

## 鉄筋コンクリート柱の終局変位に関する解析的研究

## ANALYTICAL STUDY ON THE ULTIMATE DEFORMATION OF RC COLUMNS

中村 光\*・二羽淳一郎\*\*・田辺忠顕\*\*\*

By Hikaru NAKAMURA, Junichiro NIWA and Tada-aki TANABE

The finite displacement theory considering the effect of shear deformation is formulated. In this research, the computer program using the stiffness equation of reinforced concrete structures has been developed for the ultimate deformation analysis under cyclic loadings. Cyclic loading tests of reinforced concrete columns under axial force was carried out and the applicability of this theory was investigated. The experimental values obtained from specimens in which axial force, web reinforcement ratio and  $a/d$  were changed are compared with the calculated values. It is possible to predict the flexure or shear failure theoretically, when the instability of structures is considered.

Keywords: finite displacement theory, shear deformation, ductility, instability

## 1. 序

鉄筋コンクリート(以下 RC と略記)構造物の耐震設計の基本的な考え方として、大地震時の入力に対しては鉄筋降伏後の大きな塑性変形によって、エネルギー吸収を図ろうとする考え方がある。そのために、RC 構造物の復元力特性を求める実験からさらに歩を進めて、最終的な変形能力を求める静的正負繰り返し載荷実験が数多く行われるようになった。特に土木分野では、過去数年精力的な研究が進められているといつてよい<sup>1),2)</sup>。建築構造については土木よりも先行して同様の試みがなされている。そしてその結果をもとにした RC 部材の塑性変形能力を定量化する試みも、何人かの研究者によってなされている<sup>1),3)</sup>。

しかしながら、RC 構造物は土木・建築の両分野でその諸元等がかなり異なり、両分野で得られた成果が有機的に結び付いていないのが現状である。したがって、いずれの研究も塑性変形能力を精度よく評価するには至っていないと思われる。これは、過去になされた研究の多くが主に実験に基づいたものであったためと考えられる。

土木・建築両分野の RC 構造物に一般的に適用し得る結論を得るには、部材降伏後のメカニズムや各種要因が終局変位に及ぼす影響を解析的に評価する必要があるが、これまで行われた解析的研究は、ほとんどが部材断面のモーメント-曲率関係に基づいたものであり、上記の問題を詳細に検討することは不可能であるばかりでなく、軸力が作用する場合の構造物自身の大変形効果、終局破壊点の予測に対してきわめて重要と思われる塑性変形の分岐・不安定問題に対する解析的機能も有していない。

本研究は、上記の問題点を鑑みて有限要素法を用いて曲げ剛性・せん断剛性の劣化を考慮し得る有限変形問題の定式化を行い解析的に RC 柱が終局状態に至るまでの挙動を明らかにしようとしたものである。そして、この手法を名古屋大学および埼玉大学で独自に行われた RC 柱の実験結果と対比し、その妥当性を検証するとともに、曲げ変形およびせん断変形を有する RC 柱部材の構造不安定性と終局破壊点の関係について検討を行った。

## 2. 解析方法

本解析で用いた方法は、曲げ変形ならびにせん断変形を考慮した、棒部材に対する有限変形理論に基づく有限要素法である。解析の対象としては、一定軸力下で正負繰り返し応力を受ける任意状断面の RC 柱である。

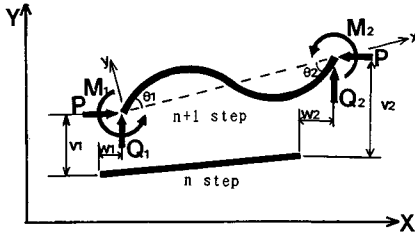
(1) 仮想仕事方程式<sup>4),5)</sup>

任意状断面の RC はり要素の仮想仕事方程式を、有限

\* 学生会員 工修 名古屋大学大学院 工学研究科  
(〒464 名古屋市千種区不老町)

\*\* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科  
(同上)

\*\*\* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科  
(同上)



図一 部材の変形

要素法により定式化するにあたり以下の仮定を設けた。

- ① 断面は変形後も平面を保つ。(平面保持の仮定)
- ② コンクリートと鉄筋との間には、ボンドスリップを考えない。

図一に示すような座標系を取り、軸力、せん断力、モーメントが作用しているはり部材を考える。せん断変形を考慮するためはりの  $x, y$  方向のおおのの変位増分  $W(x, y), V(x, y)$  を曲げ変形成分ならびにせん断変形成分を用いて以下のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} W(x, y) &= w - yv_b' \\ V(x, y) &= v_b + v_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $w$  : 軸力による軸方向変位増分  
 $v_b$  : 曲げによるたわみ変位増分  
 $v_s$  : せん断によるたわみ変位増分

であり、プライムは部材軸に関する微分を表わす。

式(1)に示した変位場を用いると、軸ひずみ、せん断ひずみはそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= (w' - yv_b'') + (v_b' + v_s')/2 \\ \gamma_{xy} &= v_s'/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

式(2)で  $w''$  は微小量なので省略している。

このとき、有限変形問題に対する増分形式で書かれた仮想仕事方程式は、表面力を  $f_x, f_y$ 、節点変位を  $u_x, u_y$  で表わすことにすれば、次のように成り立つ。

$$\begin{aligned} & \int_V \{ \sigma_x \delta(w' - yv_b'') + \tau_{xy} \delta v_s' \} dv \\ & + \int_V \{ \sigma_x \delta(v_b' + v_s') (v_b^{(0)'} + v_s^{(0)'})/2 \} dv \\ & + \int_V \{ \sigma_x^{(0)} \delta(v_b' + v_s')^2/2 \} dv \\ & + \int_S (f_x \delta u_x + f_y \delta u_y) ds = \delta W_r \dots\dots\dots (3 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W_r &= \int_S (f_x^{(0)} \delta u_x + f_y^{(0)} \delta u_y) ds \\ & - \int_V \{ \sigma_x^{(0)} \delta(w' - yv_b'') + \tau_{xy}^{(0)} \delta v_s' \} dv \\ & - \int_V \{ \sigma_x^{(0)} \delta(v_b^{(0)'} + v_s^{(0)'}) (v_b' + v_s')/2 \} dv \\ & \dots\dots\dots (3 \cdot b) \end{aligned}$$

上式中、上付きの(0)のあるものはある荷重状態における解を表わし、上付きの(0)のないものは微小な荷重増

分が作用したときの各増分を表わす。また  $\sigma_x \cdot \delta(v_b' + v_s')$  は2次の微小量であるから、これを無視して線形化している。式(3・a)の第1項が微小変形理論におけるひずみエネルギーの変分で応力がなす仮想仕事を表わし、第2項は変形の進行に伴って生じる付加応力成分のなす仮想仕事項、第3項は初期応力  $\sigma_x^{(0)}$  のなす仮想仕事項である。また式(3・b)は前段階におけるつり合い方程式が完全に満足されないために生じる不平衡力がなす仮想仕事である。

