【土木学会論文集 第419号／IV-13 1990年7月】

# 観測リンク交通量に基づくOD交通量推計の信頼度評価法

# RELIABILITY EVALUATION OF OD MATRIX ESTIMATION BASED ON OBSERVED LINK FLOWS

楊 海*・飯田恭敬**・佐佐木 綱***
*By Hai YANG, Yasunori IIDA and Tsuna SASAKI*

In recent years a large number of models have been developed to make up the actual OD matrix more precise from traffic counts. An important aspect of the model is the precision of the estimated OD matrix. Because traffic counts are generally not enough to identify the actual OD matrix, it is necessary to evaluate the accuracy of the estimated one. This paper presents some theoretical investigations into the reliability of the estimated OD matrix employing the concept of Maximum Possible Relative Error (**MPRE**). It is shown that the **MPRE** can be formulated as a simple quadratic programming problem. The proposed **MPRE** shows the upper bound for the real relative error and plays an important role in the reliability evaluation of the estimated OD matrix.

*Keywords*: *OD matrix, observed link flows, maximum possible relative error, estimated reliability*

## 1. はじめに

道路網各リンクで観測された交通量を用いてOD交通量を推計するモデルが，これまでに数多く提案されている．これらのモデルは，既存のOD交通量あるいはODパターンに基づいて，リンクでの計算交通量が観測交通量に一致するようにOD交通量を修正するものである．その代表的なモデルとしてはエントロピー最大化，情報量最小化，残差平方和最小化等がある．これらのモデルの実際問題への適用にあたっては，信頼性の高い推計結果を得るために，次の諸点を考慮する必要がある．

① モデルの適用条件を十分に検討し，条件に適応したモデルの選択を行う必要がある．

② モデルの推計結果がどの程度の推計信頼度をもっているかについて検討する必要がある．

③ 与えられた道路網とODパターンに対して，どの程度の観測リンク数をどの場所に配置すれば良いかについて分析しなければならない．

* 学生会員 工修 京都大学大学院 博士課程
（〒606 京都市左京区吉田本町）
** 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学教室
（同上）
*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学教室
（同上）

これらの点については従来の研究がきわめて少なく，研究されているものでも，ほとんどは，経験的な調査にとどまり，必ずしも明確的基準を得たとはいえない．

本研究は，「最大可能相対誤差」(Maximum Possible Relative Error (**MPRE**)) という新しい概念を提案して以上で述べた問題点について理論的な考察を試みたものである．まずモデルで用いられる入手可能な情報とその推計結果に基づいて，推計OD交通量の最大可能相対誤差という概念を定義し，その意味を明らかにする．次に最大可能相対誤差を求める問題は，簡単な二次計画問題として定式化できることを示す．また最大可能相対誤差とネットワークにおける観測リンクの配置との関係を考察する．最後に最大可能相対誤差を用いてOD交通量の推計信頼度を定義し，推計結果を評価する1つの有用な定量的指標を与える．

## 2. モデルによる推計OD交通量の最大可能相対誤差の定義と計算法

### (1) 最大可能相対誤差の定義と意味

観測リンク交通量を利用したOD交通量の推計では，高精度な，あるいは信頼性の高い推計結果を目指した推計モデルが望まれている．投入する交通量データに誤差がある場合，当然推計精度も悪くなると考えられるが，

通常のモデルの推定，検定によって，利用データの誤差から推計値の誤差，および分散・共分散を求めることができる．これについて，理論的にも実証的にも研究例が多い．Hendrickson ら (1984)[1] は，最小二乗法を用いて OD 交通量を推計する場合，推計結果に影響を及ぼす各要因を分析し，各種誤差の推計，推計結果の分散・共分散を考察した．Bell (1984)[2] は，Log-Linear モデルを対象とした既存 OD パターンと観測リンク交通量の分散・共分散から推計 OD 交通量の分散・共分散を導出している．さらにモデル入力データ（観測リンク交通量，経路選択率等）に推定誤差がある場合の影響については，シミュレーション方法を用いた飯田，高山らのいくつかの研究がある[3~5),9)]．しかしながら，入力データの誤差は，事前でも，事後でも知ることが非常に難しい．誤差分析に関する研究では，観測誤差等が多項正規分布等と仮定されており，またシミュレーションによる検討では，入力データの誤差が人為的に与えられている．

そこで本研究では，従来の研究と異なる推計 OD 交通量の最大可能相対誤差という概念を提案する．ここでいう最大可能相対誤差は，推計される OD 交通量と真実 OD 交通量との最大可能相対ずれを表わしており，推計交通量とリンク観測条件から一意的に決まるものである．

ここで，OD 交通量推計によく用いられるエントロピー最大化モデルに基づいて最大可能相対誤差という概念を説明する．

エントロピー最大化モデルによる OD 交通量推計に必要な情報は，既存 OD パターンと観測リンク交通量である．観測リンク交通量の制約条件を満足するすべての OD 交通量（$T_1, T_2, \cdots, T_n$）の集合を OD 交通量の制約領域である，**Fig. 1** の領域 $\boldsymbol{S}$ とする．領域 $\boldsymbol{S}$ 内の任意点は，OD 交通量の 1 つの実行可能な状態を表わしている．既存 OD 交通量 $t_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）という先験情報のもとで，各状態に対応するエントロピーを $E$（$T_1, T_2, \cdots, T_n$）とすると，佐佐木型エントロピーモデル[6)]の定義により，

$$E(T_1, T_2, \cdots, T_n)=\frac{T!}{\prod_i T_i!}\prod_i (q_i)^{T_i} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

