

## 損傷確率関数による岩石の強度と変形の解析

### ANALYSIS OF STRENGTH AND DEFORMATION OF ROCK BY USE OF WEIBULL DISTRIBUTION OF DAMAGE

田野久貴\*・佐武正雄\*\*

By Hisataka TANO and Masao SATAKE

This paper proposes Weibull distribution to describe the stress-strain relationship in the softening process of rocks under uniaxial compression. This distribution of damage of rock is given by the compliance of the specimen. Experimental results using marble specimens showed that the Weibull distribution was suitable to express its internal damage. Moreover, it was shown that the softening process generally was approximated to the composite Weibull distribution, and this distribution was separated by Monte Carlo simulation. The first separated distribution ( $F_1$ ) may mean the probabilistic character of microcrack propagation and the second one ( $F_2$ ), the initiation respectively.

Keywords: composite Weibull distribution, damage, rock, post-failure, Monte Carlo

#### 1. ま え が き

本文は、圧縮下の岩質材料に生じる内部の微視的破壊と、その材料の示す巨視的変形挙動との関係を損傷確率関数を用いて考察している。これを用いる目的は、微視的破壊の推移を、平均ひずみ(変位)をパラメータとして、破壊確率で把握することにある。本文の内容は大きく2つに分けられる。第1は損傷確率関数を導入し、その特性と変形挙動との関係を明らかにするとともに、損傷関数としてWeibull分布が適当であることを示している。さらに、一般の変形過程は2つの異なる破壊機構からなる複合分布で近似可能であることを明らかにし、この場合においても単一分布の応用として変形挙動を解釈可能であることを示している。

第2はこの複合分布をたまたみ込みによって分離することを試み、内部に発生する異なる2つの損傷過程を個別に検討している。すなわち、変形過程より求められる複合分布は2つの過程の相互作用の結果であり、これより得られる分布は内部の破壊機構そのものを示すものではない。したがって、これらを分離することによりはじめに内部破壊を損傷確率の観点から論じることが可能とな

る。これらの結果を大理石を用いた一軸圧縮試験により検討を行った。そして、得られた結果が複合分布で近似されることを示し、その分離を行ってそれぞれの関数の意義について考察している。

内部に生じる微視的破壊と材料の巨視的挙動との対応については、たとえばBraceら<sup>1)</sup>やBieniawski<sup>2)</sup>の報告があり、軸応力と軸ひずみあるいは体積ひずみとの関係におけるいくつかの変曲点と内部破壊との対応について報告されている。一方、発生するクラックの微視的な観察は、光学顕微鏡や、走査型電子顕微鏡による報告も多く、微視的クラック発生モデルの提案<sup>3)</sup>もされ、これらはKranz<sup>4)</sup>によってまとめられている。

以上のような微視的な内部破壊に関する観察は重要であるが、一方、ばらつきの多いこれらの挙動をある程度平均化して、材料の巨視的挙動と関連し得るようなモデルも必要である。そこで本文では、材料内部の逐次破壊を表現するために損傷確率関数を提案している。この損傷確率分布関数は、“有効断面積”が内部の逐次破壊によって減少するという考えを用いて導入される。この“有効断面積”という概念は、岩質材料においてはたとえばBradyら<sup>5)</sup>によって実験的に検討が加えられているがこれは破壊過程を確率的に取り扱ったものではなく、ピーク強度を中心とした議論である。

本文では損傷確率(分布および密度)関数としてWeibull関数<sup>6)</sup>を用いている。同様にこれを材料の破壊過

\* 正会員 工修 日本大学助教授 工学部土木工学科  
(〒963 郡山市田村町徳定字中河原1番地)

\*\* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科  
(〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

程に適用を試みたものとして吉中ら<sup>7)</sup>、川本ら<sup>8)</sup>、あるいは福島ら<sup>9)</sup>の研究がある。吉中らはピーク強度以後の変位-荷重関係に Weibull 分布を当てはめて塑性ひずみを議論し、同分布が良く当てはまると述べているが、ピーク強度以後について注目している。一方、本文ではそれ以前に観察される変位-荷重関係における最初の変曲点を規準として、この点より有効断面積が減少すると考えて Weibull 分布を用いる点が異なっている。

この分布はいわゆる最弱リンクモデル、すなわち静的確率論を念頭に提案されたものであり、確率過程論にそのまま適用することには問題があると考えられる。この点について横堀ら<sup>10),11)</sup>は材料の破壊の確率過程論に応力集中源の分布を考慮することにより、時間、温度、応力速度などの動的因子を含んだ一般の考察を行い、このうち温度と応力速度が一定の場合が Weibull 分布として含まれることを示している。したがって、これらの報告<sup>10),11)</sup>よりこの分布を破壊過程へ適用することは適切であると考えられる。

一方、複合分布をたみ込みにより分離する方法は、市川ら<sup>12)</sup>がすでに金属の疲労寿命、その他<sup>13),14)</sup>に適用している。すなわち、同一条件下における多数の試験片のなす寿命分布が、複合分布で近似可能であることを見出しているが、本文では、1つの試験片の破壊過程が複合分布で近似されるという点で、市川ら<sup>12)</sup>とは異なっている。本文ではこの概念に従って、マイクロコンピュータによる解析を行っている。

“損傷”という概念は周知のように、Kachanov<sup>15)</sup>、村上ら<sup>16)</sup>あるいは京谷ら<sup>17)</sup>によってテンソルとして金属材料や岩盤の力学挙動の解析に導入されているが、これらにおいては、載荷前にすでに存在しているクラックや節理は先天的損傷として扱われるのに対し、本文では載荷後に生じる損傷を確率的に取り扱う点が異なっている。

## 2. 損傷確率関数の定義とピーク強度

### (1) 有効断面積と損傷確率分布関数

一般に材料の破壊過程は確率過程であり、時間とともにその内部に発生する微視的破壊の発生状態は変化する。一定ひずみ速度下における圧縮試験では時間の代わりにひずみを確率変数とすることが可能であるが、内部に生じている変化を直接知り、これから確率分布関数を求める有効な方法は現在まだ十分に確立されていないようである。そこで、次のような確率分布関数を定義し、ピーク以後の材料の挙動も含めた考察を行う。

まずコンプライアンスに注目する。すなわち、長さ  $L$ 、断面積  $A$  の試験片が変位  $u$  において荷重  $P$  が発生しているとき、そのコンプライアンス  $\lambda_0$  は次式で与えられ

