

## 波・流れ共存場における底面摩擦係数の陽形式近似式

## AN EXPLICIT EXPRESSION OF A FRICTION COEFFICIENT FOR A WAVE-CURRENT COEXISTING MOTION

田中 仁\*

By Hitoshi TANAKA

In a previous paper (1980), the author derived analytically a friction coefficient for a wave-current coexisting motion as well as its approximation for practical use. This approximate formula is, however, given in an implicit form so that an iteration is always needed in the calculation. The present paper proposes an approximate formula in an explicit expression. The accuracy is found to be within 3% compared with the exact solution, better than that of the previous approximate formula. The present formula is thereby useful in reducing the number of arithmetic operation in computer programs.

Keywords: wave-current interaction, friction coefficient, approximate formula

## 1. はじめに

沿岸域における波浪には沿岸流、河川流等の一方向流成分が重畳していることが多い。このような場での底面せん断力の評価は、底質移動・波高減衰等の問題と関連して海岸工学上きわめて重要なことである。波・流れ共存場における底面せん断力に関する解析的な研究としては、Smith<sup>1)</sup>、Grant and Madsen<sup>2)</sup>、著者<sup>3)</sup>、Christoffersen and Jonsson<sup>4)</sup>などを挙げる事ができる。このうち、著者の前報(以下、文献3)を前報とよぶ)においては実用的な摩擦係数算定式が提案されており、その成果は港内堆砂予測<sup>5)</sup>や三次元海浜変形予測<sup>6)</sup>に応用されている。前報の解析解は複素 Bessel 関数を含んだ複雑な形を有し、また摩擦係数に関して陰的な表示式である。そこで、漸近展開によって初等関数を用いた近似解も得られているが、これも摩擦係数に関して陰な形になっているため、解を求めるに際し繰り返し計算を必要としている。海浜変形予測のように多くの計算点において摩擦係数を算出する必要がある場合には、繰り返し計算を行わずに解が得られる陽形式の算定式の導入が望ましい。

そこで本研究では、波・流れ共存場における摩擦係数の陽形式近似式について検討を行った。ここでは、実用上重要である粗面乱流境界層に対するものを対象としており、また、波と流れは任意の交差角をもって交わるものとする。

## 2. 波・流れ共存場の摩擦係数

## (1) 概要

まず、著者によってすでに提案されている摩擦係数算定式<sup>3)</sup>について、その概要を述べる。

底面から直線的に変化する渦動粘性係数を仮定し、これを線形化された境界層方程式に代入して解くことにより次のような解が得られる。

$$\frac{f_{cw}}{2} = \left\{ \frac{\kappa}{\ln(z_h/z_0) - 1} \right\}^2 \left( \frac{\bar{u}_c}{\hat{U}_w} \right)^2 + \frac{2\kappa}{\ln(z_h/z_0) - 1} \frac{\bar{u}_c}{\hat{U}_w} \sqrt{\frac{\kappa\sigma z_0}{\hat{u}_{cw}^*}} A \cos \phi + \frac{\kappa\sigma z_0}{\hat{u}_{cw}^*} A^2 \dots \dots \dots (1)$$

ここに、波・流れ共存場における摩擦係数  $f_{cw}$  は次式で定義されている。

$$\tau_{0max} = \rho \hat{u}_{cw}^{*2} = \rho \frac{f_{cw}}{2} \hat{U}_w^2 \dots \dots \dots (2)$$

\* 正会員 工博 東北大学講師 工学部土木工学科  
(〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

式 (1) において、 $\kappa$ ：カルマン定数 (=0.4),  $z_h$ ：水深,  $z_0$ ：粗度長さ ( $z_0 = k_s/30$ ,  $k_s$ ：相当粗度),  $\bar{u}_c$ ：定常流成分の断面平均流速,  $\hat{U}_w$ ：微小振幅波理論によって得られる波動流速の境界層外縁での最大値,  $\sigma$ ：波の角振動数 ( $\sigma = 2\pi/T$ ,  $T$ ：周期),  $\hat{u}_{cw}^*$ ：波・流れ共存時の摩擦速度の最大値,  $\phi$ ：波の進行方向と定常流の流下方向がなす角度である。ただし、 $\phi$  の範囲は、 $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$  とし、 $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$  では、 $\phi - \pi$  を改めて  $\phi$  とする。また、式 (2) において、 $\tau_{\max}$ ：波・流れ共存時の底面せん断力の最大値,  $\rho$ ：流体の密度である。式 (2) では代表速度として波動流速を用いており、これにより摩擦係数  $f_{cw}$  の無次元量による表示が容易になる。

