【土木学会論文集　第419号／Ⅳ-13（ノート）1990年7月】

渋滞したネットワークにおける動的均衡配分に関する考察

SOME ASPECTS OF THE DYNAMIC EQUILIBRIUM ASSIGNMENT IN OVERSATURATED NETWORKS

桑原雅夫*
By Masao KUWAHARA

The dynamic equilibrium assignment model dealing with an oversaturated network is here simplified by several assumptions such as uniform arrivals and departures at bottlenecks in order to easily analyse the formulation and the uniqueness of the solution. Based on the simplified model, it is concluded that the dynamic equilibrium assignment cannot be generally converted to the optimization problem as in the static assignment, since the objective function is hardly defined except for some special networks. Instead, the variational inequalities are formulated using route variables (route flows and costs). However, in general, the VI formulation with link variables is not feasible. As an example illustrates, the route cost function is not monotonically increasing in route flows, which implies that a unique set of the equilibrium route flows would not be always expected.

Keywords : *oversaturated networks, queues, dynamic equilibrium assignment*

1. はじめに

過飽和ネットワークにおいては，待ち行列が生成されそこでの旅行時間の遅れは非常に大きく，交通量配分を行う場合に待ち行列は無視できない．ところで，待ち行列というのは，交通がネットワーク上に滞留する現象で，時間的に変化するものであるため，従来の時間的に静的な交通量配分手法では表現し得ない．そこで，動的な分析が必要となるわけで，これまでにもいくつかの動的交通量配分手法の研究がなされている[1),2)]．しかしながら，どのような定式化によって利用者均衡を表現できるのか，解の唯一性などについては，十分な理論的分析が行われていない．

本研究は，過飽和ネットワークで発生する待ち行列を明示的に考慮しながら，動的利用者均衡配分の特質，定式化，解の唯一性を，いくつかの簡略化の仮定を設けたうえで考察したものである．

2. 配分の仮定

ここでいう動的均衡状態とは，同時刻に起点を出発した者が現在選択している経路よりも短い旅行時間で終点まで行ける経路が見つからない状態をいう．なお起点からの出発時刻は決められているものとし，出発時刻の選択については考えないこととする．

以下のような仮定を設けて動的配分を簡略化する．

（1）第 k 番目経路の単位時間 T 当たりの流入交通量 u_k[台/T] は，時間的に変化せず一定値をとる．この仮定は同時に単位時間当たりの OD 交通需要は一定であることを意味している．ここで，経路の番号は OD ペアごとに区別せずに，すべての OD ペアについての通し番号とし，OD ペア i 間の経路番号を $k \subset i$ と書く．

（2）経路の旅行時間としては，待ち行列での待ち時間のみを考慮し，初期時刻 $t=0$ においては待ち行列は全くないものとする．すなわち，もしも待ち行列がその経路上になければ，旅行時間はゼロである．

（3）待ち行列でのサービスは FIFO(First In First Out) とし，待ち行列の物理的な長さはないものとする．

以上の仮定に基づいて，**Fig. 1** のような 1 OD 2 経路のネットワーク上に容量上のボトルネットとなるリンクが3つある場合に，待ち行列がどのように生成されていくかを縦軸に累加交通量，横軸に時間をとった **Fig. 2** で考えてみる．まず累加交通量 $A_a(t)$，$D_a(t)$ を次のように定義する．$A_a(t)$＝時刻 t までにリンク a に流入した累加交通量，$D_a(t)$＝時刻 t までにリンク a から

* 正会員　Ph. D.　東京大学生産技術研究所
（〒106　港区六本木 7-22-1）

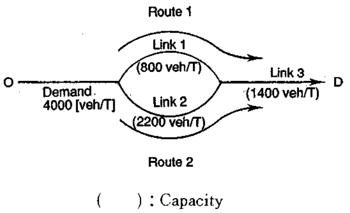

Fig. 1 A Simple Network.

