがみられない。このことは、境界要素を打ち切った位置からダムまでの距離と圧力波の伝播速度の関係をみれば明らかである。したがって、貯水の境界要素によって、貯水の波動は適切に消波されているものと考えられる。すなわち、Fig. 3 に示された時刻歴は、貯水の右方からの反射波を含まないものである。

(2) 基礎と貯水の相互作用について

次にダムを剛体、基礎を弾性体として、基礎と貯水の相互作用について検討する。ただし、ダムが剛体であるという条件は、式(23)の $[A_{dr}]$ をゼロとして、ダムと貯水の振動を非連成化することで設定する。

ここでは、解析モデルとして前述の Fig. 2 に示すものを用い、基礎の物性値としてポアソン比を 0.4、質量密度を $2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、せん断弾性係数を $1.07 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ とする。すなわち、基礎部は面内波動場として解析する。また、基礎および貯水の境界要素の長さは 20 m とし、時間ステップ解析のための時間増分は 0.005 秒とする。さらに、貯水部の圧力波の伝播速度は前述の数値計算と同様に 1438 m/s とし、加力方式はダムと貯水の境界に単位分布の衝撃力を加えるものとする。

なお、このような貯水部の解析における貯水部の境界条件は、基礎における圧力勾配が基礎との相互作用によって規定される以外は式(29)に示すものと変わらない。また、今回の数値計算は基礎と貯水の相互作用解析を行うので、基礎のメッシュ分割は数値計算に影響する。

数値計算結果のうち、ダムに加わる全動水圧の時刻歴

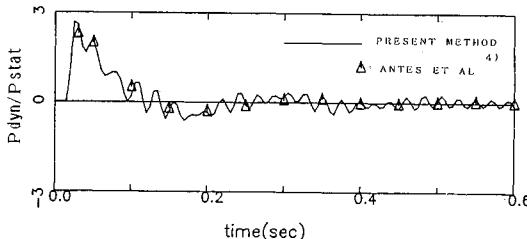


Fig. 5 Time history of total hydrodynamic force on dam-infinite reservoir with rigid dam and elastic foundation.

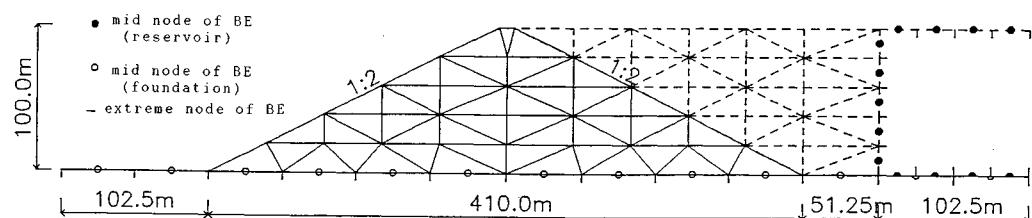


Fig. 6 Analyzed model of a fill dam with reservoir and foundation.

を Fig. 5 に示す。ここで動水圧も前述のようにダムに加わる全静水圧で除して無次元化している。また、Antes らも同様な数値計算⁴⁾を行っているので、彼らの結果を比較のために合わせてプロットしている。

この結果とダムと基礎が剛体の場合の前述の動水圧の時刻歴 (Fig. 3) を比較すればわかるように、貯水が基礎と相互作用を行う場合には、インパルスが与えられた直後に動水圧は急速に減少し、その減少の割合は基礎が剛体の場合よりも急激である。これは、基礎が弾性体であるために、貯水の波動は基礎で全反射することなく、一部が弾性波に変換され逸散していくためである。このことより、貯水と基礎が相互作用を行う場合には、動水圧のダムに与える影響は小さくなるものと考えられる。

また、本数値計算結果と、Antes らの数値計算結果は良い対応を示していることから判断して、本数値計算結果は妥当なものであると考えられる。またこれは、前述の定式化における、固体と流体の異なるメッシュ分割を許容する手法も、妥当であることを示している。