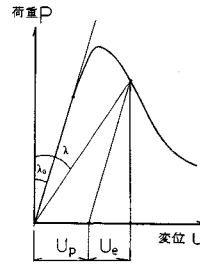


図-1 内部損傷によるコンプライアンスの変化

$$\lambda_0 = \frac{u}{P} = \frac{\epsilon L}{\sigma A} = \frac{L}{E} \frac{1}{A} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $E$  はその試験片のヤング率であり、非破壊部分のヤング率は一定と仮定する。

一方、内部に破壊による損傷が生じると図-1に示すようにコンプライアンス  $\lambda$  は増加する。式(1)において、コンプライアンス  $\lambda_0$  が増加して  $\lambda$  となるのは断面積  $A$  が減少するためと考えることができる。

すなわち、内部の微視的破壊の発生によって荷重を支持し得る実質的な材料の有効断面積を  $A_e$  とすると次式を得る。

$$\lambda = \frac{L}{E} \frac{1}{A_e} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、有効断面積の全断面に占める割合としての確率分布関数を次式のように定義し、式(1)、(2)を用いると次式を得る。

$$F(u) = 1 - \frac{A_e}{A} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \dots\dots\dots (3)$$

したがって、コンプライアンス  $\lambda$  の変化から累積確率分布関数  $F(u)$  が求められる。式(3)より明らかなように、この  $F(u)$  は損傷の程度を表わしていると考えてこれを損傷確率分布関数とよぶこととする。

### (2) ピーク強度

この  $F(u)$ 、すなわち損傷確率分布関数の形式によっては、ピーク強度を求めるために数値計算を必要とするが、これを解析的に得る方法を検討する。

変位  $u$  が与えられたとき生じる荷重  $P$  は次式で示される。

$$P = \frac{EA_e(u)}{L} u = \frac{EA}{L} [1 - F(u)] u \dots\dots\dots (4)$$

ここで、変位  $u$  が  $u + du$  であるとき、 $F(u)$  が  $F(u) + dF(u)$  となるとすると、そのときの荷重  $P'$  は次式で示される。

$$P' = \frac{EA}{L} [1 - F(u) - dF(u)] (u + du) \dots\dots\dots (5)$$

いわゆるピーク強度とは  $P' - P = 0$  を満足するときの応

力であるから、式(4)、(5)より高次の項を無視すると次式を得る。

$$[(1-F(u))du - u dF(u)] = 0 \dots\dots\dots (6)$$

式(6)の左辺の各項に(EA/L)を乗じると、第1項は変位増分によって材料に生じる内力であり、第2項は破壊によって失われる内力である。したがって、この両者が等しくなったときを一般にピーク強度と定義していることになる。

(3) Weibull 確率関数

いままでに変位 u を考えたが、これをひずみと置き換えても以上は成立する。そこで以後ひずみを考えることとし、これを x で表わすこととする。

式(6)より次式を得る。

$$\frac{1}{x} = \frac{f(x)}{1-F(x)} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、f(x) は確率密度関数である。

式(7)はРжаницын<sup>18)</sup>の指摘のように一般に解析的には解けないが、損傷確率関数として Weibull 分布<sup>9)</sup>を用いると次のようにして簡潔な解が得られる。

周知のように 2 母数 Weibull 確率分布関数 F(x) は次式で示される。

$$F(x) = 1 - \exp[-(x/\xi)^m] \dots\dots\dots (8)$$

ここに、m および ξ はばらつきおよび尺度をそれぞれ表わすパラメーターである。

さて、式(8)の密度関数 f(x) は次式で示される。

$$f(x) = \frac{m}{\xi} \left(\frac{x}{\xi}\right)^{m-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\xi}\right)^m\right] \dots\dots\dots (9)$$

式(8)、(9)を式(7)に用いると次式を得る。

$$x = N\xi \dots\dots\dots (10)$$

ここに、N は次式で示される。

$$N = \left(\frac{1}{m}\right)^{1/m} \dots\dots\dots (11)$$

したがって式(10)より 2 つの Weibull パラメーター (m, ξ) が与えられれば、ピーク強度に対応するひずみ (x) が解析的に求められる。この m と N の関係を図-4 に示す。なお、式(7)の右辺は周知のように、信頼性工学におけるいわゆる故障率であるから、損傷関数に応じたある特定の故障率に達したときピーク強度と称していることになる。

3. 損傷確率関数の性質と材料の破壊挙動

(1) Weibull パラメーターとピーク強度

ピーク時のひずみを ε<sub>pk</sub>(x = ε<sub>pk</sub>) とすると式(10)は次式で示される。

$$\varepsilon_{pk} = N\xi \dots\dots\dots (12)$$

N は式(11)に示すように損傷関数 F(x) のばらつきを表わす m の関数であり、ξ はその分布の位置を表わすパ

ラメーターであるから、分布の形が一定すなわち m が一定の場合には、ピークひずみはもう一方のパラメーター ξ に正比例することがわかる。その勾配 N は図-4 に示したように、m ≥ 1 の範囲では簡単な計算により、m → ∞ および m = 1 のとき N = 1 であり、m = e のとき最小値 N = 0.7 をとる。また、m < 1 では N は急激に増加することがわかる。

式(4)を応力 (σ) とひずみ (ε) で表わすと式(13)を得る。

$$\sigma = [1 - F(\varepsilon)] E \varepsilon \dots\dots\dots (13)$$

したがってピーク強度を σ<sub>pk</sub> とすると式(13)より次式が得られる。

$$\sigma_{pk} = [1 - F(\varepsilon_{pk})] E \varepsilon_{pk} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、ピーク時の損傷確率分布関数について次の重要な結果が導かれる。すなわち、このとき式(7)が成立するからこれを変形して式(9)を用いると次式を得る。

$$1 - F(x) = x f(x) = m \left(\frac{x}{\xi}\right)^m \exp\left[-\left(\frac{x}{\xi}\right)^m\right] \dots\dots (15)$$

ここで x = ε<sub>pk</sub> とおき、式(11)と(12)を考慮すると次式を得る。

$$F_{pk} = 1 - e^{-1/m} \dots\dots\dots (16)$$

ここに F<sub>pk</sub> はピーク強度を与える損傷確率である。

式(16)より、ピーク強度を与える損傷確率は m のみの関数であり、もう一方のパラメーター ξ によらない。すなわち、損傷確率分布の中心の位置によらず、その分布の形状 (ばらつき) によって決まるある一定の損傷確率に達したときピーク強度を示すことがわかる。そして、分布のばらつきの小さい (m の大きい) ほどピーク時の損傷確率は小さい。ただし、すでに述べたようにピークを与える応力あるいはひずみは式(12)あるいは(14)に示すように、ξ に比例して増加する。