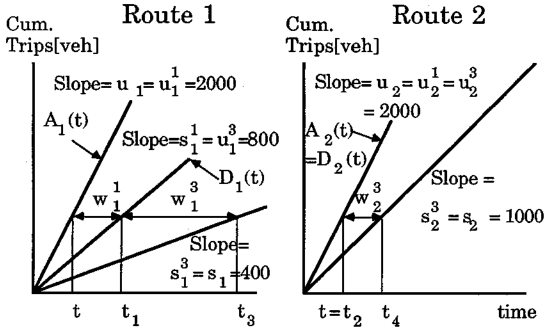

Fig. 2 Cumulative Curves at Bottleneck Links.

流出した累加交通量．

単位時間当たりの交通需要 4 000［台/T］が等分に経路 1 と 2 に流入したとすると，両経路ともに 2 000［台/T］が起点から流入するので，$A_1(t)$ と $A_2(t)$ は傾き 2 000 の直線となる．リンク 1，2 の容量 s^1 と s^2 は，それぞれ 800［台/T］と 2 200［台/T］なので，リンク 1 では待ち行列が発生するが，経路 2 では待ち行列は発生しない．したがって，リンク 1 から流出する累加交通量 $D_1(t)$ は傾き 800 をもち，リンク 2 から流出する累加交通量 $D_2(t)$ の傾きは $A_2(t)$ と同じ 2 000 となる．リンク 1 と 2 から流出した交通量は再び瞬時にリンク 3 に流入する．リンク 3 への流入交通量はリンク 1，2 からの流出交通量の和 2 800［台/T］に対し容量 s^3=1 400［台/T］なので，ここでも待ち行列が発生する．リンク 3 では経路 1 と 2 の交通量が混在するが，この待ち行列を経路 1 と 2 の交通に分離するには，仮定（3）の FIFO より容量 1 400［台/T］を，リンク 3 への流入交通量の比 800：2 000 で分配すればよい．したがって経路 1 では 400［台/T］だけ，経路 2 では 1 000［台/T］だけが終点に到着できることになり，残りの交通需要は待ち行列としてネットワーク上に滞留することになる．

この場合，時刻 t に出発した交通は，経路 1 をとった場合には時刻 t_3 に，経路 2 をとった場合には時刻 t_4 に終点の到着することとなり，均衡状態にはなっていない．

この簡略化の特徴は，もしも起点から任意の時刻 t に出発した交通について均衡解が得られたとしたら，それ以外の出発時刻の交通についても均衡条件が成立することである．これはどの経路の旅行時間も出発時刻 t について線形に増加する性質があるためである．したがって均衡配分を考える場合には，ある特定の出発時刻をもつ交通についてのみ均衡条件を満足しているかどうかを吟味すればよく，その意味ではある一断面の時刻における静的配分へと問題を置き直しているといえる．

ここで注意すべきことは，いくつかの経路に共通のリンクであっても，リンク旅行時間（ボトルネックでの待ち時間）が経路によって異なることである．この例のリンク 3 では，同じ時刻 t に起点を出発した利用者であっても，経路 1 を通った場合には時刻 t_1 にリンク 3 に流入するのに，経路 2 の場合には $t_2(<t_1)$ に流入することになる．このように経路によってリンク 3 への流入時刻が変化するため，リンク 3 の旅行時間が異なるのである．つまり，リンク旅行時間はそのリンクに流入する前にどのような経路を通ってきたのかに依存することになり，これが通常の静的配分と異なる点である．

一般に，時刻 t に起点を出発した経路 k の交通のリンク a における旅行時間 $w_k^a(U,\ t)$ は，次のように表わせる．

$$w_k^a(U,\ t)=\{1/s_k^a(U)-1/u_k^a\}\cdot u_k\cdot t \qquad (1)$$

ここに，u_k＝経路 k の単位時間当たり交通量

U＝経路交通量ベクトル＝$(u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots,\ u_k)$

u_k^a＝経路 k 上のリンク a への単位時間当たり流入交通量

$s_k^a(U)$＝経路 k 上のリンク a からの単位時間当たり流出交通量＝$s^a\cdot u_k^a/\sum_m u_m^a$

式（1）中の $u_k\cdot t$ は時刻 t までに経路 k に流入した累積台数を表わしており，これを経路 k 上のリンク a の単位時間当たりの流入交通量 (u_k^a)，流出交通量 $(s_k^a(U))$ で割ればリンク a への流入時刻と流出時刻が得られる．この両時刻の差が $w_k^a(U,\ t)$ である．

s_k^a はその経路交通量 u_k のみならず他の経路交通量にも依存するので $s_k^a(U)$ と表わすのが適当であり，リンク旅行時間は，経路交通量ベクトル U と起点からの出発時刻 t の関数なので $w_k^a(U,\ t)$ のように書ける．

