

波動境界値問題におけるポテンシャル接続法の選点解法[†]

A COLLOCATION METHOD OF MATCHED EIGENFUNCTION EXPANSIONS ON THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF WAVE-STRUCTURE INTERACTIONS

吉田明徳*・小島治幸**・鶴本良博***

By Akinori YOSHIDA, Haruyuki KOJIMA and Yoshihiro TSURUMOTO

This paper presents a new method for the matched eigenfunction expansions on the boundary-value problem of wave-structure interactions. When the solutions of divided subdomains are matched on the common boundaries, pointwise convergence is specified in the new method instead of mean convergence in the conventional one. Theoretical formulation and computer programming become extremely simple because no tedious evaluations of the integrals related to the eigen functions are needed. Numerical calculations based on both the methods are carried out for floating rectangular bodies and submerged horizontal plates. The mean square errors of the matching conditions are always much smaller in the new method than in the conventional one.

Keywords: matched eigenfunction expansions, collocation method, wave-structure interactions

1. ま え が き

ポテンシャル接続法（あるいは領域分割法, the method of matched eigenfunction expansions）は、波動の境界値問題の1つの有力な解析手法であり、海岸構造物や海洋構造物と波との相互干渉に関する問題の解析に広く用いられてきている。

ポテンシャル接続法は、わが国では井島（1969）¹⁾（1971）²⁾によって初めて提示され、詳細な解説が与えられている。その概略は、矩形状に分割された個々の流体域における流体運動の速度ポテンシャルを、それぞれ、水深方向の座標 z に関する固有関数を用いて、未定係数を含む無限級数に展開（固有関数展開）しておき、ついで、隣合う領域の速度ポテンシャル（圧力）とその法線微分（流速）が境界面において一致すべき条件（連続条件）と、固有関数の直交性を利用して、未定係数の間

に成り立つ一次関係式を導き、これを数値的に解いて未定係数を決めるというものである。

ポテンシャル接続法の適用は、流体域が鉛直面に関して矩形状に分割できる場合（二次元問題では矩形状構造物^{1)~12)}、三次元では側面が鉛直な柱状構造物^{13~19)}）に限られるけれども、有限要素法や境界要素法に比べて、精度の良い厳密解が得られること、いったん速度ポテンシャルが求まればその微分・積分量は数値微分・積分によることなく理論的に得られること、数値計算に要する計算機の記憶容量と計算時間が小さくて済むこと等多くの利点がある。

しかしながら、未定係数に関する連立一次方程式を導く際に、固有関数に関する積分演算を行うため、一般に理論式の展開とその表示は、機械的ではあるが煩雑である。そのためか、適用例の多くは簡単な形状の構造物で、かつ線形問題の場合に限られ、たとえば非線形問題への適用は、著者らの知る限りでは、矩形潜堤とステップ地形による波の変形を取り扱った Massel (1983)⁹⁾ の例だけである。

著者らも、ポテンシャル接続法を摂動法と併用して、有限振幅波に関する波動境界値問題の解析に用いることを試みたが、固有関数に関する積分演算を行う従来の解法を踏襲する限り、理論式の展開と計算プログラムが非

[†] 本論文は、九州大学工学集報²⁰⁾と海岸工学論文集²¹⁾に一部既発表の成果に、その後の研究データと考察を加えて新たに取りまとめたものである。

* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部水工土木学科 (〒812 福岡市東区箱崎)

** 正会員 Engr. 九州大学助手 工学部水工土木学科 (同上)

*** 正会員 工修 高松工業高等専門学校助教授 土木工学科 (〒761 香川県高松市勅使町 355)

常に煩雑となる。そこで、従来の解法に代えて、固有関数に関する積分演算を行うことなく未定係数が決定できる、きわめて簡単な解析法（選点解法）を思いつき、二次元問題を対象に、その妥当性と解の精度の検討を行った。