損傷関数 F(x) が与えられると破壊によって生じる塑性ひずみを求めることも可能である。塑性ひずみを ε<sub>p</sub>、全ひずみを ε とすると、図-1 に示すような関係から弾性変位 u<sub>e</sub> および塑性変位 u<sub>p</sub> をそれぞれひずみで表わすと次式を得る。

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon} = F(x) \dots\dots\dots (17)$$

ここに、F(x) は材料の損傷確率分布関数である。

式(17)は任意のひずみ x の点における全ひずみに対する塑性ひずみの割合を示し、F(x) → 1 のときすべてが塑性ひずみとなる。福島ら<sup>9)</sup>もこれと類似の式を与えている。

(2) 破壊開始とピーク強度との関係

破壊開始とピーク強度あるいはピークひずみとの関係を知っておくことは、たとえば AE などでも岩石あるいは岩盤の破壊挙動を予測する場合に重要である。ここでは

Weibull 分布を適用した場合の両者の関係を、応力とひずみの両方の場合について求め比較を行う。

本文で用いている式(8)の2母数 Weibull 分布では、理論的には与えられるひずみが0にきわめて近いときが破壊開始であると考えられるが、ここでは損傷確率  $F(x)$  が1% ( $F(x)=0.01$ ) を越えるときを一応破壊開始と仮定する。

このときの応力およびひずみを  $\sigma_i$  および  $\epsilon_i$  とし次式を定義する。

$$\alpha_\sigma = \sigma_{pk} / \sigma_i \dots\dots\dots (18)$$

$$\alpha_\epsilon = \epsilon_{pk} / \epsilon_i \dots\dots\dots (19)$$

破壊開始を求めるためには具体的に  $m, \xi$  を与えて数値計算が必要である。図-2はその結果を示したものである。 $m$  をパラメータとして、縦軸は応力比  $\alpha_\sigma$  の、横軸はひずみ比  $\alpha_\epsilon$  の対数でそれぞれ示してある。同図より明らかなように、 $\alpha_\sigma$  および  $\alpha_\epsilon$  はいずれも損傷関数のばらつきが小さい ( $m$  が大きい) ほど小さくなっている。 $m$  が3以上では両者ともにおよそ1~3の範囲にある。これらの  $\alpha$  は圧縮下における一種の構造的破壊靱性を示すものであるから、より均質な材料ほど急速に損傷が生じて、そのピーク時の応力あるいはひずみを予測することが困難となることを示している。

一方、同図に示した直線の勾配は1より小さく、 $\alpha_\epsilon$  の方が  $\alpha_\sigma$  より大きい。すなわち、測定上の精度を考えないとき、ひずみでピーク点をモニターした方が有利であることがわかる。そして、 $m$  が小さいほどその傾向は顕著となる。 $m$  が非常に大きいとき両者はほぼ一致し、その値は約1となる。すなわち、破壊開始の直後にピーク点が存在しているように観察される。 $\alpha_\epsilon$  が  $\alpha_\sigma$  より  $m \rightarrow \infty$  の場合を除いて常に大きい理由は、破壊開始後ピーク点までの応力-ひずみ関係が非線形となることに起因している。

(3) ひずみ軟化率

次にピーク強度以後のいわゆる“軟化”挙動を検討するために次式を定義し、本文ではこれをひずみ軟化率  $\Theta$  と称することとする。

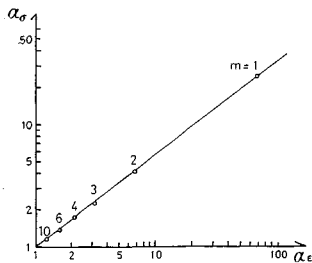


図-2  $m$  をパラメータとした  $\alpha_\epsilon$  と  $\alpha_\sigma$  の関係

$$\Theta = \frac{\sigma_{pk} - \sigma_{res}}{\sigma_{pk}} \dots\dots\dots (20)$$

ここに  $\sigma_{res}$  はいわゆる残留強度であり、式(13)に  $x > \epsilon_{pk}$  を満足するひずみを与えることにより求められる。したがって式(20)は次式で与えられる。

$$\Theta = 1 - \frac{\epsilon}{N\xi} \exp\left[\frac{1}{m} - \left(\frac{\epsilon}{\xi}\right)^m\right] \dots\dots\dots (21)$$

ここで、ひずみ  $\epsilon$  を  $\xi$  で除して正規化したひずみ  $\epsilon_n$  で式(21)を表わそう。

$$\Theta = 1 - \frac{\epsilon_n}{N} \exp\left[\frac{1}{m} - (\epsilon_n)^m\right] \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 $\epsilon_n = \epsilon / \xi$  である。

図-3はピーク強度点の正規化ひずみ  $\epsilon_n^* (= \epsilon_{pk} / \xi)$  を原点とし、 $\epsilon_n / \epsilon_n^*$  を横軸で表わした場合の式(22)のグラフである。同図より、 $m \geq 5$  においては  $\epsilon_n = \epsilon_n^*$ 、すなわち正規化された全ひずみが正規化ピークひずみの2倍 ( $\epsilon_n = 2\epsilon_n^*$ ) 程度の変形を与えられることにより完全に軟化することがわかる。また、 $m$  が小さいほど完全軟化までに大きな変形を必要とする。したがって、 $m$  によって決まるある一定の正規化ひずみに達するとき残留強度 ( $\sigma_{res}$ ) は0となる。

(4) ひずみ硬化

ひずみ硬化は式(6)の左辺が常に正であるときに生じる。したがって、式(12)を考慮するとひずみの硬化が生じる条件として次式を得る。

$$\left(\frac{x}{\xi}\right) = \epsilon_n < N \dots\dots\dots (23)$$

式(23)はひずみ硬化が認められる正規化ひずみの範囲を示している。ここに  $N$  は式(11)で示すように  $m$  の関数であり、その変化の概略は3.(1)で前述したがこれを図-4に示す。