一方，経路 k の旅行時間 $w_k(U,\ t)$ は，以下となる．

$$w_k(U,\ t)=\sum_a \delta_k^a\cdot w_k^a(U,\ t) \qquad (2)$$

ここに，δ_k^a は経路 k がリンク a を通る場合に 1 をとりその他の場合には 0 をとる変数である．

ところが，本仮定より，あるリンクの流入交通量は 1 つ手前のリンクの流出交通量に等しいため，結局 $w_k(U,\ t)$ は式（1）と（2）より，経路交通量 u_k と経路上の最少のリンク容量 s_k（最後に通過した待ち行列からの流出量）によって表わすことができる．たとえば，経路 1 ではリンク 1 と 3 を通過するが，リンク 1 では容量

800[台/T]が，またリンク3では容量400[台/T]が経路1に与えられるので，経路1における最少容量 s_1 は400[台/T]となる．u_1 と s_1 より，時刻 t に起点を出発した経路1の旅行時間 $w_1(\boldsymbol{U}, t)$ は，以下となる．

$$w_1(\boldsymbol{U}, t)=\{u_1/s_1(\boldsymbol{U})-1\}\cdot t=(2\,000/400-1)\cdot t \cdots (3)$$

3. 定式化

以上の簡略化のための仮定に基づいて，利用者均衡配分の定式化を試みることにする．まず，静的な配分と同様に最適化問題として動的均衡配分をみた場合の目均関数を考えてみる．あるODペア i の経路旅行時間は，式(2)のように経路上のリンク旅行時間の和で表わすことができるが，リンク旅行時間は先にも述べたように経路 k に依存した形で表わされる．したがって，経路旅行時間をリンク単位に分解して考えるメリットはなく，ここでは経路旅行時間 w_k と経路交通量 u_k を変数として定式化を考える．

制約条件としては，ODペア i について経路交通量の和がOD交通需要(q_i)に等しいという条件と，経路交通量がゼロまたは正の値をとる条件がある．

$$q_i=\sum_{k\subset i} u_k,\quad u_k\geqq 0 \cdots\cdots (4)$$

システム最適配分の場合には，計画者が定義した目均関数を式で表現すれば良いのであるが，利用者均衡配分の場合には，均衡原理を式で表現することはそう簡単なことではない．これまでの研究で明らかにされているように，目的関数が定義できるためには，経路旅行時間を経路交通量で1回偏微分してできるヤコビ行列が対称であることが必要である．

しかしながら一般には，$w_k(\boldsymbol{U}, t)$ は式(3)のように u_k のみの関数ではなく，他の経路交通量の関数である $s_k(\boldsymbol{U})$ に依存しているので，ヤコビ行列の対称性は保証されない．したがって，動的な利用者均衡配分を最適化問題としてみた場合には，その目均関数を定義することは一般には困難である．

Fig. 1 の例では，2つの経路交通量に対して式(4)のOD条件式が1つあるため，独立な経路交通量は1つとなり，ヤコビ行列は対称となる．このように，経路数とOD条件数より独立な経路が1つになる場合には，当然目的関数は定義できよう．

その他の特殊なケースとして，1つの待ち行列に流入する交通がただ1つの経路交通量だけの場合のように経路交通量の相互干渉が全くないようなネットワークにおいては，ヤコビ行列の非対角要素はゼロとなるため対称性が保証されて目的関数 $F(\boldsymbol{U}, t)$ を定義することができる．