本文はその検討結果について報告するもので、まず、従来の解法は、連続条件におけるポテンシャル（およびその法線微分）の二乗誤差が境界面上で全体として最小となるように未定係数を決定しようとするもので、境界面上の各点で連続条件が直接成り立つことを規定しているわけではないことを示し、境界面上に取った計算点（選点）のみにおいて連続条件が成り立つことを規定することによって、固有関数の直交性を用いることなく未定係数の間に成り立つ一次関係式を導き、これを数値的に解いて未定係数を決めるという解法（選点解法）を提示した。ついで、矩形浮体を例に、従来の解法と比較して選点解法の妥当性と解の精度を、計算点の配置や個数および級数の打ち切り項数などについて検討した。最後に、没水水平版や波浪中で動揺する矩形浮体等に対して選点解法を適用し、従来の解法との比較を行って、選点解法の有用性を示した。

2. ポテンシャル接続法

ポテンシャル接続法の概略を、図-1に示すような完全没水の不透過矩形構造物に、 x 軸の正の方向より振幅 ζ 、角周波数 σ 、波数 k の微小振幅波が入射する場合を例に説明する。簡単のため構造物は固定されているものとするが、構造物が波によって動揺する場合、あるいは静水中で構造物に強制動揺を与える場合についても議論の本質は変わらない（3.（7）に波浪中の動揺浮体への適用例を示している）。

流体運動は非粘性流体の無渦運動と仮定すると、その速度ポテンシャル $\Phi(x, z, t)$ は次式のように表わせる。

$$\Phi(x, z, t) = Re[(g\zeta/\sigma)\phi(x, z)\exp(i\sigma t)] \dots\dots (1)$$

図-1中の ABCD と A'B'C'D' で示す仮想の境界面 ($x = \pm b$) によって、流体域を (1)、(2)、(3)、(4) の

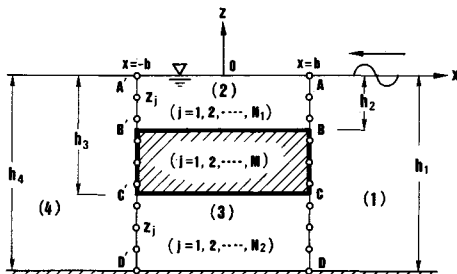


図-1 領域分割と計算点

矩形の領域に分割し、これ以後各領域に関する諸量に添え字 i ($=1, 2, 3, 4$) をつけて $\phi_i(x, z)$, h_i のように表わすこととする。簡単のため海底面は一定水深 h とするが、便宜上添え字をつけて表わす場合もある。

関数 $\phi_i(x, z)$ が満足すべき支配方程式と各領域の鉛直方向の境界面における境界条件は次式のようになる。

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \phi_i \quad (z=0; i=1, 2, 4) \dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0 \quad (z=-h_i; i=1, 2, 3, 4) \dots\dots (4)$$

これらの境界条件を満足するラプラス方程式 (2) の一般解 ϕ_i は、次式のように無限級数（固有関数展開）で表わすことができる。

$$\phi_i(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_i^{(n)}(x) Z_i^{(n)}(z) \quad (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots (5)$$

$X_i^{(n)}(x)$, $Z_i^{(n)}(z)$ は各領域に応じて次式のようになる。

$$X_i^{(n)}(x) = A_i^{(n)} \exp(-k_i^{(n)} x) + B_i^{(n)} \exp(k_i^{(n)} x) \quad (i=1, 2, 4) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots (6)$$

$$X_3^{(n)}(x) = \begin{cases} A_3^{(n)} \frac{x}{b} + B_3^{(n)} & (n=0) \\ A_3^{(n)} \frac{\sinh \mu^{(n)} x}{\sinh \mu^{(n)} b} + B_3^{(n)} \frac{\cosh \mu^{(n)} x}{\cosh \mu^{(n)} b} & \dots\dots (7) \end{cases}$$