同図の曲線が  $\epsilon_n^* = N$ 、すなわち正規化ピークひずみが  $m$  によって変化する様子を表わしており、 $\epsilon_n$  がこれ以下のとき、すなわち図の斜線部の領域にあるとき、ひずみ硬化が観察される。そしてこの曲線上にあるときが

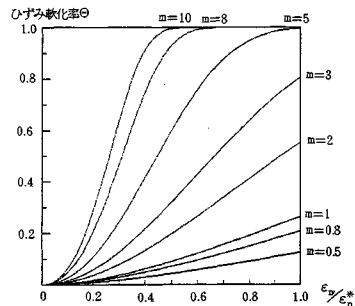


図-3 ひずみ軟化率  $\Theta$  と  $\epsilon_n / \epsilon_n^*$  の関係

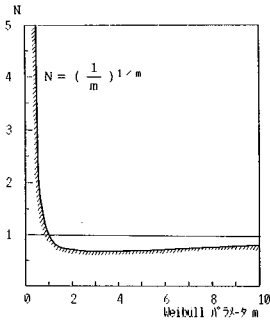


図-4 ひずみ硬化の領域

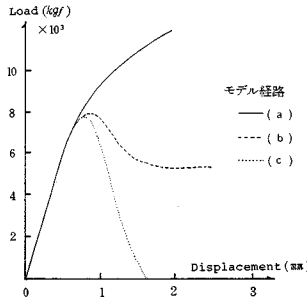


図-5 変位-荷重のモデル

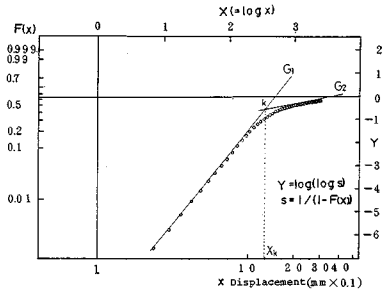


図-6 損傷確率分布の例 (経路 a)

ピーク強度でありこれを越えるときひずみ軟化を示す。

したがって、ひずみ硬化とは応力-ひずみ曲線が非線形状態となる点（厳密には破壊開始点）から、ピーク強度点までの挙動を指しており、この領域が大きいほどひずみ硬化が顕著に観察されることを意味している。

4. 複合破壊機構とその分離

(1) 変位-荷重と損傷確率関数の例

ここで、一般に観察される材料の変位-荷重関係を具体的に与えてこれに対応する Weibull の損傷確率分布関数を求めることを試みる。図-5 は、同一材料を拘束圧を変えて圧縮試験を行うとき観察される変位-荷重関係を模したものである。これら3つの経路のうち、(a)はいわゆるひずみ硬化、(b)、(c)はひずみ軟化を示している。ここでは、(a)および(c)における損傷関数を式(3)によって求め、Weibull 確率紙に示したものが図-6および7である。

同図からケース(a)においては明らかな屈曲点が存在し、2つの確率関数で近似されることがわかる。信頼性工学では交点Kを境界点として2つの関数で近似した分布を複合分布とよんでいる。すなわち、損傷確率分布関数は次の2つの関数で示される。

$$G_1(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\xi_1}\right)^{m_1}\right\} \quad x \leq x_k \dots\dots\dots (24)$$

$$G_2(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\xi_2}\right)^{m_2}\right\} \quad x > x_k \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 $x_k$  は2つの関数の境界点Kの座標値である。

2つの関数を低変位レベル域からそれぞれ複合分布第1関数および第2関数とよぶことにする。このようにして得られた各破壊過程におけるパラメーターを表-1に示す。

表-1より明らかなように2つの関数を特徴づけるパラメーター間には明瞭な差異が存在することがわかる。なお、各経路とも比較のためにピーク強度点までをほぼ同一としているため、第1関数の2つのパラメーターも

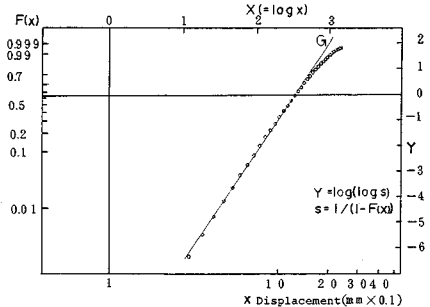


図-7 損傷確率分布の例 (経路 c)

表-1 モデル経路(図-5)の各複合分布のパラメーター

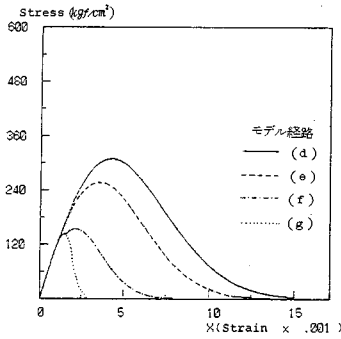
モデル	第1関数		第2関数		交点 $X_k$	最大荷重 $P_{max}$ (kgf)
	$m_1$	$\xi_1$	$m_2$	$\xi_2$		
	—	(mm×0.1)	—	(mm×0.1)	(mm×0.1)	(kgf)
a	3.6	2.7	0.60	35.6	1.22	—
b	8.7	2.6	0.79	11.9	13.8	7890
c	4.2	2.5	—	—	—	7670

ほぼ同一となっている。

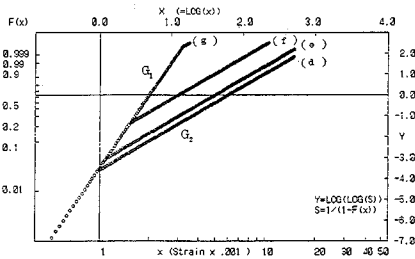
次に第2関数のパラメーターに注目すると、図-5に示したように、各破壊経路ともピーク後の  $u-P$  関係が大きく異なっているにもかかわらず、 $m_2$  はあまり変化していない。一方、 $\xi_2$  は各経路によって明らかに異なり、ひずみ硬化(経路 a)から軟化(経路 c)にかけて減少し経路(c)で最小を示している。

$m$  が一定の場合  $\xi$  は分布の中心(平均)に比例する量であるから、ひずみ硬化から軟化への変化は、第2関数の勾配を一定としたまま、関数が低ひずみレベル側へ移動することを意味している。したがって、図-7に示すように経路(c)においてはこの第2関数の中心が他と比べて左にあるため、第1関数との交点Kが上方に移動して対象とする範囲からはずれて単一分布のように観察される。