一般には，したがって変分不等式による定式化が適当である．均衡条件は先に述べたように起点からの出発時刻 t の交通のみを考えればよく，Smith[3] によって提案されている静的配分における定式化がそのまま当てはまる．すなわち経路変数に対して，次の条件を満足する交通量が均衡経路交通量 $\boldsymbol{U}^*$ である．

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{U}^*, t)\cdot(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}^*)\geqq 0,\quad \forall \boldsymbol{U}, \cdots\cdots (5)$$

ここに，$\boldsymbol{W}=(w_1, w_2, \cdots\cdots, w_k)$,

静的な配分においては，Smith[3] が行っているように不等式(5)を経路に独立のリンク変数に置き換えることができるが，動的配分では先に述べたようにリンク旅行時間が経路に依存するために，それが困難である．

4. 解の唯一性

ここで扱っている簡略化された問題の解の存在性は不動点定理よりかなり一般性をもっていうことができるであろうが，紙面の制約からここでは省略する．

ところが，解の唯一性は一般には保証されない．解が唯一であるためには，経路旅行時間 $\boldsymbol{W}$ が，異なる任意の経路交通量，$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ に対して，

$$\{\boldsymbol{W}(\boldsymbol{U}, t)-\boldsymbol{W}(\boldsymbol{V}, t)\}\cdot(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V})>0 \cdots\cdots (6)$$

の性質をもつことが必要である[3]．式(1)を(6)に代入して整理しても，後で例を示すように一般には不等式(6)は満足されない．

唯一の解をもつ特殊な場合としては，前述のように経路間の相互干渉がないようなネットワークが挙げられる．この場合の経路旅行時間は，その経路の交通量のみの関数となるために，$w_k(u_k, t)$ は明らかに u_k に対して単調増加関数となるからである．

さらに，各経路がたった1回だけ待ち行列を通過するような場合も，唯一の解が得られる．ある待ち行列ができているリンク a のみを通過する経路交通を考えれば，u_k^a は u_k と等しいために，式(1)と(3)より，次の関係が得られるからである．

$$\sum_k \{w_k(\boldsymbol{U}, t)-w_k(\boldsymbol{V}, t)\}\cdot(u_k-v_k)$$

$$=\sum_k\left(\frac{u_k}{s^a\cdot u_k^a/\sum_m u_m^a}-\frac{v_k}{s^a\cdot v_k^a/\sum_m v_m^a}\right)(u_k-v_k)\cdot t$$

$$=t/s^a\cdot\left(\sum_m u_m^a-\sum_m v_m^a\right)^2>0.$$

ところが，1本の経路が待ち行列を何回も通過する場合には，ある待ち行列へ流入する交通量は，すでに通過した待ち行列での容量に制限されてしまう．したがって，u_k^a と u_k は一般には等しくないために，上記のような唯一性の条件が常に満足されるとは限らない．

Fig. 1 のネットワークとOD需要を用いて，以上の結果を検討してみよう．起点から時刻 t に出発した交通について2本の経路交通量と経路旅行時間の関係を示し

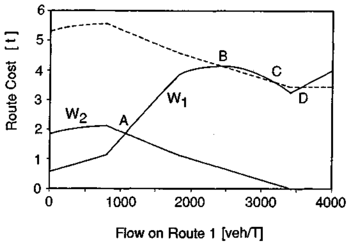

Fig. 3 Route Cost Functions.

たのが **Fig. 3** である．

経路 1 について説明すると，u_1 が 800[台/T] 以下の場合には，リンク 1 には待ち行列は発生しないが，u_2 には 3 200[台/T] 以上の交通量が流れるために，リンク 2 には待ち行列が発生する．リンク 3 への流入交通量はリンク 1 から u_1 (≦800[台/T])，リンク 2 から 2 200 [台/T] 入ってくるが，容量 1 400 を超えるのでここにも待ち行列ができる．w_1 は式 (3) より，

$$w_1=\left(\frac{u_1}{1\,400\cdot u_1/(2\,200+u_1)}-1\right)\cdot t,\quad 0\leqq u_1\leqq 800.$$

u_1 が増加し，$800<u_1\leqq 1\,800$ になるとリンク 1 にも待ち行列が発生し，3 つのリンクともに交通の滞留が生じる状態となる．

$$w_1=\left(\frac{u_1}{1\,400\cdot 800/(800+2\,200)}-1\right)\cdot t,\quad 800<u_1\leqq 1\,800.$$