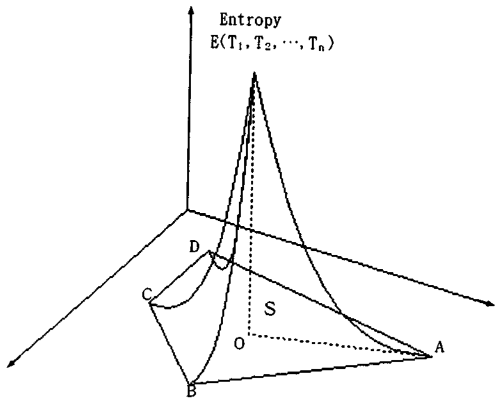
となる．

ここに，

$$T=\sum_{i=1}^{n} T_i;\quad q_i=t_i\Big/\sum_{i=1}^{n} t_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$n$ は OD ペア数，$q_i$ は単位 OD 表（先験確率）である．

$E$ は OD パターン（$T_1, T_2, \cdots, T_n$）の生じる同時確率を表わしている．エントロピー最大化モデルは，最も発生しやすい OD パターン，いわゆるエントロピー最大の OD パターンを求めるものである．ここにエントロピー最大化モデルによって推計される OD 交通量は，点 O に対応しているとしよう．いま真の OD 交通量は，制約領域 $\boldsymbol{S}$ 内のいずれかの点に対応してはいるが，どの点に対応しているかはわからない．まず点 O から最も離れた領域 $\boldsymbol{S}$ の境界点 A としよう（ただし真の OD 交通量が境界点 A になる可能性は非常に小さい）．OA 間の相対距離は，本研究で提案する最大可能相対誤差の意味を表わしている．明らかに最大可能相対誤差は，OD 交通量の制約領域 $\boldsymbol{S}$ とモデルによる推計結果から決定されることがわかる．後で述べるように，最大可能相対誤差の値は，モデルによる OD 交通量の推計信頼度の評価に関する重要な役割を果たす．




S: convex feasible region with linear constraints.
O: a point corresponding to the OD matrix estimated by the entropy maximizing model.
OA: a measure of the maximum possible relative error in the estimated OD matrix.

**Fig. 1** Graphical interpretation of the Maximum Possible Relative Error.

### （2） 最大可能相対誤差の定式化

以上で述べた最大可能相対誤差の定式化を行うためには，OD ペアごとの道路区間利用率が必要であるが，従来の OD 交通量推計モデルの多くは，OD ペアごとの利用経路と経路選択率をリンクフローと独立に考えており，これらを外生的に与えるという方法をとっている[3)~5),8)~11)]．これは短期的に起終点間の経路選択にあまり変化がない場合，あるいは交通混雑率が低い場合には適用可能である．交通混雑が経路選択に与える影響を無視できない場合，経路選択を内生化し，ネットワーク均衡を取り入れたモデル[12),13)]が最近提案されている．

本研究では，従来の多くの研究と同様に起終点間の利用経路と経路選択率は走行経路調査や Dial 確率配分法等により推定し，先決されているものとする．

いま真実 OD 交通量と推計 OD 交通量をそれぞれ $T_i^*$, $T_i$, また両者の比率を $\delta_i$ とする．

$$\delta_i=\frac{T_i^*}{T_i} \quad (T_i>0,\ \delta_i\geqq 0,\ i=1,2,\cdots,n) \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ただし，真実OD交通量 $T_i^*$ は未知である．またすべての推計OD交通量について $T_i>0$ とする．

$\delta_i\to 1$ ならば，明らかに推計値と真値とのギャップが極小に接近する．

式（2）から，次の式が得られる．

$$T_i^*=\delta_i\cdot T_i$$

また，

$$\boldsymbol{T}^*=\begin{bmatrix}\delta_1 & & & 0\\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta_n\end{bmatrix}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{DT}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ここに，

$$\boldsymbol{T}^*=\{T_1^*, T_2^*, \cdots, T_n^*\}^T$$
$$\boldsymbol{T}\ =\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}^T$$

$\boldsymbol{D}$ は，$\delta_i$ を要素とする対角マトリックスである．

ODペア $i$ の交通がリンク $a$ を通過する割合 $p_{ai}$（$a=1, 2, \cdots, m,\ i=1, 2, \cdots, n$），また観測リンク交通量 $v_a$ を次のようなマトリックスによって表わすことにする．

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}=\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}^T$$

ここに，$m$ は観測リンク数である．

観測リンク交通量に誤差がないとする場合（本研究では観測リンク交通量の誤差を考えない），$\boldsymbol{T}^*$ と $\boldsymbol{T}$ のいずれに対しても，リンクの推計交通量が観測交通量に一致しなければならない．この条件は，次のように表わすことができる．