(2) 剛性方程式

有限変形理論を支配する仮想仕事方程式を導いたので、次のように、等価な増分形剛性方程式を求める。なお、長谷川ら<sup>9)</sup>は鋼構造物を対象として、せん断変形を含む大変形問題の定式化を行っている。著者らとは、導入部は異なっているが、結果的に等しい剛性マトリックスを得ている。

せん断変形による、はりのたわみ  $v_s$  はつり合いを考えることで次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dx} &= -\frac{1}{GA} \frac{dM}{dx} \\ &= -\frac{EI}{GA} \frac{d^3 v_b}{dx^3} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで、 $GA$  は有効断面のせん断剛性であり、RC部材のクラック状態などに依存する。

式(4)は曲げ変形とせん断変形との関係式であり、部材の変位増分を3次多項式と仮定すると、各変位増分の変位関数は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} w &= [N_u] \{ du \} \\ v_b &= [N_{v_b}] \{ dv \} \\ v_s &= [N_{v_s}] \{ dv \} \\ N_u &= \left[ 1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} N_{v_b} &= \left[ 1 + \frac{6k}{L^2} - \frac{3}{L^2} x^2 + \frac{2}{L^3} x^3, \right. \\ & \quad \left. - \frac{12k^2}{L^3} - \frac{4k}{L} + \left( \frac{12k}{L^2} + 1 \right) x + \left( -\frac{6k}{L^3} - \frac{2}{L} \right) x^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{L^2} x^3, \frac{6k}{L^2} - \frac{3}{L^2} x^2 + \frac{2}{L^3} x^3, \right. \\ & \quad \left. \frac{12k^2}{L^3} - \frac{2k}{L} + \left( \frac{6k}{L^3} - \frac{1}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2} x^3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{v_s} &= \left[ \frac{6k}{L^2} - \frac{12k}{L^3} x, \frac{12k^2}{L^3} + \frac{4k}{L} - \frac{6k}{L^2} x, \right. \\ & \quad \left. - \frac{6k}{L^2} + \frac{12k}{L^3} x, -\frac{12k^2}{L^3} + \frac{2k}{L} - \frac{6k}{L^2} x \right] \end{aligned}$$

ここに、 $k (= EI/GA)$  は曲げ剛性とせん断剛性の比を表わす係数で、せん断剛性が無限大ならば変位関数は一般によく知られているものと一致する。また、 $\{ du \}, \{ dv \}$  はそれぞれ部材の軸方向および鉛直方向の節点変位増分

ベクトルで次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \{du\}^T &= [w_1, w_2] \\ \{dv\}^T &= [v_1, \theta_{b1}, v_2, \theta_{b2}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

上式中、 $v_i, \theta_{bi}(i=1, 2)$ はそれぞれ*i*節点でのたわみ増分、曲げによるたわみ角増分である。節点のせん断回転角は、式(4)より曲げによる回転角に依存しており、節点の回転角増分を曲げによる回転角増分で表わすことで、はり要素は式(6)の6自由度を考えるだけでよくなる。

式(5)を式(3)に代入することにより次式のはり要素の増分形剛性方程式を得る。

$$([K] + [K_0] + [K_\theta])^{(n+1)} \{ \Delta d \}^{(n+1)} = \{ \Delta F \}^{(n+1)} + \{ F_r \}^{(n)} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、上付きの(n+1)または(n)はそれぞれ、第(n+1)あるいは第(n)段階における諸量を表わす。またK, K<sub>0</sub>, K<sub>θ</sub>はそれぞれ、構造物の剛性マトリックス、初期ひずみマトリックス、幾何剛性マトリックスであり、式(3・a)の第1項、第2項、第3項に対応するものである。F<sub>r</sub>はn段階におけるつり合い方程式が完全に満足されないために生じる不平衡力であり式(3・b)に対応するものである。なお後述するように、本解法では各荷重段階に対して座標変換を行っている。そのためK<sub>0</sub>の影響は非常に小さくなり無視しても構わなくなる<sup>7)</sup>。

式(7)が、第n段階の応力・変位の分布が既知であるとき、第(n+1)段階の変形を決定する方程式である。

(3) 繰り返し荷重を受けるコンクリートの応力-ひずみ曲線

任意断面のコンクリートの応力-ひずみ関係は図-2(a)に示すように圧縮領域にあっては、ひずみがε<sub>c0</sub>(圧縮強度時のひずみ)までは二次曲線とし、それ以降ε<sub>u</sub>まで直線的に応力が減少するとした。応力降下直線の勾配はスターラップ量およびコンクリートの圧縮強度によって影響され、その影響の程度の定式化については、Kent and Park<sup>8)</sup>モデルにより決定した。繰り返し応力下の挙動は、繰り返しによってこれまで経験した圧縮側の最大ひずみをε<sub>max</sub>とすると、ε<sub>max</sub>がε<sub>c0</sub>以下の場合には傾き

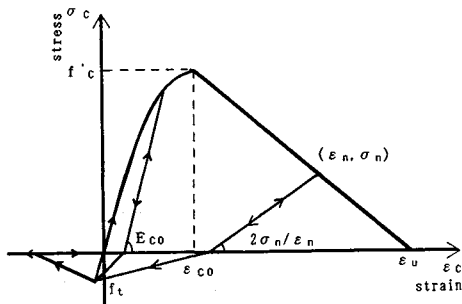


図-2(a) 応力-ひずみ関係 (コンクリート)

$E_{c0} = 2 \cdot f'_c / \epsilon_{c0}$ の直線に沿って応力が減少するとし、ε<sub>max</sub>がε<sub>c0</sub>以上の場合にはスケルトンカーブ上の点(ε<sub>max</sub>, σ<sub>max</sub>)と横軸のε<sub>c</sub>軸上の点(0, ε<sub>max</sub>/2)とを結ぶ、傾き2・σ<sub>max</sub>/ε<sub>max</sub>の直線に沿って応力は変化するとした。

引張領域にあっては、応力は最大引張応力(f<sub>t</sub>)までは傾きE<sub>c0</sub>で増加し最大引張応力を越えるとそれ以降、2000μの間引張応力が直線的に低減すると仮定した。

繰り返し時に応力が圧縮側から引張側に移るときは<sup>9)</sup>、応力は最大引張応力点を直線的に目指し、引張側から圧縮側に移るときは、応力は引張応力に転じたときのひずみまでは零で、そのひずみに到達した後に圧縮応力を受け持つとした。