しかし，u_1 が 1 800[台/T] を超えると u_2 が 2 200[台/T] 以下になるために，リンク 2 には待ち行列が発生せず，リンク 1 と 3 のみに発生する．

$$w_1=\left(\frac{u_1}{1\,400\cdot 800/(800+4\,000-u_1)}-1\right)\cdot t,\quad 1\,800<u_1\leqq 3\,400.$$

最後に，u_1 が 3 400[台/T] を超えると，u_2 が 600[台/T] 以下となり，リンク 3 に流入する交通量が 1 400[台/T] を下回り，待ち行列はリンク 1 のみに発生する状況になる．

$$w_1=(u_1/800-1)\cdot t,\quad 3\,400<u_1\leqq 4\,000.$$

このように，交通量によって待ち行列の発生するリンクがいろいろに変化するために，**Fig. 3** の w_1，w_2 はこのような単純なネットワークにおいてすら，非常に複雑な動きをする．特に興味深いのは w_1，w_2 が経路交通量に対して単調増加でないことである．この例の場合には，w_1 と w_2 は一点で交わり解は唯一である (**Fig. 3** A 点)．しかしながら，より複雑なネットワークにおいては，経路旅行時間は **Fig. 3** でみられる以上に複雑な動きをすることが容易に推察され，単調増加関数でないことから離れた複数の均衡点が存在することも十分にあり得よう．

仮にリンク 2 が有料道路であれば，経路 2 の旅行時間に料金の時間価値分が上乗せされて一様に上方にシフトし，w_1 と 3 点 (**Fig. 3** の破線上 B, C, D 点) で交わり，B, D という 2 つの均衡点が存在することも考えられよう．

5. 結　　論

本研究では，待ち行列が生成される過飽和ネットワークにおける動的な利用者均衡配分の定式化，解の唯一性について，いくつかの簡略化のための仮定に基づいて考察した．本分析から得られた結果を以下に整理する．

(1) 動的均衡配分を最適化問題としてみた場合の目的関数を定義することは一般には困難である．この理由はリンク旅行時間すなわちここでいうボトルネックでの待ち時間はそのリンクへの流入時刻によって変化するためである．つまりリンク旅行時間はそのリンクに流入する前にどのような経路を通ってきたのかに依存することになり，これが静的配分と異なる点である．

(2) 経路交通量，経路旅行時間を変数にとった場合には変分不等式による定式化が行える．しかし経路に独立のリンク交通量変数を用いた変分不等式による定式化は困難である．

(3) 解の唯一性は一般には保証されない．解が唯一であるためには，経路旅行時間関数の単調性 (monotonicity) をいうことが必要であるが，特殊なネットワークを除いて一般には単調性は満足されない．

動的な均衡配分を数学的にみた場合に，どちらかというとあまり好ましくない性質の問題であるという以上の結論は，過飽和ネットワークの特質である待ち行列の生成に起因している．本ノートでは流入交通需要が時間的に変化しない，旅行時間としては待ち行列での待ち時間のみを考慮する (経路の長さを無視する)，待ち行列の物理的長さを無視するといった簡略化の仮定がなされているが，これら仮定を外したより一般的な渋滞状況においても，モデル化が複雑になりこそすれ，待ち行列の生成によるこれらの過飽和ネットワークの基本的特質は変わらないので，以上の結論は当てはまるであろう．

参 考 文 献

1) 松井　寛：総走行時間最小化配分と等時間配分の動的化，土木学会論文報告集，No. 339，pp. 239～242，1983.

2) Merchant, D. K. and Nemhauser, G. L.：A Model and an Algorithm for the Dynamic Traffic Assignment Problems, Transportation Science, Vol. 12, No. 3, pp. 133～199, 1978.

3) Smith, M. J.：The Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibria, Transportation Research, Vol. 13 B, pp. 295～303, 1979.

(1990. 1. 23・受付)