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{PT}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{PT}^*\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

式（4）と式（5）より，

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T}^*-\boldsymbol{T})=\boldsymbol{0}$$

また式（3）より，

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}$$

あるいは

$$\boldsymbol{PHT}=\boldsymbol{0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

ここに，$\boldsymbol{I}$ は単位マトリックスである．また，

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}\delta_1-1 & & & 0\\ & \delta_2-1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta_n-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$\lambda_i=\delta_i-1=\frac{T_i^*-T_i}{T_i}\geqq -1 \quad (\delta_i\geqq 0 \text{ より})\cdots\cdots\cdots(7)$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

$\lambda_i$ はODペア $i$ の推計交通量の相対誤差を表わしている．

したがって，全ODペアの推計交通量の平均相対誤差 $\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})$ は，次のようになる．

$$\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})=\sqrt{\boldsymbol{\phi}_v(\boldsymbol{\lambda})/n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

ここに，

$$\boldsymbol{\phi}_v(\boldsymbol{\lambda})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}^T\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

さらに式（6）の左辺のうち $\boldsymbol{HT}$ は次のように変換できる．

$$\boldsymbol{HT}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\\ \vdots\\ T_n\end{bmatrix}$$
$$=\{\lambda_1 T_1, \lambda_2 T_2, \cdots, \lambda_n T_n\}^T$$
$$=\begin{bmatrix}T_1 & & & 0\\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}$$
$$=\boldsymbol{T}^d\boldsymbol{\lambda}^T$$

ここに，$\boldsymbol{T}^d$ は推計OD交通量ベクトル $\boldsymbol{T}$ を対角線要素として他の要素をすべて0とするマトリックスである．

よって，式（6）は

$$\boldsymbol{PHT}=\boldsymbol{PT}^d\boldsymbol{\lambda}^T=\boldsymbol{0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

となる．

いま，あるモデル（たとえば，エントロピーモデル）によって，OD交通量 $T_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）が推計されたとき，最大可能平均相対誤差を $\lambda_i\geqq -1$（$i=1, 2, \cdots, n$）および式（10）の制約条件のもとで，式（9）の $\boldsymbol{\phi}_v(\boldsymbol{\lambda})$ を最大にするようなベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ からなる $\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})$ として定義すると，推計OD交通量の最大可能平均相対誤差を求めることは，以下のような二次計画問題 $\boldsymbol{Qv}$ に帰着させることができる．

$$\boldsymbol{Qv}:\ \text{Maximise}\ \ \boldsymbol{\phi}_v(\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}^T\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$
$$\text{subject to}\ \ \boldsymbol{PT}^d\boldsymbol{\lambda}^T=\boldsymbol{0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$
$$\lambda_i\geqq -1 \quad (i=1,2,\cdots,n)\cdots\cdots(13)$$

OD交通量 $T_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）は，通常既存OD交通量 $t_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）という先験情報を利用して，推計されている．同様の考え方によれば，最大可能相対誤差 $\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})$ にも既存OD交通量より得られた情報を用いた方がより妥当であると考えられる．ここで既存OD交通量を用いた各推計OD交通量の相対誤差に重みを付けた最大可能加重相対誤差 $\boldsymbol{Aw}(\boldsymbol{\lambda})$ を定義する．

$\boldsymbol{W}$ を加重マトリックス（weighting matrix）とし，

既存OD交通量 $t_i$ を用いて次のように定義する．

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} w_{11} & & & 0 \\ & w_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_{nn} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

ここに，

$$w_{ii}=\frac{t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$w_{ij}=0 \quad (i\neq j)$$

マトリックス $\boldsymbol{W}$ を用いて最大可能加重相対誤差 $\boldsymbol{Aw}(\boldsymbol{\lambda})$ を求めることは，次のような問題になる．

$$\boldsymbol{Qw}: \text{Maximise } \boldsymbol{\phi}_w(\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\lambda W \lambda}^T \qquad (15)$$

subject to (12), (13)

$$\boldsymbol{Aw}(\boldsymbol{\lambda})=\sqrt{\boldsymbol{\phi}_w(\boldsymbol{\lambda})} \qquad (16)$$

**（3） 最大可能相対誤差の特性**

マトリックス $\boldsymbol{P}$ の性質によって，$\boldsymbol{\phi}_v(\boldsymbol{\lambda})$ の最大値（$\boldsymbol{\phi}_w(\boldsymbol{\lambda})$ についても同様）が無限大になる可能性がある．制約条件（12）を展開してみると，

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ai}T_i\lambda_i=0 \quad (a=1,2,\cdots,m) \qquad (17)$$

となる．もしあるODペア $j$ に対して

$$p_{aj}=0 \quad (\text{すべての } a \text{ に対して}) \qquad (18)$$

ならば，式（17）で示される $m$ 個の制約条件に対して変数 $\lambda_j$ の係数 $p_{aj}T_j$（$a=1, 2, \cdots, m$）がすべて0となり，$\lambda_j$ が$-1$より大きいすべての実数を取ることができる．この場合，$\boldsymbol{\phi}_v(\boldsymbol{\lambda})$ は無限大になる．