$$Z_i^{(n)}(z) = \frac{\cos k_i^{(n)}(z+h_i)}{\cos k_i^{(n)} h_i} \quad (i=1, 2, 4) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots (8)$$

$$Z_3^{(n)}(z) = \cos \mu^{(n)}(z+h_3) \dots\dots (9)$$

$\mu^{(n)} = n\pi/(h-h_3)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) で、 $k_1^{(n)}$ は ($n=0$) の場合には虚数、($n=1, 2, \dots$) の場合は実数と規定して次式により与えられる。

$$\sigma^2 h_i / g = -k_i^{(n)} h_i \tan k_i^{(n)} h_i \quad (i=1, 2, 4) \dots\dots (10)$$

一定水深を仮定しているから $k_1^{(n)}$ と $k_4^{(n)}$ は等しく、添え字を省略して $k^{(n)}$ と表わす。また、 $k^{(0)} = ik$ で k は入射波の波数である。

式 (6) 中の未定係数 $A_i^{(n)}$ と $B_i^{(n)}$ は、領域 (1) では $B_1^{(n)} = 1$ ($n=0$)、 $=0$ ($n \neq 0$) で、領域 (4) では $A_4^{(n)} = 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$) である。なお、有界な領域 (2) では数値計算上式 (6) と等価な次の形を用いる方が便利である。

$$X_2^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_2^{(n)} \frac{\sinh k_2^{(n)} x}{\sinh k_2^{(n)} b} + B_2^{(n)} \frac{\cosh k_2^{(n)} x}{\cosh k_2^{(n)} b} \right] \dots\dots (11)$$

さらに、 $X_i^{(n)}(x)$ に関して、領域 (1) では x を $(x-b)$ とおき、領域 (4) では x を $(x+b)$ とおいて、入射波とそれに対する反射波・通過波の位相を変えて表現した式 (6) を用いると、連続条件を適用した際に、

$\exp(\pm k^{(m)}b)$ の指数関数値が現われず便利である. 3. に示す未定係数の計算例は, このように表示した場合の値である.

各領域の速度ポテンシャルの未定係数は, 隣合う領域の境界面における速度ポテンシャル (圧力) とその法線微分 (流速) の連続条件より決められることになる.

$$\phi_i = \begin{cases} \phi_2 & (-h_2 \leq z \leq 0) \\ \phi_3 & (-h \leq z \leq -h_3) \end{cases} \dots\dots\dots(12)$$

$$\partial\phi_i/\partial x = \begin{cases} \partial\phi_2/\partial x & (-h_2 \leq z \leq 0) \\ 0 & (-h_3 \leq z \leq -h_2) \\ \partial\phi_3/\partial x & (-h \leq z \leq -h_3) \end{cases} \dots\dots\dots(13)$$

上式中の添え字 i は境界面 ABCD で $i=1, A'B'C'D'$ で $i=4$ を取る.

(1) 従来の解法

従来, ポテンシャル接続法として用いられてきた解法は, 関数系 $Z_i^{(m)}(z)$ が次に示すような直交性を有することを利用して, 未定係数の間に成り立つ一次関係式を導こうとするものである.

$$\int_{-h}^0 Z_1^{(m)}(z) Z_1^{(n)}(z) dz = \begin{cases} \alpha_n & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (i=1, 4) \dots\dots\dots(14)$$

$$\int_{-h_2}^0 Z_2^{(m)}(z) Z_2^{(n)}(z) dz = \begin{cases} \beta_n & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \dots\dots\dots(15)$$

$$\int_{-h}^{-h_3} Z_3^{(m)}(z) Z_3^{(n)}(z) dz = \begin{cases} \gamma_n & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \dots\dots\dots(16)$$