一方、図-8に示すように、 $m_2$  を一定とし  $\xi_2$  が経路



図一八 応力-ひずみのモデル経路



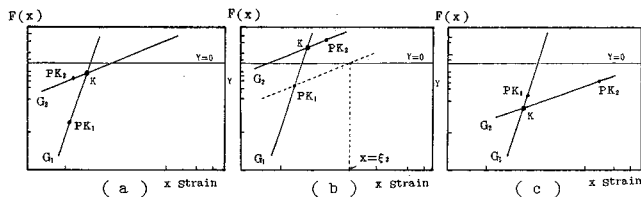
図一九 モデル(図一八)の損傷確率分布

(d)から(g)にかけて減少する場合には強度も大きく減少することがわかる。したがって、第2関数の $\xi_2$ がきわめて小さい(g)の場合には、図一九に示すように交点Kが上方に移動して対象とする領域からはずれることにより、同様に単一分布となると考えられる。市川ら<sup>12)</sup>によって同様な指摘が疲労寿命においてなされている。

(2) 複合損傷確率分布における破壊挙動

これまでに明らかになったように、複合分布の場合にはこれを構成する第1関数と第2関数の相対的位置、すなわち二組のパラメーター( $m_1, \xi_1$ および $m_2, \xi_2$ )が問題となる。ここでは簡単のためにWeibull確率紙上におけるこれら2つの関数の勾配、すなわち $m_1, m_2$ を一定として考える。

2つの関数の相対的位置関係とは具体的に図一十に示すように、その交点Kと第1および第2関数のピーク強度点 $PK_1, PK_2$ の相互関係である。



図一十 複合分布における2つのピーク強度点と交点の位置関係

表一2 モデル(図一八)による複合分布のパラメーター

モデル	第1関数		第2関数		交点	ピーク強度
	$m_1$	$\xi_1$	$m_2$	$\xi_2$		
	—	( $10^3$ )	—	( $10^3$ )	$X_k$	$\sigma_{pk}$
(d)	5	2	2	6	8.2	30.88
(e)	5	2	2	5	1.5	25.73
(f)	5	2	2	3	1.1	15.33
(g)	5	2	2	1	1.0	14.28

表一3 複合分布の相対位置関係によるピーク強度とひずみ軟化の支配関数

2つの関数の相対位置	支配関数		ピーク点の個数
	ピーク強度	ひずみ軟化	
(a)	$G_1$	$G_1, G_2$	1
(b)	$G_1, G_2$	$G_2$	2
(c)	$G_2$	$G_2$	1

まず同図(a)の場合は交点Kが2つのピーク点 $PK_1, PK_2$ より右にある場合であり、複合分布としてのピーク強度は第1関数のそれによって決定される。そしてその後のいわゆるひずみ軟化は交点Kまでは第1関数のそれに従う。ここでは $m_1 > m_2$ の場合を考えているから、単一分布の考察で明らかになったように、この区間ではひずみ軟化が急速である。そしてK点を越えると第2関数によって支配され軟化率はより小さくなる。

同図(b)の場合はひずみ軟化に関しては(a)とほぼ同様であるが、式(6)で定義した意味でのピーク強度点は2つあることが大きな特徴である。すなわち、まず第1関数によって最初のピーク点( $PK_1$ )が出現する。この点から交点Kまでの軟化は第1関数のそれである。K点以後次のピーク点( $PK_2$ )までは、この区間における損傷確率の発生率がそれまでより減少するために、むしろ一時的な強度増加が観察される。そして $PK_2$ において再びピーク強度点が観察され、この場合応力-ひずみ曲線は“複峰タイプ”となる。図一八(f)がその一例である。

一方、図一十(c)の場合には、第2関数によってピーク強度およびひずみ軟化が支配されることが明らかである。以上を表一3にまとめて示す。

(3) たみ込み積分による複合破壊機構の分離

前項において、一般に観察される変位-荷重関係のモデルを用いて損傷確率分布関数を求めた結果、材料の破壊

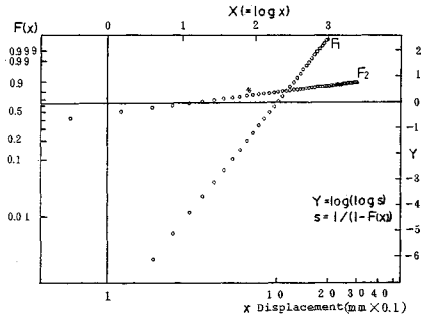


図-11 分離された損傷確率分布の例 (モデル(a))

過程に2つの関数、すなわち異なる2つの破壊機構が関与するという解釈を行った。この場合、1つの巨視的な破壊過程がある点を境にそれぞれ特性の異なる関数で近似されるが、得られる複合分布は2つの確率事象の混合あるいは複合された結果であって、異なる2つの破壊機構そのものを表すものではない。そこでここではこれらを分離することを試みる。

簡単のために材料が2つの確率密度  $f_1(X_1)$ ,  $f_2(X_2)$  をもつ要素から構成されている場合を考える。この材料の挙動は用いる確率モデルによって異なり、直列モデルや並列モデルが最も取扱いの容易なものである。これらによって説明可能な場合も多いが本質的にこれらは静的モデルであって、特に逐次破壊を伴う変形過程を説明するには不十分である。実際の破壊過程には、一方の要素が破壊したのちもう一方の要素が破壊することにより全体破壊するというモデルがより適当と考えられる。このモデルは待機系モデルとよばれるものであるが、確率論的には変数  $X_1$  と  $X_2$  の和を新たな変数  $X$  として、その分布を求めることに相当する。これらがそれぞれ独立であると仮定し、たたみ込みによる密度関数を  $f(x)$  とすると、この  $f(x)$  は次式のたたみ込み積分により求められる。

$$f(x) = \int_0^{\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt \dots\dots\dots(26)$$

一方、ここで求めようとするものは巨視的な材料の確率密度関数  $f(x)$  ではなく  $f_1(x)$  および  $f_2(x)$  であるから、これらを式(26)より直接求めることは困難である。しかし、 $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  は前項でみたように、複合分布を構成する2つの関数 ( $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ) とその特性パラメーターが大きく異なることはないと考えられる。市川ら<sup>12)~14)</sup>はこの点に注目し、均一性係数  $m$ 、すなわち Weibull 確率紙上の2本の直線 ( $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ ) の勾配を複合分布 ( $G_1(x)$ ,  $G_2(x)$ ) のそれにほぼ等しくとり、もう一方のパラメーター ( $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ) を適当に仮定して  $F(x)$  (あるいは  $f(x)$ ) を満足するように計算を繰り返して、パ