式（18）は，ODペア $j$ 間の交通量は，$m$ 個観測リンクのいずれをも通過しない，つまりODペア $j$ 間の関連交通量が全く観測されていない場合を示すものである．

逆に，任意ODペア $j$ に対して，$m$ 個の観測リンクのうち，少なくとも1つのリンクに対して $p_{aj}\neq(>)0$ ならば，式（17）より

$$\lambda_j=\frac{-\sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} p_{ai}T_i\lambda_i}{p_{aj}T_j}$$

$$\leqq\frac{\sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} p_{ai}T_i}{p_{aj}T_j}=C_j \quad (\text{const.}) \quad (\lambda_i\geqq-1 \text{ より})$$

したがって，$\lambda_j$ は，有限区間 $[-1, C_j]$ における値をとる．この場合，$\boldsymbol{\phi}_v(\boldsymbol{\lambda})$ が有界である．

以上のことから，最大可能相対誤差 $\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})$ に関する次の重要な性質を述べることができる．

**【Property 1】**

もしあるODペア（あるいはいくつかのODペア）の交通量がどの観測地点においても観測されていないならば，推計OD交通量の最大可能相対誤差 $\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})$ は無限大になる．

**【Property 2】**

モデルより推計されるOD交通量が有限な最大可能相対誤差をもつための必要十分条件は，いずれのODペア間の交通量も少なくとも1つの観測地点で観測されること．

以上の性質により，推計OD交通量が有限な最大可能相対誤差をもつために，交通量観測地点の配置は，次のような「OD網羅規準」を満足しなければならない．

**【OD網羅規準】**

各OD交通量がいずれかのリンクで観測されるように観測地点を配置すること．

このOD網羅規準の実際への適用を考えると，各OD交通量が起終点間のどの経路を通過するかが明らかでなければならないが，たとえば路側OD調査等の何らかの方法でOD交通の利用経路が推定できれば，OD網羅規準は交通量観測地点の最適配置計画等に適用できるといえよう．

OD網羅規準を満足する観測リンクの最小数と位置は次のような（0−1）数理計画問題として定式化できる．

$$\text{Minimise } Z=\sum_{j=1}^{L} z_j \qquad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{L} h_{ij}z_j\geqq1 \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (20)$$

ここに，

$z_j$：（0−1）変数；リンク $j$ に観測点を設置するとき1，設置しないとき0.

$h_{ij}$：（0−1）定数；$i$ ODペア間の交通がリンク $j$ を通過するとき1，通過しないとき0.

$L$：ネットワークの総リンク数.

OD網羅規準は，信頼性の高いOD交通量推計を行うための1つの必要条件であり，特に大規模ネットワークの交通量観測地点の系統的配置等の検討に有効といえる．この基準はすでに外井（1988）[7] によって提唱されているが，本研究はこの規準に重要な理論根拠を与えたことになる．

最大可能平均あるいは加重相対誤差を求める問題 $\boldsymbol{Qv}$ および $\boldsymbol{Qw}$ は，通常の二次計画問題のアルゴリズムを用いて解くことができる．特に $\boldsymbol{Qv}$ の目的関数 $\boldsymbol{\phi}_v(\boldsymbol{\lambda})$ は，座標原点から制約条件を満足する制約集合内のある点までの距離の平方を表わしていること，また以下のような制約集合の性質を留意すると，簡単に求めることができる．

**【Property 3】**

もし観測リンクが「OD網羅規準」を満足すれば，OD交通量ベクトル $\boldsymbol{T}$ の制約集合 $\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{T}\geqq\boldsymbol{0}\,|\,\boldsymbol{PT}=\boldsymbol{V}\}$$

は，閉凸多面体である．

$\boldsymbol{S}$ 内の任意2点を $\boldsymbol{T}^1$, $\boldsymbol{T}^2$ とし，2点 $\boldsymbol{T}^1$, $\boldsymbol{T}^2$ を結ぶ線分 $(1-\alpha)\boldsymbol{T}^1+\alpha\boldsymbol{T}^2$, $\forall\alpha\in[0,1]$ を考えると，

$$\boldsymbol{P}[(1-\alpha)\boldsymbol{T}^1+\alpha\boldsymbol{T}^2]=\boldsymbol{V}$$

$$(1-\alpha)\boldsymbol{T}^1+\alpha\boldsymbol{T}^2\geqq\boldsymbol{0}$$

より，この線分は $\boldsymbol{S}$ 内にある．さらにもし観測リンクが「OD網羅規準」を満足するならば，各ODペア間の交通量が $\boldsymbol{PT}=\boldsymbol{V}$ の中の少なくとも1つの制約条件に制約されることから $\boldsymbol{T}$ の要素は上に有界である．よって，集合 $\boldsymbol{S}$ は閉凸多面体である．

**【Property 4】**

もし観測リンクが「OD網羅規準」を満足すれば，任意のある推計OD交通量ベクトル $\boldsymbol{T}$（$\boldsymbol{T}>\boldsymbol{0}$）に対して，ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ の制約集合 $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{G}=\{\boldsymbol{\lambda}\geqq\boldsymbol{e}\,|\,\boldsymbol{PT}^d\boldsymbol{\lambda}^T=\boldsymbol{0}\}$$