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\tan k^{(m)}h}{k^{(m)}h} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2k^{(m)}h}{\sin 2k^{(m)}h} \right] \\ \beta_n &= \frac{\tan k_2^{(m)}h}{k_2^{(m)}h} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2k_2^{(m)}h}{\sin 2k_2^{(m)}h} \right] \\ \gamma_n &= \begin{cases} (h-h_3) & (n=0) \\ (h-h_3)/2 & (n \neq 0) \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

境界面 ABCD における連続条件を考え, 圧力の連続条件式 (12) において, $Z_2^{(m)}(z)$ が $(-h_2 \leq z \leq 0)$ の間で直交性を有することを利用して. すなわち, 式 (12) の両辺に $Z_2^{(m)}(z)$ をかけて $z=-h_2$ から $z=0$ まで積分し式 (15) の関係を用いると, 定数 $X_2^{(m)}(b)$ と $X_1^{(m)}(b)$ の関係, すなわち未定係数 $A_2^{(m)}, B_2^{(m)}, A_1^{(m)}$ の関数を規定する無限個の一次関係式が得られる.

$$\beta_m X_2^{(m)}(b) = \sum_{n=0}^{\infty} X_1^{(n)}(b) \int_{-h_2}^0 Z_1^{(n)}(z) Z_2^{(m)}(z) dz \quad (m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(18)$$

同じく式 (12) で, $Z_3^{(p)}(z)$ が $(-h \leq z \leq -h_3)$ の間で直交性を有することを利用して, 式 (16) の関係より式 (18) と同様, 定数 $X_3^{(p)}(b)$ と $X_1^{(m)}(b)$ の関係, すなわち未定係数 $A_3^{(p)}, B_3^{(p)}, A_1^{(m)}$ に関する無限個の一次関係式を得る.

$$\gamma_p X_3^{(p)}(b) = \sum_{n=0}^{\infty} X_1^{(n)}(b) \int_{-h}^{-h_3} Z_1^{(n)}(z) Z_3^{(p)}(z) dz \quad (p=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(19)$$

流速の連続条件式 (13) では, $Z_1^{(m)}(z)$ が $(-h \leq z \leq 0)$ の間で直交性を有することを利用して. 式 (13) の両辺に $Z_1^{(m)}(z)$ をかけて $z=-h$ から $z=0$ まで積分し式 (14) の関係を用いると, 定数 $X_1^{(m)}(b), X_2^{(m)}(b), X_3^{(p)}(b)$ の関係, すなわち未定係数 $A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, B_2^{(m)}, A_3^{(p)}, B_3^{(p)}$ の関係を規定する無限個の一次関係式を得る.

$$\alpha_n \bar{X}_1^{(m)}(b) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{X}_2^{(m)}(b) \int_{-h_2}^0 Z_2^{(m)}(z) Z_1^{(n)}(z) dz + \sum_{p=0}^{\infty} \bar{X}_3^{(p)}(b) \int_{-h}^{-h_3} Z_3^{(p)}(z) Z_1^{(n)}(z) dz \quad (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(20)$$

ただし, 式 (20) 中の $\bar{X}_1^{(m)}(x)$ は $\partial X_1^{(m)}/\partial x$ を意味する.

速度ポテンシャルの級数項の打ち切り項数を $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ に関してそれぞれ n^*, m^*, p^*, n^* とすると, 式 (18), (19), (20) は未定係数 $A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, B_2^{(m)}, A_3^{(p)}, B_3^{(p)}$ に関し, $(n^*+m^*+p^*+3)$ 個の一次関係式を与えることになる. 同様に, もう一方の境界面 A'B'C'D' においても, これと独立に未定係数 $A_2^{(m)}, B_2^{(m)}, A_3^{(p)}, B_3^{(p)}, B_4^{(m)}$ に関する $(n^*+m^*+p^*+3)$ 個の関係式が得られるから, これら $2(n^*+m^*+p^*+3)$ 個の一次関係式を連立して解くことにより未定係数が決まることになる. これが, 従来ポテンシャル接続法とよばれる解析法の概略である. 波浪中で動揺する浮体等の場合には, 浮体の運動変位が未知量として加わり, 式 (18), (19), (20) に加えて, 浮体運動の自由度と同数の運動方程式を連立して解くことになるが, 基本的な解析の手順は何ら変わらない.