式 (1) 中の  $A$  は波動運動に起因する項で、次式のように表わされる。

$$A = \text{Abs} \left\{ \frac{N_1(\xi_h)J_1(\xi_0) - J_1(\xi_h)N_1(\xi_0)}{N_1(\xi_h)J_0(\xi_0) - J_1(\xi_h)N_0(\xi_0)} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、Abs は | | 内の複素関数の絶対値を取ることを意味し、 $J_n, N_n$ ： $n$  次の Bessel 関数および Neumann 関数,  $\xi_0 = 2e^{-\pi i/4} \sqrt{cz_0}$ ,  $\xi_h = 2e^{-\pi i/4} \sqrt{cz_h}$ ,  $c = \sigma / (\kappa \hat{u}_{cw}^*)$ ,  $i$ ：虚数単位である。式 (3) には水深  $z_h$  が含まれているが、通常波動境界層厚  $\delta$  は水深に比べきわめて薄いので、式 (3) において水深の効果は無視することができる。そこで、本研究では式 (3) に  $\delta \ll z_h$  の条件を課すことによって得られる次式<sup>7)</sup>を用いる。

$$A = \text{Abs} \left\{ \frac{H_n^{(1)}(\xi_0)}{H_0^{(1)}(\xi_0)} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $H_n^{(1)}$ ： $n$  次の第一種ハンケル関数である。  
 以上により、 $f_{cw}$  を支配する無次元量は、 $\hat{U}_w / (\sigma z_0)$ ,  $z_h / z_0$ ,  $\bar{u}_c / \hat{U}_w$ ,  $\phi$  の 4 つであることがわかる。ただし、これらの変数のうち、第 2, 3 番目のものは、式 (1) から明らかなように、次のような 1 つの変数  $\alpha$  にまとめることができる。

$$\alpha = \frac{1}{\ln(z_h/z_0) - 1} \cdot \frac{\bar{u}_c}{\hat{U}_w} \dots\dots\dots (5)$$

さて、摩擦係数に関する厳密解である式 (1) において、 $\alpha \rightarrow 0$  および  $\alpha \rightarrow \infty$  の条件を与えると、それぞれ波のみおよび流れのみの摩擦係数が得られる。陽的な近似式もこの 2 つの極限において、厳密解と同様な極限值に漸近する必要がある。そこで、以下では上記の極限について考察を行う。

(2) 波のみの場合の摩擦係数

まず、式 (1) で  $\alpha$  をゼロとおけば、波による摩擦係数  $f_w$  を得る。ただし、式 (4) の Hankel 関数の引数の中にも  $f_w$  が含まれるため、摩擦係数に関して陰的な表示式となっている。計算結果を図-1 に実線で示した。ただし、 $f_w$  の定義式は式 (2) と同様である。図

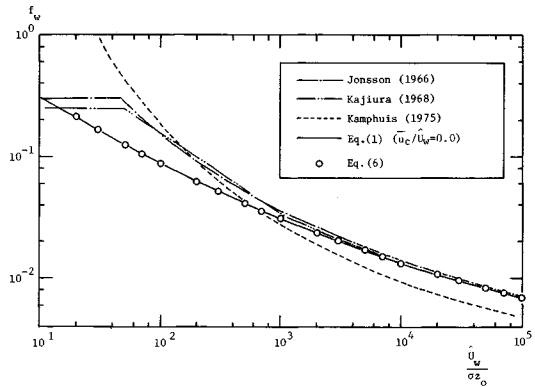


図-1 波のみの場合の摩擦係数

中にはすでに提案されている諸式も図示した。横軸の値が  $10^3$  より小さいとき、従来の研究成果に比べ幾分小さな値をとる。このような傾向は、 $k-\epsilon$  モデルを用いた数値解 (イスマイル・首藤<sup>8)</sup>) や、時間的に変化する渦動粘性モデルを用いた解析解 (Trowbridge and Madsen<sup>9)</sup>) にも認められる。 $\hat{U}_w / (\sigma z_0) \geq 10^3$  の範囲において、実線は他の曲線に近い値を示す。