は，1つの閉凸多面体をなしている．

ここに，$\boldsymbol{e}=(-1,-1,\cdots,-1)^T$

$\boldsymbol{G}$ 内の任意2点を $\boldsymbol{\lambda}^1$, $\boldsymbol{\lambda}^2$ とし，2点 $\boldsymbol{\lambda}^1$, $\boldsymbol{\lambda}^2$ を結ぶ線分 $(1-\alpha)\boldsymbol{\lambda}^1+\alpha\boldsymbol{\lambda}^2$, $\forall\alpha\in[0,1]$ を考えると，

$$\boldsymbol{PT}^d[(1-\alpha)\boldsymbol{\lambda}^1+\alpha\boldsymbol{\lambda}^2]=\boldsymbol{0}$$

$$(1-\alpha)\boldsymbol{\lambda}^1+\alpha\boldsymbol{\lambda}^2\geqq\boldsymbol{e}$$

より，この線分は $\boldsymbol{G}$ 内にある．また Property 2 より，もし観測リンクが「OD網羅規準」を満足するならば，$\boldsymbol{G}$ の要素は有界である．よって，集合 $\boldsymbol{G}$ は閉凸多面集合あるいは閉凸多面体である．

$\boldsymbol{Qv}$ の目的関数 $\boldsymbol{\phi}_v(\boldsymbol{\lambda})$ は，座標原点から集合 $\boldsymbol{G}$ 内のある点までの距離の平方を表わしている．集合 $\boldsymbol{G}$ は閉凸多面体であるから，$\boldsymbol{\phi}_v(\boldsymbol{\lambda})$ の最大値は，原点から $\boldsymbol{G}$ のある頂点までの距離の平方に等しいことは容易に証明できる．したがって，集合 $\boldsymbol{G}$ の有限個の頂点と原点間の距離を比較し，最大のものを知ることで，最大可能相対誤差 $\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})$ を求めることができる．

## 3.　最大可能相対誤差を用いたOD交通量の推計信頼度評価

### (1)　OD交通量の推計信頼度の定義

既存OD交通量とリンクフロー観測値からあるモデルを用いて，現時点におけるOD交通量 $\boldsymbol{T}$ が推計されたとき，$\boldsymbol{Qv}$ あるいは $\boldsymbol{Qw}$ を解いて，最大可能平均相対誤差 $\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})$ または最大可能加重相対誤差 $\boldsymbol{Aw}(\boldsymbol{\lambda})$ を求めることができる．

$\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})$ あるいは $\boldsymbol{Aw}(\boldsymbol{\lambda})$ は，区間 $[0,+\infty)$ で変動する．その大きさは，モデルによる推計結果の分布の広がりを表わしており，OD交通量の推計結果の評価指標として用いることができる．ここでは，$\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})$ を用いて次のようなOD交通量の「推計信頼度」(Estimated Reliability) $\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})$ を定義する（$\boldsymbol{Aw}(\boldsymbol{\lambda})$ を用いた場合も同様に検討することができる）．

$$\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})=\frac{1}{1+\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})}\quad(\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})\geqq 0)\cdots\cdots(21)$$

明らかに，

$$\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})=1\,;\ \text{for}\ \boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})=0$$

$$\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})=0\,;\ \text{for}\ \boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})=+\infty$$

よって

$$\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})\in[0,1]$$

さらに与えられた推計OD交通量 $\boldsymbol{T}$ に対して，二次計画問題 $\boldsymbol{Qv}$ によって，$\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})$ が一意的に求められることから，推計信頼度 $\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})$ も一意的に定まる．

このように，$\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})$ は確率値ではないが，一意的に0～1の値をとり，OD交通量の推計信頼度を表現するための1つの指標である．

### (2)　OD交通量の推計信頼度についての考察

ここで最大可能相対誤差 $\boldsymbol{Av}(\boldsymbol{\lambda})$ と推計信頼度 $\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})$ に関する2つの極端なケース（$\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})=1$ & $\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})=0$）について検討しよう．

一般に，観測リンク交通量を用いたOD交通量を推計する場合，観測リンクフローに関する制約条件式（4）

$$\boldsymbol{PT}=\boldsymbol{V}\,;\quad \boldsymbol{P}:(m\times n)\ \text{matrix}$$

においては，

$$\text{Rank}\,(\boldsymbol{P})=m\leqq n$$

としている．

(つまり，制約条件が互いに1次独立かつ未知変数より少ないとしている．もし1次従属の制約条件があれば，Gaussの消去法によってそれを排除できる)．もし

$$\text{Rank}\,(\boldsymbol{P})=m=n$$

ならば，OD交通量は，制約条件より次のように一意的に求められる．

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{V}$$

一方，制約条件式（12）

$$\boldsymbol{PT}^d\boldsymbol{\lambda}^T=\boldsymbol{0}$$

においては，$\boldsymbol{T}^d$ がOD交通量 $T_i$（$T_i>0$, $i=1, 2, \cdots, n$）を要素とする対角正則マトリックスであるから，

$$\text{Rank}\,(\boldsymbol{PT}^d)=\text{Rank}\,(\boldsymbol{P})=m$$

もし $\text{Rank}\,(\boldsymbol{P})=m=n$ ならば，明らかに，

$$\boldsymbol{\lambda}^T=\boldsymbol{0}$$

でなければならない．

この場合，

$$\boldsymbol{\phi}_v(\boldsymbol{\lambda})=0\,;\quad \boldsymbol{Av}(\boldsymbol{T})=0$$