(4) 繰り返し荷重を受ける鉄筋の応力-ひずみ関係

鉄筋の応力-ひずみ関係は図-2(b)に示すように、単調増加荷重の場合は引張側・圧縮側ともに降伏点までは線形を保ち、降伏点を越えると初期勾配の1/100の傾きで応力は上昇するとした。除荷する場合には、応力が逆転しない間は降伏前と同じ傾きで進行し、応力の符号が変化したら図中に示す傾きE<sub>B,i</sub><sup>10)</sup>(= -E<sub>s</sub>・log<sub>10</sub>(ε<sub>i</sub> - ε<sub>y</sub>)/6) (iは繰り返し履歴を表わしている)で単調増加荷重時の降伏曲線に交わるまで応力は上昇し、それ以降降伏曲線上を移動すると仮定した。

(5) 軸方向鉄筋の抜け出しによる水平変位

小型供試体を用いた柱部材の実験では、フーチングからの鉄筋の引き抜けによる躯体部の回転によって生じる水平変位が、全水平変位中に占める割合は非常に大きい<sup>3)</sup>といわれている。

鉄筋の抜け出し量は、次に示す仮定および計算手順により求める。

- ① フーチング内の鉄筋のひずみ分布は、図-3に示すように、鉄筋降伏前は三角形分布、鉄筋降伏後はフーチング内で鉄筋降伏位置において2つの傾きをもつものとする。ここでl<sub>e</sub>は弾性ひずみ分布長、l<sub>ey</sub>は降伏時弾性ひずみ分布長、l<sub>p</sub>は塑性ひずみ分布長である。
- ② 付着応力は鉄筋が降伏すると大きく低下すること

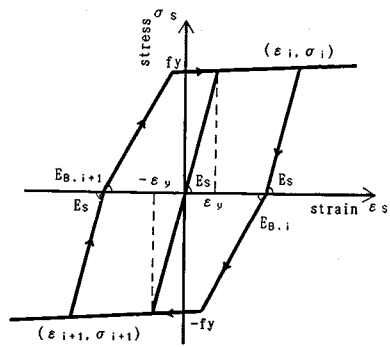


図-2(b) 応力-ひずみ関係(鉄筋)

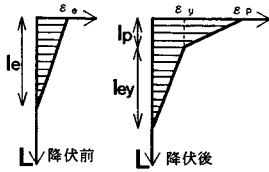


図-3 フーチング内の鉄筋ひずみ分布

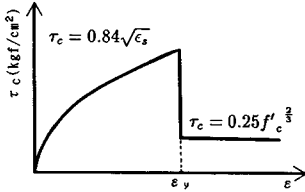


図-4 付着応力-ひずみ関係

が報告<sup>12)</sup>されている。鉄筋のひずみと平均付着応力度  $\tau_c$  の関係は既往の実験資料を参考にして図-4 のように鉄筋降伏の前<sup>11)</sup>と後<sup>12)</sup>で2つの曲線を組み合わせたものと仮定する。

③ ひずみ分布長は、鉄筋の付着応力度をフーチング上面での応力とつり合わせることで決定する。ただし、 $l_e$  部分の付着応力度は鉄筋の弾性応力と、 $l_p$  部分の付着応力度は鉄筋降伏後の応力増分とつり合わせる。

④ フーチング内のひずみ分布を鉄筋軸方向に積分した値を鉄筋の抜け出し量  $\Delta$  とし、鉄筋の抜け出しによる載荷点水平変位  $\delta_1$  は、式(8)、(9)により決定される。

$$\theta = \Delta/x \dots\dots\dots (8)$$

$$\delta_1 = h\theta = h\Delta/x \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $x$  : 中立軸から引張主鉄筋までの距離、 $h$  : 柱の長さである。

一般に鉄筋が抜け出すことは構造物の幾何学的非線形性に影響を与えると思われるが、ここでは鉄筋の抜け出しによる変形は、部材の変形とは独立と仮定した。

(6) 数値計算プログラム

前節までに示した手順により、数値計算プログラムを作成した。この中で式(7)における各剛性マトリックスおよび不平衡力を求めるために行う積分計算法としては、各要素の任意部分を図-5 に示すように、 $x$  方向に  $m$  等分、 $y$  方向に  $n$  等分し、各微小要素ごとに先に示した応力-ひずみ関係を導入し積分形式を各微小要素の総和として表わす<sup>13)</sup>。一例として任意要素における剛性マトリックス(6×6)の2行2列の成分  $K_{22}$  (水平変位のせん断力への寄与分) について具体的に示す。

$$K_{22} = \sum_{j=1}^m \frac{EI(j)}{L^3(1+T_j)^2} \{ (36L_i^2 + 144k_j)(r_{j+1} - r_j) - 72L_i(r_{j+1}^2 - r_j^2) + 48(r_{j+1}^3 - r_j^3) \} \dots\dots (10)$$

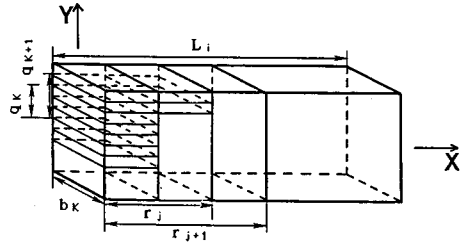


図-5 微小要素

$$EI(j) = \sum_{k=1}^m E(i, j, k) b_k (q_{k+1}^3 - q_k^3) / 3 \dots\dots\dots (11)$$

$$T(j) = 12k(j) / L_i^2 \dots\dots\dots (12)$$

$$k(j) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{GA(j)} E(i, j, k) b(k) \{ (q_{k+1}^3 - q_k^3) / 3 + y_0(q_{k+1}^2 - q_k^2) + y_0^2(q_{k+1} - q_k) \} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $y_0$  は、中立軸と中心軸との距離

断面のひずみ分布より任意の微小部分のヤング係数  $E(i, j, k)$  が求まり、それに中心軸に対する微小部分の断面2次モーメントを乗ずることで任意の微小部分の曲げ剛性が求まる。この操作を任意断面のすべての微小要素について行い、それらの和をとることで任意断面の曲げ剛性  $EI(j)$  が正確に把握できる(式(11)参照)。求めた部材方向の各分割位置での曲げ剛性を軸方向に和をとることで、解析に用いる剛性マトリックスの成分が求まる(式(10)参照)。なお  $GA(j)$  は断面に対し任意に与える。