表-4 分離されたパラメーター

モデル	第1関数		第2関数	
	$m_1$	$\xi_1$	$m_2$	$\xi_2$
a	3.5	10	0.35	3
b	3.5	10	0.60	3
c	3.5	10	1.5	3

$\xi_1, \xi_2$ : 変位 (mm x 0.1)

ラメーターを決定している。そのためには、仮定された2つの関数に基づいて計算されるたたみ込み積分 (式(26)) の結果を、原分布の形状と繰り返し比較する必要がある。そこで本文ではグラフィックス機能が容易に利用可能なマイクロコンピュータを解析に用いた。なお、複合分布を構成する2つの関数を  $G_1(x)$ ,  $G_2(x)$  (あるいは  $G_1$ ,  $G_2$ ) と表わし、分離された関数をこれらに対応させて  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  (あるいは  $F_1$ ,  $F_2$ ) と表わすことにする (密度関数はこれらの小文字を用いる)。

(4) 複合確率分布の分離結果

先の図-5で示した典型的な変位-荷重モデルは経路(c)を除いて複合分布で近似されることを示したが、たたみ込みによって分離されたそれぞれにおける2つの損傷関数の例を図-11に、またこれらによって得られた各パラメーターを表-4にまとめて示す。分離された二組のパラメーター ( $m_1$ ,  $\xi_1$ ) および ( $m_2$ ,  $\xi_2$ ) は複合分布の場合と同様互いに明らかに区別される。また、パラメーター  $m$  に関して、第1関数および第2関数それぞれを分離前 (複合分布) と分離後とを比較すると大きな差は認められない。

図-12はこのようにして分離された第1関数 ( $F_1$ ) と第2関数 ( $F_2$ ) を用いて、逆にたたみ込みによって得られる複合分布をもとに、再現されたモデル(a)および(c)の  $u \sim P$  関係である。(a)には凹凸がみられるが、これは図-6に示す曲線を2本の直線 ( $G_1$ ,  $G_2$ ) で近似したためである。

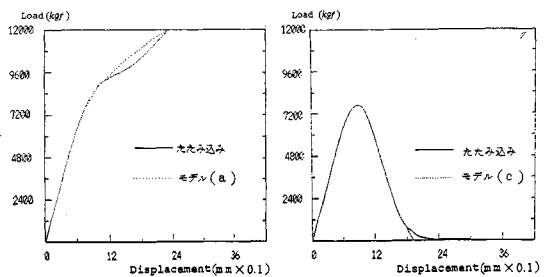


図-12 たたみ込みによって再現された変位-荷重関係の例 (経路 a および c)

5. 岩石の圧縮試験結果と損傷関数

以上の結果を実験によって検討するために、図-13に示すような寸法の大理石試験片の一軸圧縮試験を行った。実験の制約上通常剛性の試験機によったため、ピーク以後を含めた応力-ひずみ挙動に十分追従できたとはいえず、30数個中の8個を用いた。図-14に得られた応力-ひずみ関係と、そしてこれによる損傷確率分布の例を図-15に示す。平均ヤング率は約  $1.2 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$  が得られた。なお、圧縮下において先在クラックが閉塞することにより生じるとされている、変曲点が载荷初期に認められたので、ここではこの点を応力-ひずみ曲線の原点とした。この例から明らかのように、その分布は複合分布をなすことが認められる。表-5に得られた複合分布の各パラメーターを示す。ここでは、大理石の損傷関数として同表に示したこれらの平均値を用いることとし、これをたたみ込みによって分離した分布関数を

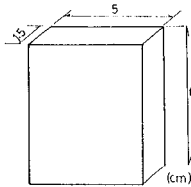


図-13 大理石試験片の寸法

表-5 実験によって得られた複合分布の各パラメーター

試験片 No	第1関数		第2関数		交点 $X_k$ ( $10^{-3}$ )	ピーク ひずみ ( $10^{-3}$ )	圧縮強度 ( $\text{kgf/cm}^2$ )
	$m_1$	$\epsilon_1$	$m_2$	$\epsilon_2$			
1	9.9	5.7	2.0	4.4	6.1	4.3	506.5
2	11.6	5.9	1.4	4.3	6.1	4.8	410.1
3	12.1	5.0	1.1	3.1	5.2	4.0	542.2
4	8.4	5.9	1.7	4.9	6.2	4.8	503.3
5	8.2	6.8	1.7	4.7	7.1	5.0	518.9
6	6.6	6.0	1.8	4.5	8.8	4.5	539.6
7	8.3	5.8	1.8	5.5	5.9	4.3	404.8
8	10.0	5.4	1.4	4.2	7.8	4.3	455.4
平均値	9.1	5.8	1.6	4.5	6.4	4.5	484.8

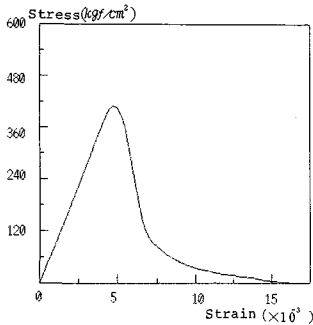


図-14 応力-ひずみ曲線の例 (実験結果)

Weibull 確率紙にプロットしたものを図-16に、その密度関数を図-17に示す。図-18は分離されたこれらの関数 ( $F_1, F_2$ ) を用いて、たたみ込みによって再現された応力-ひずみ曲線を原分布のそれと比較したものであるが、ほぼ満足しているといえよう。

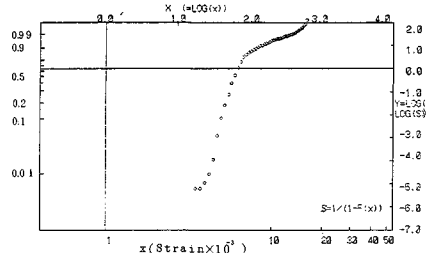


図-15 損傷確率分布の例 (実験結果)

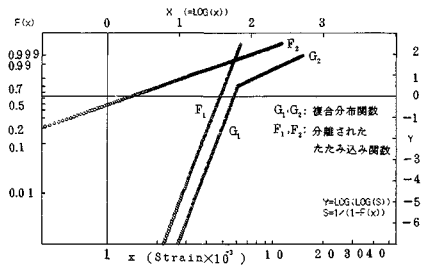


図-16 複合分布と分離されたたたみ込み関数 (実験結果)