ここで、次節において  $f_{cw}$  の近似式を定める際の都合上、 $f_w$  の厳密解に近似式を当てはめる。Swart<sup>10)</sup> によって提案された Jonsson<sup>11)</sup> の摩擦係数に対する陽形式近似式を参考にして、次の式を得る。

$$f_w = \exp \left\{ -7.53 + 8.07 \left( \frac{\hat{U}_w}{\sigma z_0} \right)^{-0.100} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

図-1 中の丸印は式 (6) による算定値であり、実線と良く一致している。

(3) 流れが支配的な場合の摩擦係数

次に、 $\alpha \rightarrow \infty$  のケース、すなわち流れが支配的な場合について考える。このとき、摩擦係数  $f_c$  は以下のように表わされる<sup>3)</sup>。

$$f_c = \frac{2\kappa^2}{\ln(z_h/z_0) - 1} \left( \frac{\bar{u}_c}{\hat{U}_w} \right)^2 \dots\dots\dots (7)$$

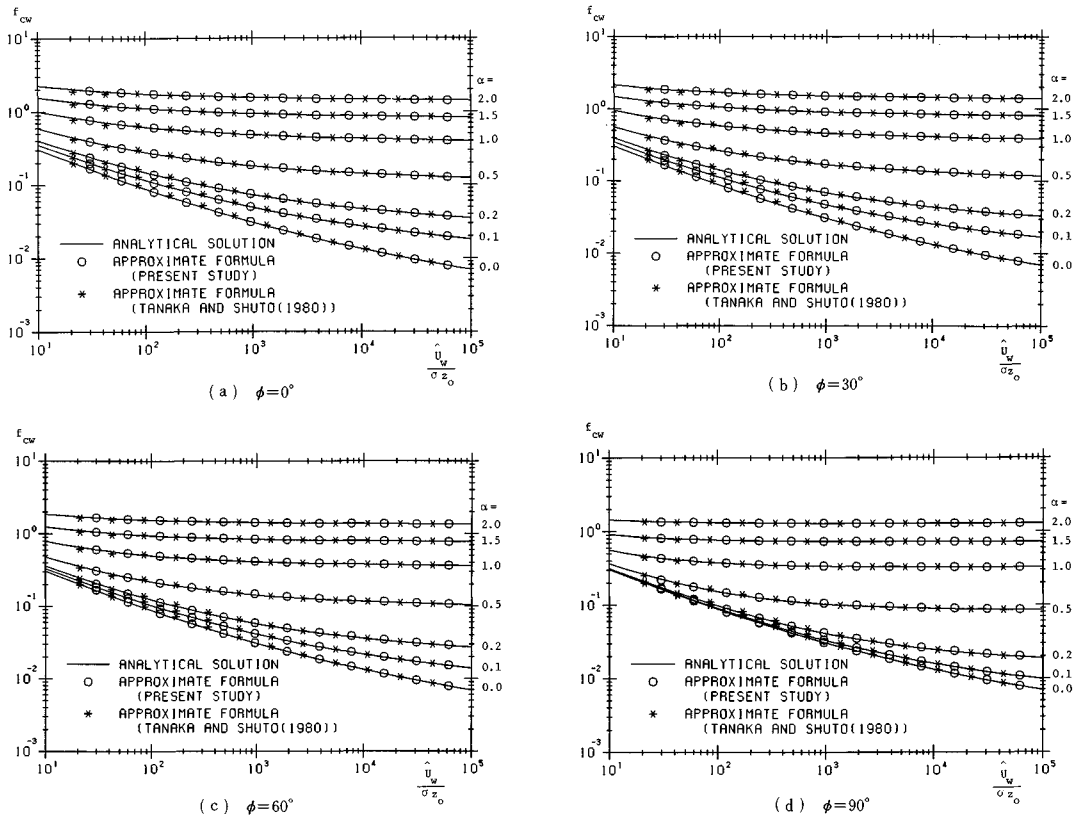
ただし、上式の  $f_c$  は通常の場合と異なり、式 (2) と同様に波動流速を代表速度にして定義されたものである。このために、右辺に波・流れの相対強度  $\bar{u}_c / \hat{U}_w$  の二乗が付加される。式 (1) の右辺第 1 項は上式に対応するものである。