ここで鉄筋コンクリートのように変形に従い中立軸が移動する断面では、部材方向の軸線が一定である条件を満たす必要がある。そのため断面2次モーメントは常に中心軸回りで考え、中立軸の移動は断面1次モーメントにより考慮する。

解析は以上のようにして求めた各要素の増分剛性方程式を各変位段階ごとに部材座標系から全体座標系に変換し、構造物全体の増分剛性方程式を用い、Newton-Raphson法に基づく変位増分法により行っている。また各変位段階では、構造物の接線剛性マトリックス( $[K] + [K_\theta]$ )の行列式および固有値・固有ベクトルを求めている。

3. RC柱の大変位実験に対する解析値の適合性

(1) 名古屋大学におけるRC柱の正負交番載荷実験

上述の解法の妥当性および、RC柱に軸力が作用したときの軸力が構造物に及ぼす影響を検討するため、RC柱の正負交番載荷実験を行った。

a) 供試体

破壊時にかなり大きな変形をさせるためスレンダーな柱を想定して、供試体の諸元を決定した。供試体の形状は図-7に示すようなI形断面を有し、高さ100(cm)、せん断スパン比12.5のRC柱である。なお、本供試体の引張鉄筋比は、0.67(%)、帯鉄筋 ( $A_s=0.0078(\text{cm}^2)$ 、4 cm ピッチ) 比は0.45(%)である。表-1に使用したコンクリートおよび鉄筋の機械的性質を示したが、コンクリートの圧縮強度および鉄筋の降伏点強度は、それぞれ305 (kgf/cm<sup>2</sup>)、2412 (kgf/cm<sup>2</sup>) である。図-8は、実験で用いた異形鉄筋(D3)の引張試験により得られた応力-ひずみの関係で、解析に用いた応力-ひずみ関係は図中に実線で示した。

なお、供試体は柱部分とフーチングを別々に作成した後、フーチング中心部に開けておいた穴に柱部分を差し込み、両者の隙間をモルタルで埋め一体化することにより作成した。

b) 載荷方法

載荷装置図を図-6に示したが、載荷は軸力を一定の

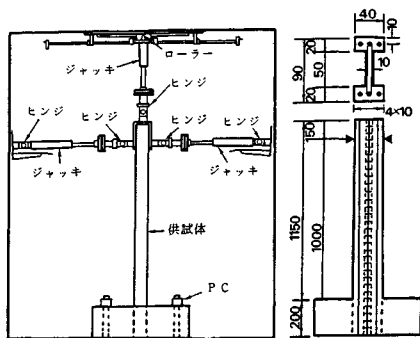


図-6 載荷装置の概略

図-7 供試体

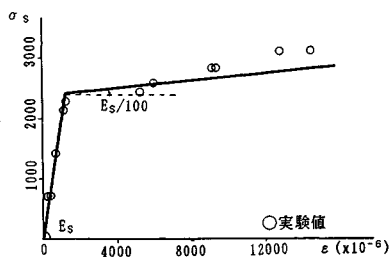


図-8 鉄筋(D3)の応力-ひずみ関係

表-1 材料の機械的性質

| 鉄筋                              |                                 | コンクリート                          |                                  |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| $E_s$<br>(kgf/cm <sup>2</sup> ) | $f_y$<br>(kgf/cm <sup>2</sup> ) | $E_c$<br>(kgf/cm <sup>2</sup> ) | $f'_c$<br>(kgf/cm <sup>2</sup> ) |
| $1.6 \times 10^6$               | 2412                            | $2.05 \times 10^5$              | 305                              |

値 ( $\sigma_0=20 \text{ kgf/cm}^2$ ) に保ち、柱頭部の水平変位を部材角が  $\pm 0.005, \pm 0.01, \pm 0.015, \pm 0.03, \pm 0.06, \pm 0.09$  となるように漸増しながら静的に行った。作用軸力はヒンジを介して供試体頭部に加えた。供試体頭部が水平荷重によって大きく変位しても、軸力が頭部より正しく鉛直下方に作用する条件を満たすために、鉛直方向ジャッキと上部のはりとの間にローラーを挿入して、供試体頭部の水平変位量と等しい距離だけ鉛直方向ジャッキを平行移動させた。

c) RC柱の終局変位と耐荷力

実験結果のうち、水平変位と水平荷重の関係を図-9の実線で示した。供試体はかなり靱性に富んだ傾向を示し、部材角が1/10の大変形を生じている。供試体は、引張鉄筋降伏を越えた変位での加力を数回繰り返すと、各繰り返しごとにクラックの発生、進展などが顕著になってくるがかぶりコンクリートの剥落は認められなかった。最終的な破壊は、塑性化した圧縮側鉄筋がコンクリート内で座屈し、かぶりコンクリートを押し出した時点で生じた。また実験において鉄筋の抜け出しはほとんど認められなかったため解析はこれを無視して行った。解析結果を図-9の点線で示す。解析値は部材角が約1/10となる大変形領域まで実験値をよく追従している。

図-10は、実験値の包絡線と、本解析で行った単調載荷解析とを比較したものである。繰り返し載荷時の荷重変位曲線の包絡線は、鉄筋が降伏した後もある範囲まで

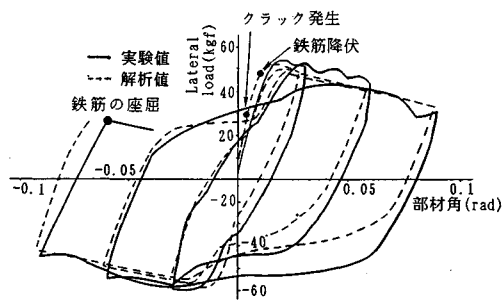


図-9 荷重-変位関係

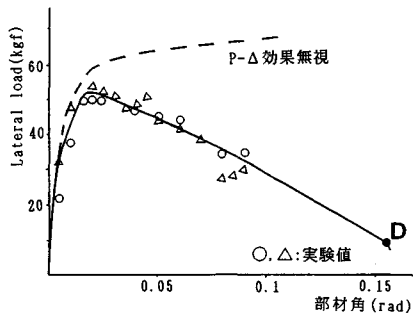


図-10 荷重-変位関係

は単調載荷時の荷重変位曲線におおむね一致することが認められている。図中○印が正加力側の実験値、△印が負荷力側の実験値を示し、実線が本解析値、破線が微小変形理論による解析値である。本実験のように大きな変形をする供試体に対しては、 $P-\Delta$ 効果は非常に顕著に現われ、微小変形理論による解析では追従が不可能であり、有限変形解析を行うことにより実験値をかなり正確に追従できるようになることがわかる。またこの図のD点は接線剛性マトリックスの行列式が零になる点で、いわゆる分岐点となる。この後は、構造自身が不安定となり急速に耐力を失う。D点以前では、荷重変形曲線は負勾配であっても軸荷重を保持し得ると考えられる。