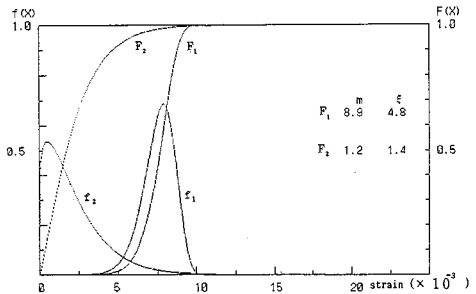


図-17 分離されたたたみ込みの各成分分布

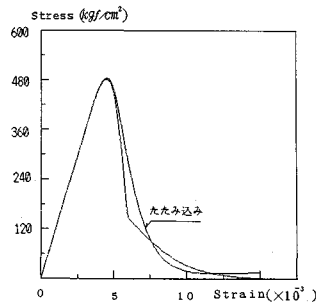


図-18 たたみ込みにより再現された応力-ひずみ曲線



## 6. 考察およびまとめ

破壊開始とピーク強度との関係についてはすでに若干の実験を行い、スリットを与えた場合の微視クラックの挙動<sup>19)</sup>や破壊様式の微視的考察<sup>20)</sup>において、 $\alpha_\sigma = 1.5 \sim 3$ 程度であることを報告した。また、構成要素の強度の確率密度とそのばらつきを変えて、ピーク強度やそれまでの破壊確率 ( $F_{pk}$ ) について簡単な考察<sup>21)</sup>を行ったが、ここにおいても  $\alpha_\sigma$  は同程度であり、また、ばらつきに比例して  $\alpha_\sigma$  が増加する傾向や  $F_{pk}$  の増加現象も本考察によって理論的根拠が与えられたと考えられる。

本考察で得られた損傷確率関数を別の観点から検討する手段としては、AE 現象との対比が1つの有効的手段と考えられる。一軸圧縮下でピーク点が2か所観察されたり、AE 発生率がピーク強度点付近でいったん低下して再び増加するというような現象は、複合破壊機構という観点に従えば説明可能であるように思われる。

損傷関数が複合分布で近似可能であることが判明すれば、前節4.において述べたようにその Post-failure 域を含めた破壊挙動を考察可能である。一方、このとき得られる各パラメータは見掛けのものであり、内部の破壊機構そのものを明らかにするためには、2つの構成関数を分離する必要がある。

本文で分離されたそれぞれの損傷関数の意義については、試験条件や材料による比較検討が必要であり、ここに明確な結論を述べることは困難であるが、現段階では次のように考えられる。

一般に、先在欠陥などに起因するクラックには、まず破壊発生期があり、次に急速な進展期のあることが知られている。したがって、確率的には構成要素に破壊発生とその伝播 (進展) という2つの事象が同時に生じることが、巨視的な破壊挙動に影響を与える条件となると考えられる。たとえば、図-17の場合には分離された2つの関数のうち、低ひずみ域のそれ ( $F_2$ ) が発生確率と対応すると考えられ、ひずみの増加過程において破壊発生確率 ( $F_2$ ) の増加により微視的破壊も増加し始めるが、比較的初期の段階では伝播確率が小さいため巨視的破壊とならず、変形にもその影響は現われない。これを支配するものが第2関数 ( $F_2$ ) であり、その中心は相当低ひずみ域にありばらつきも大きい。一方、第1関数 ( $F_1$ ) はこれら微視的破壊の伝播確率を示している。試験片のひずみがこの領域に達して、はじめて2つの条件 (発生と伝播) を満足した (ここでは、微視破壊発生という“事象が生じること”を“発生条件を満足する”と称している) 微小部分が生じるため、微視的破壊は巨視的なものとして観察され変形にも顕著に現われる。したがって、見掛け上、伝播確率 (第1関数  $F_1$ ) が発生確率 (第2関

数  $F_2$ ) より低ひずみで観察され、これが複合分布の第1関数  $G_1$  となる。第2関数  $G_2$  は、伝播条件は満足しているが、微視的発生が生じないために巨視的破壊とならず、破壊発生条件が見掛け上支配しているように観察される領域にある。分離された  $F_1$  と  $F_2$  が微視的な破壊開始と伝播の関係を示すものである。

前述したように、この方法を用いて市川ら<sup>12)</sup>は疲労寿命の複合分布を分離して、クラック伝播支配 (本文の第1関数) と発生支配 (同第2関数) という2つの破壊機構を考え、個々の試験片はどちらか一方の支配を強く受けるという解釈を与えているが、本文では、1つの試験片の破壊過程が2つの過程 (損傷確率関数) よりなると考える点が異なっている。

圧縮変形過程を損傷関数で表現することにより観察される複合分布を、たたみ込みによって分離可能であることは2つの点で重要である。第1に異なる機構を分離することにより、それぞれを別個に議論可能であること。第2に、2つの条件 (ここでは確率変数  $X_1$  と  $X_2$ ) を確率的に同時に満足することで巨視的破壊となる ( $X_1$  と  $X_2$  のたたみ込みで表わされる) という事実と、発生と伝播条件の両方を同時に満足することが、同様に破壊条件であるという物理的な事実とを対応させることが可能となることである。

なお、ピーク強度点以後の応力-ひずみ関係は試験機の剛性の影響を強く受けるから、本実験によって得られた損傷関数は試験機剛性との相対的なものである。また、応力状態や試験条件などによる影響や、ダイレイタンシーなどについては今後の課題である。いままでに明らかかなように、本文の損傷関数は実験データより導かれる。したがって、その確率特性 (パラメータ:  $m, \xi$ ) と材料の不均質性や力学条件との関連は、直接明らかにされていない。この点については、分布関数を理論的に導出<sup>10), 11)</sup>する方法や、あるいは応力状態を変えた実験との比較が必要であり、これも課題の1つである。

本文で提案された損傷確率関数は、試験片のコンプライアンスの変化から求められるので、他の試験における変位-荷重、あるいは応力-ひずみ関係などにも適用可能であると考えられる。本文では圧縮下における、主としてピーク強度点以後を考察したが、破壊力学の分野では破壊靱性と関連して、引張り応力下のピーク強度以後におけるひずみ軟化に注目した報告<sup>22)</sup>がなされ、荷重-クラック開口変位関係では複合分布で近似可能な例が多いように見受けられる。