(2) 連続条件の二乗誤差と従来の解法

いま, 境界面 ABCD における連続条件の, ポテンシャルの二乗誤差を ϵ_p^2 , ポテンシャルの法線微分の二乗誤差を ϵ_b^2 とすると, $\epsilon_p^2, \epsilon_b^2$ はそれぞれ次式で与えられる.

$$\epsilon_p^2 = \int_{-h_2}^0 \{ \phi_1(b, z) - \phi_2(b, z) \}^2 dz + \int_{-h}^{-h_3} \{ \phi_1(b, z) - \phi_3(b, z) \}^2 dz \dots\dots\dots(21)$$

$$\epsilon_b^2 = \int_{-h_2}^0 \{ \bar{\phi}_1(b, z) - \bar{\phi}_2(b, z) \}^2 dz + \int_{-h_3}^{-h} \{ \bar{\phi}_1(b, z) \}^2 dz + \int_{-h}^{-h_3} \{ \bar{\phi}_1(b, z) - \bar{\phi}_3(b, z) \}^2 dz \dots\dots\dots(22)$$

ただし, 式 (22) 中の $\bar{\phi}$ は $\partial\phi/\partial x$ を意味する.

まず, 二乗誤差 ϵ_p^2 を最小とする係数 $X_2^{(m)}(b)$ の条件, および係数 $X_3^{(p)}(b)$ の条件は, 式 (5) を考慮するとそれぞれ式 (23), (24) で表わされる.

$$\frac{\partial \epsilon_p^2}{\partial X_2^{(m)}(b)} = -2 \int_{-h_2}^0 \{ \phi_1(b, z) - \phi_2(b, z) \} Z_2^{(m)}(z) dz = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(23)$$

$$\frac{\partial \epsilon_p^2}{\partial X_3^{(p)}(b)} = -2 \int_{-h}^{-h_3} \{ \phi_1(b, z) - \phi_3(b, z) \} Z_3^{(p)}(z) dz = 0$$

$$(p=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(24)$$

式 (23), (24) 中の $\phi_1(b, z)$, $\phi_2(b, z)$, $\phi_3(b, z)$ に式 (5) を用い, さらに式 (15), (16) の関係を用いて書き改めると, 結局式 (23) は式 (18) と一致し, 式 (24) は式 (19) と一致する.

同様に, ε_2^* を最小にする係数 $\bar{X}_2^{(m)}(b)$ の条件より次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_2^*}{\partial \bar{X}_1^{(m)}(b)} &= 2 \int_{-h_2}^0 \{\bar{\phi}_1(b, z) - \bar{\phi}_2(b, z)\} Z_1^{(m)}(z) dz \\ &+ 2 \int_{-h_2}^{-h_3} \{\bar{\phi}_1(b, z)\} Z_1^{(m)}(z) dz \\ &+ 2 \int_{-h}^{-h_3} \{\bar{\phi}_1(b, z) - \bar{\phi}_3(b, z)\} Z_1^{(m)}(z) dz = 0 \\ (n=0, 1, 2, \dots) &\dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

式 (5) を代入し, 式 (14) の関係を用いて書き改めると式 (25) は結局式 (20) と一致する結果を得る. したがって, 前節で述べた従来の解法は, 級数項を有限項で打ち切った式 (23), (24), (25) およびもう一方の境界面 A'B'C'D' における同様の条件式を連立して解いて, これらの条件式を同時に満足する未定係数の組を決めていることになる.