(2) 埼玉大学におけるRC柱の正負交番載荷実験

名古屋大学のRC柱は、実構造物に比べれば断面は相当小さく、使用した鉄筋も実験用の直径3mmのものである。一方、埼玉大学がRC橋脚を想定して行った、正負交番載荷実験で用いた供試体<sup>14)</sup>は図-11に示すように、比較的大型な断面寸法(20×15cm)を有している。そこで、軸力・帯筋量・せん断支間比を変数として行った実験結果について、単調載荷解析を適用してその適合性を検討してみる。解析に用いた材料特性を表-2に示す。載荷方法としては、降伏荷重時の変位を $\delta_y$ として、以降は変位制御で $\pm\delta_y, \pm 2\delta_y, \dots$ をおのおの10回繰り返している。

a) 軸力が柱の終局変位に及ぼす影響

鉄筋コンクリート柱の変形性能に影響を与える因子のうち、軸力は最も影響の大きい要因と考えられる。図-12の実線は、軸応力( $\sigma_a$ )が0および20(kgf/cm<sup>2</sup>)の実験値の包絡線を示している。繰り返し載荷を行っているので、その包絡線のみを示したものである。解析の結果は図-12の点線で示したが、適用した解析は単調載荷解析なので、荷重最大になった後で徐々に実験と解析値との差が大きくなっている。この理由については後に述べるが、

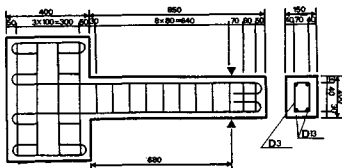


図-11 供試体(埼玉大学)

表-2 解析条件

| コンクリート                                 |                                       |                            | 主鉄筋                                  |                       |
|--|---------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------|-----------------------|
| 圧縮強度, $f'_c$<br>(kgf/cm <sup>2</sup> ) | 引張強度, $f_t$<br>(kgf/cm <sup>2</sup> ) | 圧縮強度時のひずみ, $\epsilon_{cb}$ | 降伏点, $f_y$<br>(kgf/cm <sup>2</sup> ) | 降伏ひずみ, $\epsilon_y$   |
| 300                                    | 60                                    | $3000 \times 10^{-6}$      | 4000                                 | $2500 \times 10^{-6}$ |

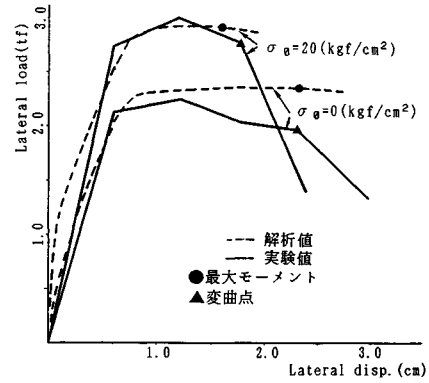


図-12 荷重-変位関係

この検討の範囲であっても、実験値と解析値との整合性はかなり良い。要するに、軸力の影響を解析値は妥当に評価しているといえる。解析値は荷重変位曲線の立ち上がりの傾きが異なっているが、これは軸力により解析上のクラック発生荷重を考慮しているためで、実験値のカーブは直線が引かれており、ひびわれ荷重を無視した形になっている。

b) 帯鉄筋比( $\rho_w$ )が柱の終局変位に及ぼす影響

図-13の実線で、埼玉大学の実験結果を示す。帯鉄筋比は、それぞれ0.077(%), 0.12(%), 0.23(% )である。これに対応する解析は図-13の点線で示している。帯鉄筋量の影響は、コンクリートの応力-ひずみ曲線の応力降下直線の勾配を先に示したKent and Parkモデルにより変化させることで考慮している。帯鉄筋の拘束効果は主に、拘束されたコンクリートの①最大強度を増加させ、②最大強度以降の応力低下率を軽減させることである。本解析では②のみを考慮しているため、鉄筋降伏時の荷重は実験と若干異なり、3本の点線も圧縮側のコンクリートが応力低下域に入るまでは一致しているが、解析値と実験値は終局変位に至るまでいずれの帯鉄筋比に対してもおおむねよく一致している。

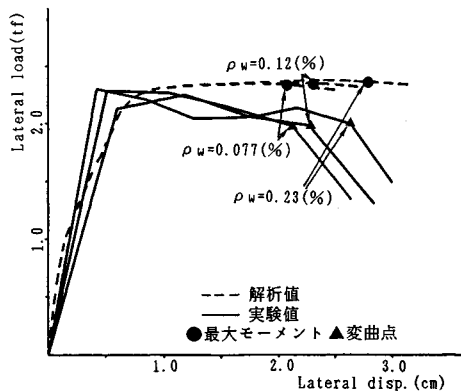


図-13 荷重-変位関係

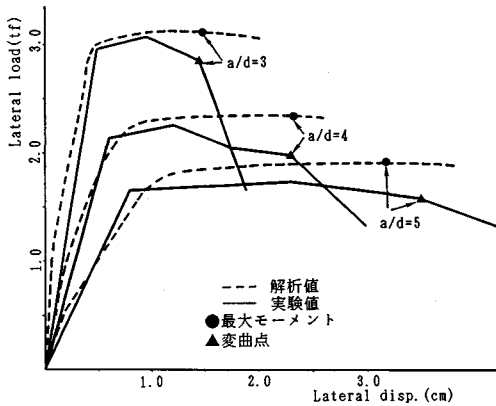


図-14 荷重-変位関係

c) セン断支間比(a/d)が柱の靱性に及ぼす影響

軸応力を 0 (kgf/cm<sup>2</sup>), 帯鉄筋を 0.12(%), d を 16(cm) と一定にして, a/d だけを 3 ~ 5 に変えた場合の実験結果を図-14 の実線で示した。実験では, a/d が小さいほど耐力は増加し, 靱性率が小さくなる傾向を示している。対応する解析結果を図-14 の点線で示したが, 解析もこの傾向を非常によく表わしている。軸力あるいは, 帯鉄筋比の場合と同様に実験は繰り返し荷重に対する包絡線であり, 解析は単調荷重に対する結果であるため最大荷重以降は実験値と解析値との差が大きくなっている。しかし a/d の影響を解析が明瞭にとらえていることは確かなようである。