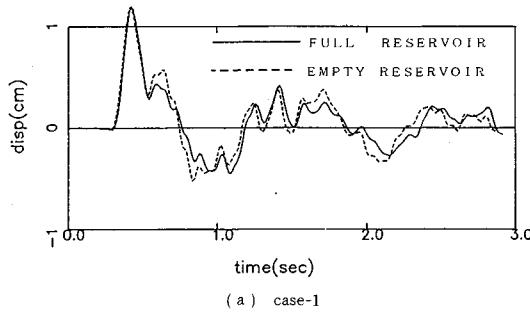
なお、Fig. 3 と Fig. 5 の時刻歴には、かなり高振動の振動成分が含まれている。これを細かく調べたところ、インパルスを与えた節点はインパルスを与えない節点に比べ顕著に高振動の振動成分が現われていた。したがって、この振動成分は物理的なものではなく、インパルス応答解析に付随する数値計算上のものであると考えられる。

(3) ダム-基礎-貯水系の相互作用について

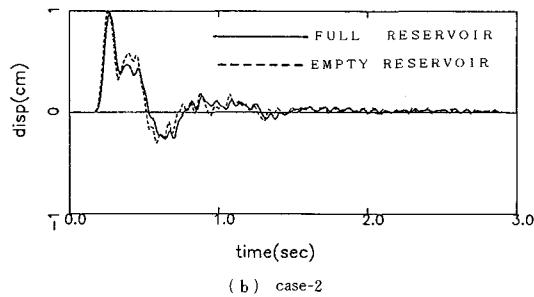
以上の数値計算例により、動水圧の計算と、貯水と基礎との相互作用解析の計算が妥当なものであることをみてきた。また、ダムと基礎の相互作用の問題については、著者らは詳細な検討をすでに行っているので⁷⁾、次にダム-基礎-貯水系の振動解析を行った結果について示す。

解析は Fig. 6 に示すフィルダムに対して行う。ここでは、ダムおよび基礎を面内波動場として扱う。また、基礎の境界要素の長さは 51.25 m、貯水の境界要素の長さは 25.625 m とし、基礎の境界要素と貯水の境界要素の長さをそれぞれ別々にとって数値計算を行う。なお、時間ステップ解析のための時間増分を 0.013 秒とする。

また、ここでの数値計算はダムと基礎のインピーダンス比を変えて行い、動水圧のダムに対する効果とイン

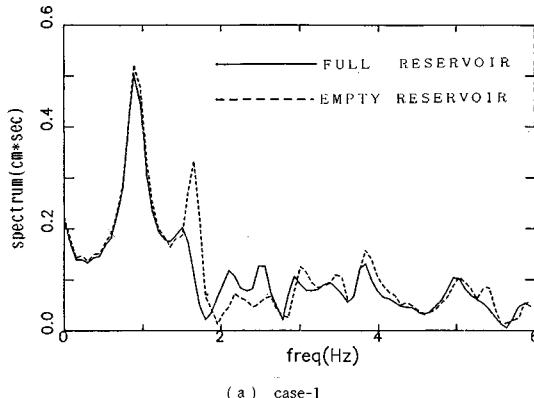


(a) case-1

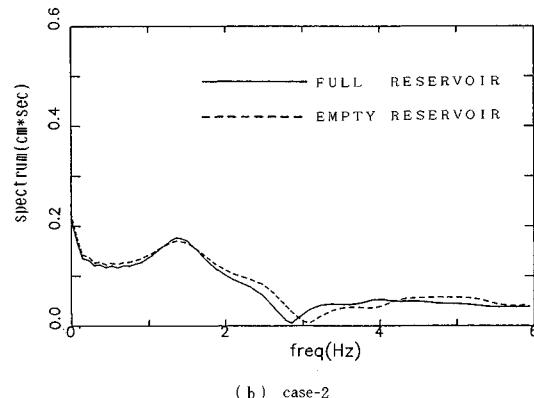


(b) case-2

Fig. 7 Time history of displacement at the crest of dam.



(a) case-1



(b) case-2

Fig. 8 Fourier spectrum of displacement at the crest of dam.

Table 1 Property of material.

CASE OF ANALYSIS	1	2
SHEAR WAVE VELOCITY OF DAM (m/s)	300	500
SHEAR WAVE VELOCITY OF FOUNDATION (m/s)	1000	1000
POISSON'S RATIO OF DAM AND FOUNDATION	0.3	0.3
MASS DENSITY OF DAM AND FOUNDATION (t/m³)	2.0	2.0
SOUND VELOCITY OF FLUID (m/s)	1438	1438
MASS DENSITY OF FLUID (t/m³)	1.0	1.0
IMPEDANCE RATIO	0.3	0.5

ピーダンス比の関係について検討する。したがって、それぞれのインピーダンス比の解析ケースについて、貯水がある場合とない場合の解析を行う。解析のための材料諸定数を Table 1 にまとめて示す。