3. 陽形式近似式

近似式も厳密解と同様に、 $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$  の極限において、それぞれ式 (6), (7) の極限值をもたなければならない。そこで、式 (1) の形を参考にして、共存場の摩擦係数  $f_{cw}$  の関数形を次式のように仮定する。

$$f_{cw} = f_c + 2\sqrt{f_c} \cdot \beta f_w \cos \phi + \beta f_w \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) で  $\beta = 1$  とおけば、これは波と流れの干渉効



図—2 波・流れ共存場の摩擦係数

果を全く考慮せずに、それぞれの摩擦速度ベクトルを線形に足し合わせたことに対応する。本研究では、波・流れの非線形干渉の効果を係数  $\beta$  で表現し、式 (8) による算定値が厳密解に最も良く合うように  $\beta$  の関数形を試行錯誤的に定めることとする。

明らかに  $\beta$  は、 $\alpha \rightarrow 0$  で  $\beta \rightarrow 1$ 、 $\alpha \rightarrow \infty$  で  $\beta \rightarrow 0$  なる 2 つの条件を満足しなければならない。これらの条件を満たし、かつ簡便な形を有する関数について検討を行った結果、次式を得た。

$$\beta = \frac{1}{0.769 \alpha^{0.830} + 1} \left\{ 1 + 0.863 \alpha \exp(-1.43 \alpha) \left( \frac{2\phi}{\pi} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (9)$$

上式で、波・流れの交差角  $\phi$  はラジアン単位で与えるものとする。式 (8) に式 (6), (7), (9) を代入することにより、繰り返し計算を行わずに直接的に摩擦係数  $f_{cw}$  を求めることができる。近似式による計算結果と厳密解との比較を図—2 に示す。ただし、交差角  $\phi$  は、 $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  の 3 種類とした。変数の変化域は、 $10 \leq \hat{U}_w/(\alpha\sigma_0) \leq 10^5, 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \alpha \leq 2.0$  であり、実用上問題となる範囲を十分にカバーしている。図中には前報の陰形式の近似式による計算値も示した。

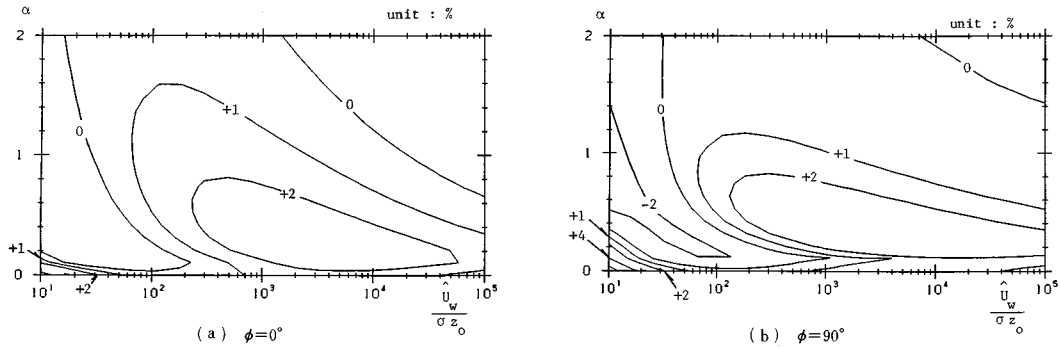
近似式の精度を検討するために、厳密解に対する誤差を求め、交差角  $\phi$  が  $0^\circ$  と  $90^\circ$  の場合について図示した結果が図—3(a), (b) である。一方、図—4(a), (b) は陰形式の近似式の精度を示したものである。

図—4(a), (b) では、 $\hat{U}_w/(\alpha\sigma_0) = 50$  付近で誤差の急変がみられる。これは、前報において  $\hat{U}_w/(\alpha\sigma_0) = 50$  をはさんで異なる近似式を与えているためである。 $\hat{U}_w/(\alpha\sigma_0) \geq 50$  の式は、 $\hat{U}_w/(\alpha\sigma_0) \rightarrow \infty$  の条件のもとに式 (3) 中の Bessel 関数を漸近展開して得られたものである。したがって、 $\hat{U}_w/(\alpha\sigma_0)$  の値がさほど大きくないとき、最大で 7% 程度の誤差が生じる。横軸の値が大きくなるにつれて誤差は急速に減少する。