また

$$\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})=1$$

が得られる．

これは観測リンク交通量に誤差がない場合，これらの観測リンク交通量（完全十分情報：perfect & sufficient information）によって一意的に決定されるOD交通量

が真値として完全に信頼できることを意味し，きわめて当然な結果である．

次に Property 1 で述べたように，もしある OD ペア（あるいはいくつかの OD ペア）の交通量がどの観測地点においても観測されていない場合，つまり OD 網羅基準が満たされていない場合には，最大可能相対誤差は，無限大になる．よって，推計信頼度は，

$\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})=0$

である．これは「推計結果は全く信頼できない」ということを意味することになる．

この結論を確かめるために，この場合のエントロピー最大化モデル[8]による推計結果を考察してみよう．

エントロピー最大化モデル：

$$\text{Maximise}\ \ S=-\sum_{i=1}^{n} T_i(\log T_i/t_i-1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

$$\text{subject to}\ \ \sum_{i=1}^{n} T_i p_{ai}=v_a \quad (a=1,2,\cdots,m) \cdots\cdots(23)$$

$$T_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

もしある OD ペア $i$ の当該交通量 $T_i$ がどのリンク上においても全然観測されていない場合，$T_i$ は，制約条件に関係なく，観測リンク交通量の値に無関係に，式(22)から，$T_i=t_i$ という結果が簡単に求められる．明らかにこれは信頼できない結果である．たとえば，もし $t_i$ が単位 OD 表として与えられれば，$T_i$ も単位 OD 交通量となるような不合理な結果である．

以上で 2 つの極端なケースについて検討したが，他の場合でも推計信頼度 $\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})$ は，区間 (0, 1) となる．

これまでモデルによる推計結果の信頼度について考察した．同じ入力情報（既存 OD パターンと観測リンクフロー）を用いて OD 交通量を推計する場合，利用するモデルによって，推計結果は多少相違があり，最大可能相対誤差と推計信頼度は異なる．したがって異なるモデルによる推計信頼度 $\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{T})$ を比較することで，モデルパフォーマンス間の相互比較を行うことができる．

## 4. 計　算　例

**Fig. 2** に示す 6 リンク，6 ノード，4 OD ペアの簡単なネットワークを考える．

既存 OD 交通量 $\boldsymbol{t}$，現時点における OD 交通量 $\boldsymbol{T}$ およびリンクフロー $\boldsymbol{V}$ が **Table 1** に示す値と仮定する．各 OD ペア間のリンク利用率を **Table 2** のとおりとする．

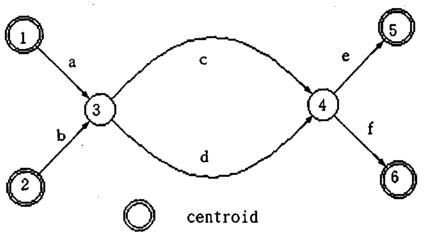



**Fig. 2** Test network.

**Table 1** A prior and actual matrix and link volumes for **Fig. 2**.

| OD Number | Node Pair | Prior Matrix | Actual Matrix | Link Volumes |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1−5 | $t_1=2$ | $T_1=6$ | $v_a=10$ |
| 2 | 1−6 | $t_2=1$ | $T_2=4$ | $v_b=13$, $v_c=8.5$ |
| 3 | 2−5 | $t_3=2$ | $T_3=5$ | $v_d=14.5$ |
| 4 | 2−6 | $t_4=3$ | $T_4=8$ | $v_e=11$, $v_f=12$ |

**Table 2** Link use proportion by OD trips.

| OD | a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0 | 0.0 | 0.4 | 0.6 | 1.0 | 0.0 |
| 2 | 1.0 | 0.0 | 0.5 | 0.5 | 0.0 | 1.0 |
| 3 | 0.0 | 1.0 | 0.5 | 0.5 | 1.0 | 0.0 |
| 4 | 0.0 | 1.0 | 0.2 | 0.8 | 0.0 | 1.0 |

**Table 3** Test results of the Maximum Possible Relative Error (*MPRE*) and Estimated Reliability (*Re*(*T*)) of the OD matrix estimated by the Entropy Maximising and Least Square Models.