また、同一条件下で異なる種類の岩石の損傷関数を求めることにより、材料のもつ確率的要素を損傷関数のパラメータという形で定量的に比較することが可能になるものと考えられる。

本文は次のようにまとめられる。

(1) 損傷確率分布に2母数 Weibull 分布を用いるとピーク強度が解析的に求められ、またひずみ軟化やひずみ硬化の程度を定量的に評価可能である。

(2) ピーク強度を与える損傷確率は分布のばらつきを表わすパラメーター  $m$  のみによって決定され、もう一方のパラメーター  $\xi$  によらない。

(3) ピーク強度点の応力およびひずみと、破壊開始点の応力およびひずみのそれぞれの比を  $\alpha_\sigma$  および  $\alpha_\epsilon$  として材料の構造的破壊靱性を評価したが、 $m \geq 3$  の範囲では両者とも1~3と計算された。 $m$  が小さくなると両者とも急激に大きくなる。

(4)  $m$  によらず常に  $\alpha_\sigma < \alpha_\epsilon$  であるから、一定ひずみ下ではピーク強度点をひずみでモニターする方が有効である。

(5) 以上は単一損傷確率分布の場合であるが、一般の損傷過程は複合分布をなすことが多いと推定され、大理石を用いた圧縮試験によってこれが確認された。

(6) 複合分布の場合は低ひずみ域を中心とする第1関数と比較的高ひずみ域を中心とする第2関数の各ピーク強度点と、両関数の交点の相対的位置関係が破壊挙動を支配する。この場合でも単一分布のパラメーターを利用して説明可能である。

(7) (6) に述べた2つの関数の位置関係によっては、2つのピーク強度点をもつ“複峰タイプ”の応力-ひずみ曲線が観察される場合がある。

(8) 損傷関数が2つの分布関数で近似されることは、破壊過程が特性の異なる2つの破壊機構からなることを意味している。これらをたたみ込み積分により分離することを試み、ほぼ満足する結果を得た。実験によって得られた複合分布より分離された2つの関数は、その材料の微視的破壊の発生と伝播確率を表すと考えられる。

#### 参 考 文 献

- 1) Brace, W.F., Paulding, B.W. and Scholz, C.H.: Dilatancy in the fracture of crystalline rocks, *J. Geophys. Res.*, Vol. 71, No. 16, pp.3939~3953, 1966.
- 2) Bieniawski, Z.T.: Mechanism of brittle fracture of rock, part II-Experimental studies, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 4, pp.407~423, 1967.
- 3) Tapponnier, P. and Brace, W.F.: Development of stress-induced microcracks in Westerly granite, *Int. J. Rock mech. Min. Sci. Abstr.*, Vol. 13, pp.103~112, 1976.
- 4) Kranz, R.L.: Microcracks in rocks: Review, *Tectonophysics*, Vol. 100, pp.449~480, 1983.
- 5) Brady, B.T., Duvall, W.I. and Horino, F.G.: An experimental determination of the true uniaxial stress-strain behavior of brittle rock, *Rock Mechanics*, Vol. 5, pp.107~120, 1973.
- 6) Weibull, W.: A statistical distribution function of wide applicability, *J. of Appl. Mech.*, Vol. 18, pp.293~297, 1951.
- 7) 吉中龍之進・阿部健一・清水昭男・森田栄治: 軟岩のひずみ軟化過程への確率分布関数の適用性, 第6回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.61~66, 1984.
- 8) 川本眺万・渡嘉敷直彦・石塚与志雄: 繰り返し荷重に対する岩質材料の変形挙動について, 第14回土質工学研究発表会講演概要集, pp.1385~1388, 1982.
- 9) 福島 篤・木下重教: Post-failure の領域における岩石の弾性と塑性, *日本鉱業会誌*, Vol. 90, No. 1042, pp. 769~774, 1974.
- 10) 横堀武夫・沢木洋三: 破壊強度と寿命に対する Weibull 表示の確率過程理論からの導出, *日本材料強度学会誌*, Vol. 6, No. 4, pp.109~114, 1972.
- 11) 横堀武夫・市川昌弘・藤田文夫: 巨視的不規則応力集中源の数の少ない場合の破壊の確率過程論, *日本機械学会論文集 (第1部)*, Vol. 43, No. 365, pp.18~21, 1974.
- 12) 市川昌弘・田倉隆行・田中 栄: き裂の発生と伝ばを分離した疲労寿命の信頼性工学的研究, *材料*, Vol. 31, No. 346, pp.61~66, 1982.
- 13) 市川昌弘・田倉隆行・田中 栄: き裂の発生寿命と伝ば寿命を分離した遅れ破壊寿命の信頼性工学的研究, *日本機械学会論文集 (A 編)*, Vol. 49, No. 439, pp.341~346, 1983.
- 14) 市川昌弘・田倉隆行・辻元 純: 高强度鋼の遅れ破壊寿命分布の各種因子依存性, *日本機械学会論文集 (A 編)*, Vol. 49, No. 440, pp.452~457, 1983.
- 15) Kachanov, L.M.: Introduction to continuum damage mechanics, Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- 16) 村上澄男・大野信忠: 損傷を伴う有限クリープ変形の構成式とその応用, *日本機械学会論文集 (A 編)*, Vol. 45, No. 392, pp.318~326, 1979.
- 17) 京谷孝史・市川康明・川本眺万: 岩盤の力学特性評価における損傷テンソルの適用について, *土木学会論文集*, No. 358/III-3, pp.27~35, 1985.
- 18) Ржаницын, А.Р. (高岡宣善訳): 構造物の信頼性解析, pp.159, 丸善, 1980.
- 19) 田野久貴・佐武正雄: 水平スリットをもつ脆性供試体の一軸圧縮における破壊開始と最終強度との関係について, *土木学会第26回年次学術講演会講演集*, 第3部, pp. 1~4, 1971.
- 20) 田野久貴・佐武正雄: 岩質材料の破壊様式と内部摩擦に関する考察, *日本大学工学部紀要*, Vol. 31, A, pp.27~39, 1990.
- 21) 田野久貴・佐武正雄: 脆性材料の破壊発生とその伝播機構に関する考察, 第5回岩の力学国内シンポジウム講演集, pp.55~59, 1977.
- 22) Hashida, T.: Tension-softening curve measurements for fracture toughness determination in granite, *Int. Workshop on Fracture toughness and fracture energy—Test methods for concrete and rock—*, pp.37~47, 1988. (1989.11.8・受付)