また、加力方式は、ダムの底面に水平方向の衝撃力を等分布荷重として加えるものとし、衝撃力の合力は 3200 kN とする。

これらの解析における境界条件は、固体の自由表面で表面力をゼロ、流体の自由表面では圧力をゼロ、流体の右方の無限遠方では圧力をゼロと設定する。

解析結果のうち、ダムのクレスト位置の変位時刻歴とフーリエ・スペクトルを Fig. 7~8 に示す。これらの図中で、実線は貯水のある場合の解析結果であり、破線が

貯水のない場合の解析結果である。

動水圧の影響を変位時刻歴で眺めると、動水圧はダムの振動の位相を遅らせる働きがあることがわかる。ただし、この動水圧の作用は、時刻歴の初期に現われる振幅の大きな振動にはあまりみられず、それより後続の振幅の小さな振動によくみられる。この時刻歴のうち、初期に現われる振動成分は 1 次モードの振動と考えられ、これより後続の振動成分は、高次モードの振動と考えられる。したがって、動水圧の効果はダムの 1 次モードよりも高次のモードに現われやすいことがわかる。また、動水圧による振動の位相の遅れは、ダムと基礎のインピーダンス比の大小には、それほど依存しないようにみえる。

次に動水圧の影響をフーリエ・スペクトルで眺めてみる。フーリエ・スペクトルの際だったピークは、それぞれの振動モードに対応しているので、ここでは動水圧の影響を振動モードごとに考察することが可能である。

まず、1 次スペクトルのピークについてみると、動水圧の影響はほとんどみられず、このモードに対する動水圧の効果が小さいことがわかる。このことは、前述の時刻歴にみられた、1 次モードの振動に対する動水圧の影響が小さいことと符合する。そして、1 次のスペクトルのピークが他のピークよりも大きく支配的であることを考えると、動水圧のダムに与える効果は本解析モデルの

場合、全体として小さいといえる。

また、スペクトルの 2 次のピークは、動水圧の影響によって大幅に減少している。ただし、インピーダンス比の大きな場合の解析ケース 2 での 2 次のピークは際だってみえないが、先の研究⁷⁾により約 2.4 Hz であることがわかっている。そして、この振動数のところでは、確かに動水圧の影響でスペクトルのピークが減少している。また、このピークの減少の割合はダムと基礎のインピーダンス比によって変わり、ダムと基礎のインピーダンス比が小さく、ダムの逸散減衰が小さい場合に大きいことがわかる。

2 次モードのスペクトルのピークが減少することは、動水圧の影響でこのモードの発生が抑制されることを示している。この理由は、ダムの 2 次モードの振幅分布が動水圧の分布形状と大幅に異なるために、動水圧が作用する場合には、このモードが発生しにくくなるためと考えられる。

また、2 次以上の高次のモードについてみると、これらのピークは全体として動水圧の影響により、低振動数側にシフトしていることがわかる。前述の時刻歴にみられた、振動の位相を遅らせる動水圧の効果は、実は固有振動数を低振動数側にシフトさせる効果であったことがわかる。このような意味で、従来から指摘⁸⁾されているように、動水圧の効果は付加質量の効果であるとみなすことができる。また、本数値計算例によれば、この付加質量の効果はダムと基礎のインピーダンス比にはほとんど依存しない。

以上のことまとめると、動水圧はダムの 1 次モードにはほとんど影響を与えない、このために、時刻歴も動水圧によって大きく変化しない。このことは、本数値計算で用いたようなダムに対しては、動水圧の効果が小さいことを示している。この理由として、ダムの接水面の勾配が緩いことが挙げられる。すなわち、動水圧は法面に対して垂直に作用するので、法面の勾配が緩い場合の動水圧は、ダムの水平振動性状を大きく変えるようには作用しない。

ただし、より詳細に動水圧の効果を述べれば、動水圧がダムの振動性状に与える影響は各モードごとに異なるといえる。すなわち、動水圧は 1 次モードにはほとんど影響を与えない反面、2 次のモードを拘束し、付加質量の効果として、2 次以上の高次のモードの振動数を低振動数側にシフトする。また、付加質量の効果が、低次のモードよりも高次のモードでより明確に現われる理由としては、式(16)にみられる、ダムの加速度と動水圧との関連性を挙げることができる。すなわち、同じ変位振幅であっても、振動数が高くなれば加速度も大きくなるので、ダムの高次のモードでは貯水との相互作用は、よ