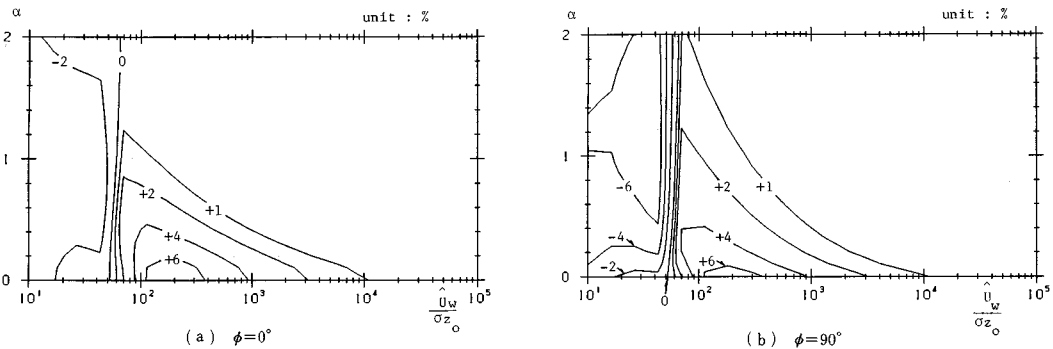
一方、図—3(a), (b) をみると、今回得られた近似式の誤差は広い範囲にわたって、一様に小さいことがわかる。図中の左下方に幾分誤差の大きい部分がみられるが、この領域の条件が現実には生じることほとんどない。よって、この部分を除けば、誤差はほぼ 3% 未満に押さえられている。

#### 4. 結 語

本研究では、著者によりすでに提案されている波・流



図—3 新しい近似式の精度

図—4 前報<sup>3)</sup>の近似式の精度

れ共存場における摩擦係数の実用的な陽形式近似式を提案した。これを用いることにより、繰り返し計算をせずに直接的に摩擦係数が求まる。同近似式の精度は十分に高く、解析解に対する誤差は最大で3%程度であった。三次元海浜変形計算のように計算点が非常に多い場合、ここで得られた式を用いることによって、計算時間の短縮が可能となる。

最後に、本研究を行うに際し貴重な助言を頂いた東北大学 首藤伸夫教授、澤本正樹教授に感謝の意を表す。また、本論文の公表にあたり、小川記念基金の補助を受けたことを付記する。

#### 参考文献

- 1) Smith, J.D. : Modeling of sediment transport on continental shelves, in *The Sea*, Vol. 6, edited by E.D. Goldberg *et al.*, pp. 539~577, Interscience, New York, 1977.
- 2) Grant, W.D. and Madsen, O.S. : Combined wave and current interaction with a rough bottom, *J. Geophys. Res.*, Vol. 84, No. C4, pp. 1797~1808, 1979.
- 3) 田中 仁・首藤伸夫：波・流れ共存時の底面摩擦に関する実験，第27回海岸工学講演会論文集，pp. 163~167, 1980.
- 4) Christoffersen, J.B. and Jonsson, I.G. : Bed friction and dissipation in a combined current and wave motion, *Ocean Eng.*, Vol. 12, No. 5, pp. 387~423, 1985.
- 5) 丸山康樹・鹿島遼一・成廣明雄・近藤浩右：発電所港湾における港内堆砂量の予測モデル，第29回海岸工学講演会論文集，pp. 294~298, 1982.
- 6) 渡辺 晃・丸山康樹・清水隆夫・榊山 勉：構造物設置に伴う三次元海浜変形の予測モデル，第31回海岸工学講演会論文集，pp. 406~410, 1984.
- 7) 田中 仁：任意波形を有する波動下での水粒子速度と底面せん断応力の算定手法に関する研究，土木学会論文集，第381号/II-7, pp. 181~187, 1987.
- 8) イスマイル・アイデン・首藤伸夫：振動流境界層への  $k-\epsilon$  モデルの適用，第33回海岸工学講演会論文集，pp. 41~45, 1986.
- 9) Trowbridge, J. and Madsen, O.S. : Turbulent wave boundary layers 1. Model Formulation and first order solution, *J. Geophys. Res.*, Vol. 89, No. C5, pp. 7989~7997, 1984.
- 10) Swart, D.H. : Offshore sediment transport and equilibrium beach profiles, Pub. No. 131, Delft Hydr. Lab., 244 pp., 1974.
- 11) Jonsson, I.G. : Wave boundary layer and friction factors, *Proc. of 10th Conf. on Coastal Eng.*, pp. 127~148, 1966.

(1989.5.24・受付)