4. RC 柱の靱性率に対応する解析曲線上の特異点

町田らは実験結果に基づいて最大水平荷重の 80(%) 点の変位 (δ<sub>80max</sub>) を終局変位と定義し, それを鉄筋降伏時の水平変位 (δ<sub>y</sub>) で除して靱性率と定義した。

$$\mu = \delta_{80max} / \delta_y \dots\dots\dots (14)$$

この水平荷重の 80(%) とした理由は, 水平荷重が急速に減少する点がほぼ最大荷重の 80(%) 程度になっていたためと思われる。図-12, 図-13, 図-14 を検討してみ

ると確かに 80(%) 程度の水平荷重のときに急激に水平荷重は減少している。

しかし, 本解析結果を用いると, この水平荷重の変曲点は最大モーメント点によく一致しているのがわかる。最大モーメントは, 水平荷重によるモーメントと P-Δ 効果によるモーメントの和である。解析により得られる最大モーメント点は図-12, 図-13, 図-14 の●点で, 実験より得られる水平荷重の変曲点は▲点で示している。図でみると●印は水平線上にあって明瞭に定めたいと一見感じられるが, 数値解析上では明らかに最大点は判別できる。軸力・帯鉄筋比・せん断支間比のいずれを変化させた場合にも上記の最大モーメント点と実験上の変曲点はよく対応しているのが認められる。表-3 にこれらを整理して示したが, 最大モーメント点の変位と実験上の水平荷重-変位曲線の変曲点がよく一致しているのがわかる。

RC 部材の靱性率としては, 式(15)のように定義するのがより合理的である可能性がある。つまり, 部材の終局変位は解析で断面のモーメントが最大になる変位と定義し, 靱性率は終局変位 (δ<sub>Mmax</sub>) と解析上軸方向鉄筋が降伏したときの水平変位で定義される降伏変位 (δ<sub>y</sub>) の比で定義する。

$$\mu = \delta_{Mmax} / \delta_y \dots\dots\dots (15)$$

水平荷重の変曲点の重要性は, 次のような考察からもうかがうことができる。すなわち, 鉄筋降伏後ある程度まで変形が進んだ状態で繰り返し加力を行うと, 各サイクルでの耐力が徐々に低下する。これが一方向繰り返し荷重あるいは単調増加荷重ではみられない, 正負繰り返し荷重の破壊の特徴的なものである。この耐力低下の著しくなる点を変曲点で, この変曲点以前の変位レベルでは繰り返し荷重による耐力低下はわずかである。そして, 先に示したように, 単調増加解析で得られた最大モーメントを生じる変位が, 繰り返し荷重時の耐力低下点とよく一致するのである。1つの理由としては, 最大モーメントを越えた範囲では, 圧縮側コンクリートが応力低下領域にあるためと考えられる。すなわち, この領域で繰

表-3 降伏変位, 降伏荷重および終局変位

| ρ <sub>w</sub> (%) | a/d | σ  | δ <sub>y</sub> (cm) | δ <sub>yc</sub> (cm) | δ <sub>y</sub> /δ <sub>yc</sub> | δ <sub>1</sub> /δ <sub>yc</sub> | Q <sub>y</sub> (tf) | Q <sub>yc</sub> (tf) | Q <sub>y</sub> /Q <sub>yc</sub> | δ <sub>u</sub> (cm) | δ <sub>uc</sub> (cm) | δ <sub>u</sub> /δ <sub>uc</sub> | δ <sub>1</sub> /δ <sub>uc</sub> |
|--------------------|-----|----|---------------------|----------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------|----------------------|---------------------------------|---------------------|----------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 0.12               | 4.0 | 0  | 0.6                 | 0.69                 | 0.87                            | 0.511                           | 2.13                | 2.19                 | 0.97                            | 2.29                | 2.31                 | 0.99                            | 0.516                           |
| 0.12               | 4.0 | 20 | 0.6                 | 0.73                 | 0.82                            | 0.536                           | 2.74                | 2.81                 | 0.97                            | 1.77                | 1.57                 | 1.13                            | 0.470                           |
| 0.077              | 4.0 | 0  | 0.51                | 0.69                 | 0.74                            | 0.511                           | 2.28                | 2.19                 | 1.04                            | 2.13                | 2.09                 | 1.02                            | 0.502                           |
| 0.23               | 4.0 | 0  | 0.43                | 0.69                 | 0.62                            | 0.511                           | 2.30                | 2.19                 | 1.05                            | 2.64                | 2.79                 | 0.95                            | 0.542                           |
| 0.12               | 3.0 | 0  | 0.5                 | 0.46                 | 1.08                            | 0.584                           | 2.95                | 2.98                 | 0.99                            | 1.45                | 1.49                 | 0.97                            | 0.583                           |
| 0.12               | 5.0 | 0  | 0.8                 | 0.96                 | 0.83                            | 0.469                           | 1.65                | 1.70                 | 0.97                            | 3.45                | 3.17                 | 1.09                            | 0.457                           |

δ<sub>y</sub>: 降伏変位の実験値<sup>14)</sup>      δ<sub>yc</sub>: 降伏変位の解析値      δ<sub>1</sub>: 抜け出しによる変位  
 Q<sub>y</sub>: 降伏荷重の実験値<sup>14)</sup>      Q<sub>yc</sub>: 降伏荷重の解析値  
 δ<sub>u</sub>: 実験値の変曲点<sup>14)</sup>      δ<sub>uc</sub>: 最大モーメント変位

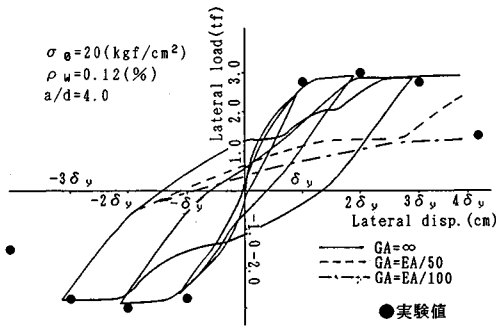


図-15 荷重-変位関係

り返しを行えば、コンクリートの抵抗応力は繰り返しごとに減少し、部材の耐力も低下する。またかぶりコンクリートの剥落などが生じ、繰り返し中にせん断変形が急増するためと思われる。ちなみに、埼玉大学の実験供試体をモデルとしてせん断変形の影響を解析的に調べてみる。

図-15は $3\delta_y$  載荷時にコンクリートの剛性に対する寄与分が、柱下部でなくなり鉄筋のみとなったとき、せん断剛性(GA)をEA/50(点線), EA/100(一点鎖線)に変えてそれぞれ解析を行ったものである。せん断剛性を小さく評価するにつれて、せん断変形の影響が大きくなり、相対的に定変位での耐力が減少しているのがわかる。解析は途中で中止しているが、耐力は $4\delta_y$ で繰り返し載荷を行うとせん断剛性の低下に伴って、点線と $4\delta_y$ の交点、一点鎖線と $4\delta_y$ の交点というように低下してゆくことが予想される。