り大きなものになると考えられる。

限られた例題ではあるが、本論文で示した理論に基づく数値解は既往の研究と良い対応を示し、またダム-基礎-貯水系の振動特性を十分合理的に説明し得ることがわかった。したがって、本論文で展開された、ダム-基礎-貯水系の振動解析のための時間領域 FE-BE 法は妥当なものであり、また数値計算を通してその実用性も示すことができたと考えられる。

なお、本数値計算は、東京工業大学総合情報処理センター設置の ETA¹⁰により行った。本計算手法では、時間領域境界要素法に現われる合積演算を処理する都合上、時間ステップの増加とともに演算時間も増大する。最後のダム-基礎-貯水系の相互作用を扱った例題では、解析ステップを 300 ステップとしたところ、これに要した計算時間は、CPU で 10 分程度であった。

5. 結 論

本論文では、まずははじめに時間領域 FE-BE 法を用いたダム-基礎-貯水系の振動解析手法を展開した。ここでは、固体の振動方程式と流体の圧力に関する波動方程式が、重み付き残差法によって統一的に結合された。ここで得られたダム-基礎-貯水系の振動解析のアルゴリズムは、Newmark の β 法に類似した漸化式となる。このアルゴリズムの特徴は、波動の放射条件が理論上厳密に考慮できるばかりでなく、①ダムと基礎の動的相互作用、②ダムと貯水の動的相互作用、③貯水と基礎の動的相互作用、のすべてを考慮できる点に大きな特徴がある。

次に、このアルゴリズムを用いて、ダム-基礎-貯水系の振動解析を行った。これによれば、貯水がダムの振動に与える影響の程度は、本数値計算で示したようなケースでは小さいことがわかった。ただし、細かくみれば、動水圧の効果はダムの振動モードによって異なる。すなわち、動水圧は 1 次モードには大きな影響を与えない反面、2 次モードの発生を大幅に抑制する。また、2 次以上の固有振動数は、動水圧の付加質量の効果により、低振動数側にシフトする。これらの結果はダムと基礎および貯水の各振動性状を考え合わせれば、定性的に推察できることではあるが、本論文で示した解析により、定量的に評価できることを実証した。

参 考 文 献

- 1) Fenves, G. and Chopra, A. K. : Earthquake Analysis of Concrete Gravity Dams Including Reservoir Bottom Absorption and Dam-Water-Foundation Rock Interaction, Earth. Eng. Str. Dyn., Vol. 12, pp. 663~683, 1984.
- 2) Fenves, G. and Chopra, A. K. : Effects of Reservoir Bottom Absorption on Earthquake Response of Concrete Gravity Dams, Earth. Eng. Str. Dyn., Vol. 11, pp. 809

- ~829, 1983.
- 3) Chopra, A. K. and Permalswami, P. R. : Dam-Foundation Interaction During Earthquakes, Proc. of 3rd World Conf. Earth. Eng., A-6, pp. 37~52.
 - 4) Antes, H. and Estroff, O. V. : Analysis of Absorption Effects on the Dynamic Response of Dam Reservoir Systems by Boundary Element Methods, Earth. Eng. Str. Dyn., Vol. 15, pp. 1023~1036, 1987.
 - 5) 塩尻弘雄・田口友康：重力式ダムの地震応答解析法の開発, 電力中央研究所報告 No. 385012, 昭和60年10月.
 - 6) 東平光生・吉田 望：時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析, 土木学会論文集, No. 410/I-12, pp. 395~404, 1990.
 - 7) 東平光生・大町達夫：時間領域 FE-BE 法を用いた弾性基礎上のフィルダムの振動モード解析手法, 土木学会論文集, No. 416/I-13, pp. 477~486, 1990.
 - 8) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method, third edition, McGraw-Hill, 1977.
 - 9) Wolf, J. P. and Obernhuber, P. : Non-Linear Soil-Structure-Interaction Analysis Using Dynamic Stiffness of Flexibility of Soil in Time Domain, Earth. Eng. Str. Dyn., Vol. 13, pp. 195~212, 1985.
 - 10) Westergaard, H. M. : Water Pressure on Dams During Earthquake, Trans. ASCE 98, pp. 418~433, 1933.
 - 11) Hanna, Y. G. and Humar, J. L. : Boundary Element Analysis of Fluid Domain, J. Eng. Mech. Div., ASCE 108, pp. 436~450, 1982.

(1990.5.14・受付)