| Observed Links | Model Type | Estimated OD Volume | Maximum Possible Relative Error % | Estimated Reliability Re(T) | "Real" Relative Error (%) |
|---|---|---|---|---|---|
| d | Maximum Entropy Estimator | $\hat{T}_1=5.04$ $\hat{T}_2=2.16$ $\hat{T}_3=4.32$ $\hat{T}_4=10.29$ | 627.10 | 0.138 | 45.72 |
| | Least Square Estimator | $\hat{T}_1=5.69$ $\hat{T}_2=2.84$ $\hat{T}_3=5.69$ $\hat{T}_4=8.53$ | 468.70 | 0.176 | 21.62 |
| e d | Maximum Entropy Estimator | $\hat{T}_1=5.87$ $\hat{T}_2=2.74$ $\hat{T}_3=5.13$ $\hat{T}_4=8.80$ | 299.73 | 0.250 | 23.42 |
| | Least Square Estimator | $\hat{T}_1=5.51$ $\hat{T}_2=2.97$ $\hat{T}_3=5.49$ $\hat{T}_4=8.71$ | 276.73 | 0.265 | 18.97 |
| c d | Maximum Entropy Estimator | $\hat{T}_1=5.83$ $\hat{T}_2=3.04$ $\hat{T}_3=6.08$ $\hat{T}_4=8.06$ | 179.10 | 0.358 | 18.25 |
| | Least Square Estimator | $\hat{T}_1=5.75$ $\hat{T}_2=3.15$ $\hat{T}_3=6.02$ $\hat{T}_4=8.08$ | 172.05 | 0.366 | 16.16 |
| c d e | Maximum Entropy Estimator | $\hat{T}_1=5.22$ $\hat{T}_2=3.74$ $\hat{T}_3=5.78$ $\hat{T}_4=8.26$ | 79.78 | 0.556 | 10.77 |
| | Least Square Estimator | $\hat{T}_1=5.29$ $\hat{T}_2=3.76$ $\hat{T}_3=5.71$ $\hat{T}_4=8.24$ | 78.65 | 0.560 | 9.82 |
| a c d e | P=(4×4) Matrix Rank(P)=4 | $T_1=6.00$ $T_2=4.00$ $T_3=5.00$ $T_4=8.00$ | 0.00 | 1.00 | 0.00 |
| | | | The fundamental equations PT = V are uniquely solvable, the exact OD volumes are obtained. | | |
| c d e f | $v_c+v_d=v_e+v_f$:  $v_f$ is completely dependent on the counts on the other links, and does not give any new information. | | | | |

ここに式 (22) と式 (23) で示されたWillumsenのエントロピー最大化モデル，また飯田・高山によって提案されたOD交通量の残差平方和最小化モデル（OD交通量モデル）を用いて最大可能相対誤差と推計信頼度を検討する．

OD交通量に関する残差平方和最小化モデル：

$$\text{Minimise}\quad Y=\sum_{i=1}^{n}(T_i-T\cdot q_i)^2 \tag{24}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{i=1}^{n}T_i p_{ai}=v_a \quad (a=1,2,\cdots,m) \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{n}T_i=T \tag{26}$$

OD網羅規準を満足するようないくつかの組合せの観測リンクを用いた場合，各モデルによる推計結果は，**Table 3**に示すとおりである．計算結果を考察すると，以下のことがいえる．

① 観測リンク数と観測リンク位置が推計結果の精度と信頼度に大きな影響を与えている．独立な観測リンク数が増加すれば，推計結果の精度と信頼度はともに向上する．

② 同一モデルによる推計結果を考察すると，観測リンク数の増加による最大可能相対誤差の減少に伴って，真の相対誤差も小さくなる．

③ 同じ観測リンクを用いた場合，両モデルの推計結果（推計信頼度と真実相対誤差）を比較すると，観測リンクが少ない場合には，両モデルの推計結果の差が大きいが，観測リンク数の増加に伴って，推計結果の差は小さくなる．

④ 最大可能相対誤差と真実相対誤差との関係を考察すると，最大可能相対誤差は，真実相対誤差の上限となっており，真実相対誤差は常にこの値以下である．また，観測リンクが少ない場合，最大可能相対誤差は真実相対誤差を大きく上回る．一方，独立な観測リンク数が増加すれば，OD交通量の制約領域が狭くなるため，最大可能相対誤差は，真実相対誤差に接近する．

⑤ 望まれる信頼度あるいは推計精度のOD交通量を求めるために，必要最小限の観測リンク数がある．**Table 3**をみると，観測リンク数が3個（link c, d, e）であるとき，いずれのモデルに対しても，OD交通量の推計信頼度が0.5以上になり，真の推計誤差は，10％前後になるようなかなり良好な推計結果が得られる．

本計算例では，真実OD交通量を仮定して真実推計相対誤差を算出したが，実際には真実OD交通量がわからないため，モデルによる推計OD交通量の真実誤差を求めることはできない．一方，最大可能相対誤差は実際に実現する誤差の可能性とは直接関係ではないが，リンク観測条件と推計OD交通量より一意的に求められ，真実相対誤差の上限を示すものである．また，最大可能相対誤差が小さい値になるほど，実際に起こり得る相対誤差も小さくなるということを示している．したがって推計OD交通量の信頼度評価にきわめて有用な役割を果たすものと考えられる．