5. RC 柱の破壊と構造不安定性

構造不安定性は、構造物の破壊を定義する1つの重要な尺度と考えられ、安定性の条件としては、「平衡の位置からの、有限の近傍内にある「任意」変位に対して内部に貯えられるかあるいは散逸するエネルギーは、外荷重が物体になす仕事よりも大きくなければならない。」<sup>10)</sup>と述べることができるが、この数学的条件は、構造物の接線剛性マトリックスの行列式を用いれば次のように書くことができる。

$$\det(K) > 0 \dots\dots\dots (16)$$

中立平衡の臨界状態の条件としては

$$\det(K) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

を満足することである。ここで式(17)は、少なくとも1つの固有値が零であることを示している。

したがって、構造物が不安定な状態である判定は、少なくとも1つの固有値が負であることで定義できる。しかしここで注意しなければならないことは、負の固有値に対して2つの状態が存在するということである。

1つは limit point を通った後であり、もう1つは

bifurcation point の後である。

limit point の典型的な例としては、構造物に荷重を作させた場合の荷重-変位曲線で荷重降下を生じる場合である。このとき、荷重制御を行えば最大荷重点までしか載荷は行えない。しかし、変位制御を行えば最大荷重後も載荷ができる。この最大荷重点が limit point であり、limit point の後は、構造物は負の固有値をもち、構造不安定な状態にあるといえる。

bifurcation point は、いろいろな平衡状態に移行するための分岐点ということである。このとき、構造物は一番エネルギーの低いモードを選択して変形すると考えられる。

そこで、埼玉大学の供試体で $\sigma_c=20(\text{kgf}/\text{cm}^2)$ ,  $\rho_w=0.12(\%)$ ,  $a/d=4.0$ の供試体をモデルとして曲げ変形だけを考慮した場合と、曲げ変形とせん断変形の両者を考慮した場合について構造不安定性に対する考察を加える。

まずせん断剛性(GA)を無限大にして曲げ変形だけを考慮した場合を考える。図-16に単調載荷解析を行った結果得られた、水平変位-水平荷重の関係を示し、図-17に図-16に示す①~⑤までの各荷重段階に対して3次までの接線剛性マトリックスの固有値・固有モードを示す。図-17は軸方向および水平方向の正規化した固有モードを示し、各モードに対応する固有値はそれぞれのモード図の下に示している。接線剛性マトリックスより得られる固有モードは、解析から得られる構造物の変形モードと一致するが、本解析の場合には各荷重段階の変形モードは、図-17に示す1次モードと同じ形となっている。なお図-16は、抜け出し量を加えていない構造物だけの変位である。②のときに一番小さな固有値が負となるが固有モードとしては変化していない。この点は limit point に対応していると思われる。図-16にみられるように、確かにこの点の後、構造物の耐力は水平変位が増加するのに従い低下しており構造物は水平荷重に対しては不安定であるといえよう。しかし鉛直荷重は十分

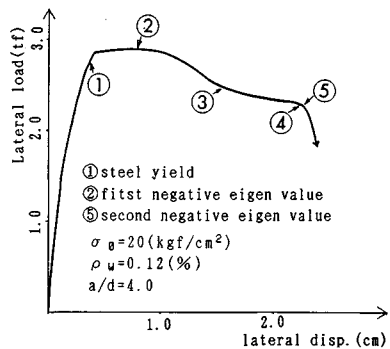
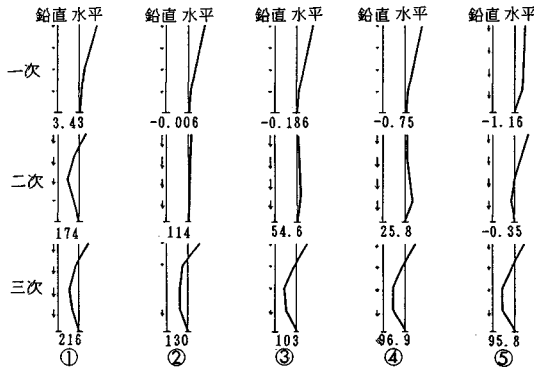


図-16 荷重-変位関係





図一17 固有モードおよび固有値

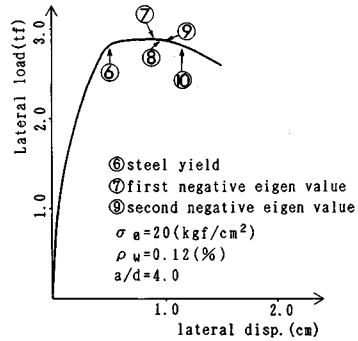
支えており、地震のような慣性力が水平荷重である場合には必ずしも構造の崩壊とはならない。またこの固有モードは2つ目の固有値が負となる前段階(④)まではほとんど変化することはなかった。しかし⑤のときに2つ目の固有値が負となると、荷重-変位曲線では耐力は急激に低下しそのときの固有モードも大きく変化している。これは bifurcation point に対応していると考えられ、この時点で初めて軸方向荷重を支えられなくなると考えられる。具体的には図一17に示すように、2つ目の固有値が負となると一次の固有モードは、鉛直方向の変形が急激に増え、水平方向は一番下の要素の変形が増えるが上側ではほとんど変形しない。このような変形形式は、実際に構造物が曲げ型の崩壊を生じた場合に認められるもので、そのような現象を解析的にとらえたものと考えられる。

次に曲げ変形ならびにせん断変形を考慮した場合を考えてみる。せん断剛性は、断面の引張最外縁にクラックが発生すると同時に、式(18)に従って低下するとした。

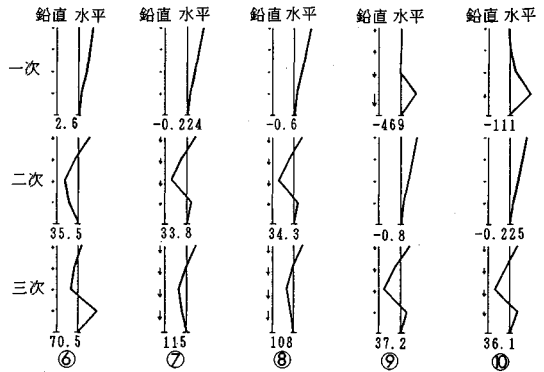
$$GA = \frac{\rho_w j d b_w E_s}{4n\rho_w + 1} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $\rho_w$ ：帯鉄筋量、 $jd$ ：圧縮材と引張材との距離、 $b_w$ ：断面の幅、 $n = E_s/E_c$ 、 $E_s$ ：スターラップのヤング率、 $E_c$ ：断面において平均化したコンクリートのヤング率