以上で簡単なネットワークを用いて，モデルによる推計OD交通量の最大可能相対誤差と交通量観測地点との関係について考察したが，最大可能相対誤差とネットワーク規模等との関連性を吟味する必要もあろう．また本研究ではOD交通量の経路選択率が先決されているものとして，推計OD交通量の最大可能相対誤差を検討したが，実際にはこれらを適正に推定することはかなり難しい．このため道路区間利用率を表わす行列 $\boldsymbol{P}$ 自体の誤差が介在し，最大可能相対誤差の算定に影響を及ぼすと考えられるので，その影響について今後検討する必要がある．

## 5. まとめ

本研究では，観測リンク交通量を用いたOD交通量を推計する際，従来ほとんど検討されていなかったOD交通量の推計信頼度について理論的な考察を行った．本研究で得られた成果をまとめると以下のとおりである．

（1） 従来のモデル推計誤差分析と異なる概念「最大可能相対誤差」を提案し，モデル推計結果における可能な（潜在的な）最大相対誤差，あるいは真実相対誤差の上限という意味を明らかにした．

（2） 与えられた推計OD交通量に対して，最大可能相対誤差を二次計画問題として定式化し，簡単に求められることを示した．

（3） モデルによる推計結果の最大可能相対誤差を用いたOD交通量の推計信頼度を定義し，推計結果の評価に定量的な指標を与えた．またこの信頼度指標は，モデルの推計結果と提供される情報（観測リンクフロー）によって一意的に求められることを明らかにした．

（4） モデルによる推計結果の最大可能相対誤差（または推計信頼度）と交通量観測地点との関係について簡単に考察した．

（5） 最大可能相対誤差に基づいてタイプの異なる推計モデルのパフォーマンス比較，推計結果の評価等について簡単な計算例を示した．

今後の研究課題を次に述べる．

（1） 本研究で提案した最大可能相対誤差は，与えられた推計結果から制約集合内の最も離れた点までの相対距離（あるいはOD交通量推計誤差の上限）と考えられるが，同様な観点から制約集合内の各状態の発生確率に基づいて平均期待相対誤差を考えることができる．これについては今後の研究課題としたい．

（2） 推計OD交通量の最大可能相対誤差をネットワークにおける交通量観測地点の最適配置の規準として，それを最小にするような観測リンクの数と場所を決定することができるが，これを用いた観測リンクの系統的な配置法の開発を検討している．

（3） 本研究で提案した最大可能相対誤差という概念を用いて，最大可能相対誤差が最小（信頼度最大）になるようなOD交通量を求めることができる．本論文で得られた成果を踏まえた新しいOD交通量推計モデルの開発を考えている．

最後に，本論文の文書作成にご協力を頂いた京都大学工学部 秋山孝正講師に深く感謝の意を表します．

## 参 考 文 献

1) Hendrickson, C. and McNeil, S.：Matrix Entry Estimation Errors, Proc. of the Ninth Int. Symp. on Transportation and Traffic Theory, Delft University, pp. 413～430, 1984.
2) Bell, M. G. H.：Variances and Covariances for Origin-Destination Flows When Estimated by Log-linear Models, Transpn. Res., Vol. 18B, pp. 497～507, 1984.
3) 高山純一：リンクフロー観測値に基づいた道路網交通需要分析モデルに関する方法論的研究，京都大学学位論文，1988年2月.
4) 飯田恭敬・高山純一・金子信一：傾向変動を考慮したリンク交通量によるOD交通量推計法，土木学会論文集，第383号／Ⅳ-7, pp. 83～91, 1987年7月.
5) Iida, Y. and Takayama, J.：Comparative Study of Model Formulation on OD Matrix Estimation from Observed Link Flows, Proc. of 4th WCTR, Vol. 2, pp. 1570～1581, 1986.
6) 佐佐木綱：トリップのOD分布を求める確率論的方法，交通工学，Vol. 2, No. 6, pp. 12～21, 昭和42年11月.
7) 外井哲志：交通量常時観測地点の最適配置に関する考察，土木学会第43回年次学術講演会，第Ⅳ部門，1988年.
8) Van Zuylen, H. J. and Willumsen, L. G.：The Most Likely Trip Matrix Estimated from Traffic Counts, Transpn. Res., Vol. 14B, No. 3, pp. 281～293, 1980.
9) 飯田恭敬：発生交通量のみを変量とした実測交通量による交通需要推計法，土木学会論文報告集，第283号，pp. 95～104, 1979年3月.
10) 井上博司：交通量調査資料を用いたOD交通量の統計的推計法，土木学会論文報告集，第332号，pp. 85～94, 1983年4月.
11) 井上博司：シャドウ・コスト概念による観測交通量からのOD交通量推計，土木学会論文集，第401号／Ⅳ-10, pp. 41～50, 1989年1月.
12) Nguyen, S.：Estimating an OD Matrix from Network Data：A Network Equilibrium Approach, Publication 60, Centre de recherche sur les Transports, Universite de Montreal, 1977.
13) Fisk, C. S.：Trip Matrix Estimation from Link Traffic Counts：The Congested Network Case, Transpn. Res., Vol. 23B, No. 5, pp. 331～356, 1989.

（1989. 8. 11・受付）