式(18)はトラスアナロジーにより求めたせん断剛性である。コンクリートの圧縮領域の性状を考慮するため、コンクリートの剛性( $E_c$ )は、各応力段階で断面のひずみより得られる細分割区間の各剛性を平均して決定している。図一18に単調増加解析を行った結果得られた水平変位-水平荷重の関係を示す。図一19に図一18に示す⑥~⑩までの各荷重段階に対する3次までの各段階の接線剛性マトリックスの固有モードを示す。⑨のときに2つ目の固有値が負となり固有モードは急激に変化した。このようなモードはせん断変形を考慮しなかった場合には得られ



図一18 荷重-変位関係



図一19 固有モードおよび固有値

なかったものである。また固有モードが急激に変化する状態も、せん断変形を考慮しなかった場合に比べかなり小さな変位で生じた。これはせん断剛性を考慮した影響と考えられ、曲げだけを考慮した場合と異なり、実際に構造物がせん断破壊する現象を示したものと考えている。したがって、せん断剛性の適切なモデルさえ与えられれば、せん断破壊現象の予測が可能と思われる。

ただし、図一18にみられるように荷重-変位曲線においては、2つ目の固有値が負になった後も特に勾配が急変することはなかった。これは数値解析の収れんアルゴリズムの特性により、1次モードを選択せずに2次モードを選択したためと思われる。1次モードを適切に選択し得る数値解析のアルゴリズムを採用すれば、より急激に耐力の低下する解析値が得られたのではないかと考えられ、このあたりはさらに検討したいと考えている。

### 6. 結 論

鉄筋コンクリート構造物の塑性変形能および終局変位に影響を及ぼす要因について解析的検討を行い、以下の結論を得た。

(1) せん断変形を考慮した有限変形理論に基づく仮想仕事方程式を有限要素法により定式化し、さらにコン

クリートのひびわれや非線形の応力-ひずみ関係を考慮した本解析手法は、部材角が1/10の大変位に至るまで、RC柱の履歴挙動を解析的に精度よく再現できることが、実験と比較を行うことにより明らかになった。

(2) 埼玉大学で行われた繰り返し載荷実験との比較により、軸力・帯鉄筋量・せん断支間比などの影響も解析的に明らかにできる可能性が示された。

(3) 本解析により求めた部材の最大曲げモーメントに対応する変位は、繰り返し載荷時に耐力が低下し包絡線の変曲点となる変位とよく一致する。したがって、繰り返し荷重を受ける場合の靱性率を解析的に評価する場合には、最大モーメント変位と降伏変位との比で定義することが合理的であると考えられる。

(4) 構造物の終局破壊点は安定性問題を考えると、bifurcation point に対応すると考えられる。

(5) 曲げ変形のみを考慮した解析を行った場合には、bifurcation point で構造物の固有モードの急変や荷重-変位曲線における耐力の著しい低下をみることができ、実際に構造物が曲げ型の崩壊を生じる現象を解析的にとらえたものと考えられる。

(6) 曲げ変形およびせん断変形を考慮した解析を行った場合には、bifurcation point で構造物の固有モードが急変し、せん断破壊する現象を解析的に示したと考えられる。なお解析結果はせん断剛性の履歴法則に依存するため、今後せん断剛性のモデルについて詳細な検討を行う予定である。

(7) 本手法は、鉄筋コンクリート部材の塑性変形性状を理論的に解明するうえで有力な手法となり得る。

謝 辞：実験を行うにあたって名古屋工業大学の梅原秀哲助教授には有益な助言を頂いた。さらに、名古屋大学の長尾宏弥技官、名古屋大学コンクリート構造研究室、名古屋工業大学コンクリート構造研究室的の皆さんに多大な協力を頂いた。ここに記して謝意を表します。

#### 参 考 文 献

1) 町田篤彦・睦好宏史・豊田和彦：鉄筋コンクリート部材の塑性変形能定量化に関する研究，土木学会論文集，第378号/V-6，pp.203~212，1987年2月。

- 2) 尾坂芳夫・鈴木基行・桑澤庄次郎・石橋忠良：静的交番繰り返し荷重下でのRC柱の履歴復元力特性に関する研究，土木学会論文集，第372号/V-5，pp.45~54，1986。
- 3) 太田 実：繰り返し荷重下における鉄筋コンクリート橋脚の挙動に関する実験的研究，土木学会論文集，第292号，pp.65~74，1979年12月。
- 4) 川井忠彦：座屈問題解析，培風館，1970。
- 5) 中村 光・田辺忠顕：RC構造物における構造不安定と靱性率との関係，コンクリート構造物の靱性とその評価法に関するコロキウム論文集，pp.153~162，JCI，1988年3月。
- 6) Hasegawa, A., Iwakuma, T. and Kuranishi, S.: A Linearized Timoshenko Beam Theory in Finite Displacements, Proc. JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 2, No. 2, October 1985.
- 7) Cook, Robert D.: Concepts and applications of finite element analysis, 2nd ed. New York, Wiley, 1981.
- 8) Kent, D.C. and Park, R.: Flexural members with confined concrete, Proceedings of ASCE, Vol. 97, No. ST7, pp.1969~1990, July 1971.
- 9) William, K.J., Bicanic, N. and Sture, S.: Constitutive and Computational Aspects of Strain-softening and Localization in Solids, ASME/WAN 84 meeting, New Orleans, Symposium on Constitutive Equations, Macro and Computational Aspects, ASME, Vol. G00274, ed. K. William, 233-252, New York, 1984.
- 10) 松本典公：モーメント-曲率関係の解析的研究によるPC橋梁の靱性設計への応用，名古屋大学学位論文，1985。
- 11) 宮武恒男・窪田敏行：鉄筋コンクリート柱に関する研究 I (降伏点の変形について)，日本建築学会関東支部，第33回学術研究発表会論文集，1966。
- 12) 島 弘・周 礼良・岡村 甫：異形鉄筋の鉄筋降伏後における付着特性，土木学会論文集，第378号/V-6，pp.213~220，1987年2月。
- 13) 梅原秀哲・田辺忠顕・吉田弥智：鋼材の付着状態を考慮したPCラーメンの履歴挙動に関する研究，土木学会論文集，第396号/V-9，pp.89~98，1988年8月。
- 14) 豊田和彦・町田篤彦・睦好宏史：RC部材の終局変位定量化に関する実験的研究，第7回コンクリート工学年次講演論文集，pp.629~632，1985。
- 15) Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, J. Mech. Phys. Solids, 6, pp.236~249, 1958.

(1989.10.4・受付)