すなわち, ポテンシャル接続法は無限級数展開されたポテンシャルを数値計算上有限項で打ち切り, 連続条件式 (12), (13) を満足することを条件に未定係数を決定しようとする方法であるが, 関数系 $Z_i^{(m)}(z)$ の直交性を利用する従来の解法は, この満足度を境界面全体の二乗誤差が最小となる (平均収束する²²⁾) ことで評価するものであるといえる.

(3) 選点解法

境界面における連続条件の二乗誤差が最小となるように未定係数を決めるかわりに, 境界面上に異なる z の値の計算点 (選点) を取り, その計算点上で式 (12) と式 (13) が成り立つ (点収束する²²⁾) ことを規定することによっても, 未定係数に関する一次関係式を得ることができる. すなわち, 図-1 に示すように境界面 AB (同じく A'B') 上に N_1 個, BC (同じく B'C') 上に M 個, CD (同じく C'D') 上に N_2 個の点 z_j ($j=1, 2, \dots, N_1$), ($j=1, 2, \dots, M$), ($j=1, 2, \dots, N_2$) を取り, 各点において式 (12) と (13) の連続条件が成り立つこととすると, 式 (12), (13) よりそれぞれ次式を得る.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{X}_i^{(n)}(b) Z_i^{(n)}(z_j) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{X}_2^{(m)}(b) Z_2^{(m)}(z_j) \\ (j=1, \dots, N_1) \\ \sum_{p=0}^{\infty} \bar{X}_3^{(p)}(b) Z_3^{(p)}(z_j) \\ (j=1, \dots, N_2) \\ \dots\dots\dots(26) \end{cases} \quad (i=1, 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{X}_i^{(n)}(b) Z_i^{(n)}(z_j) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{X}_2^{(m)}(b) Z_2^{(m)}(z_j) \\ (j=1, \dots, N_1) \\ 0 \quad (j=1, \dots, M) \quad (i=1, 4) \\ \sum_{p=0}^{\infty} \bar{X}_3^{(p)}(b) Z_3^{(p)}(z_j) \\ (j=1, \dots, N_2) \\ \dots\dots\dots(27) \end{cases}$$

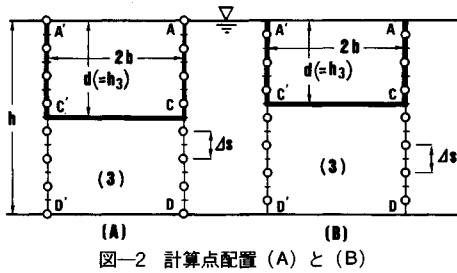
式 (26) は (N_1+N_2) 個の各 z_j の値について成り立ち, 式 (27) は (N_1+M+N_2) 個の各 z_j の値について成り立つから, 境界 ABCD において, 両式は未定係数 $A_1^{(n)}$, $A_2^{(m)}$, $B_2^{(m)}$, $A_3^{(p)}$, $B_3^{(p)}$ に関する $(2N_1+2N_2+M)$ 個の一次関係式を与えることになる. 同様に, もう一方の境界面 A'B'C'D' においても, これと独立に, 未定係数 $A_2^{(m)}$, $B_2^{(m)}$, $A_3^{(p)}$, $B_3^{(p)}$ に関する $(2N_1+2N_2+M)$ 個の一次関係式が得られる. したがって, 級数の打ち切り項数 n^* , m^* , p^* , と計算点の数 N_1 , N_2 , M を, $(n^*+m^*+p^*+3 \leq 2N_1+2N_2+M)$ の関係が満足されるように取り, これらを連立して解くことによって, 未定係数を定めることができる (ただし, $n^*+m^*+p^*+3 < 2N_1+2N_2+M$ の場合には, 未定係数の数に比べて, 条件式が過剰となるため, 最小二乗解を求めることになる). この方法によれば, 直交関数に関する煩雑な積分を行う必要はなく, 各領域において, 水深方向の境界面における, 運動学的および力学的境界条件を満足する速度ポテンシャルの一般解 (固有関数展開) が得られれば, それを式 (12) と (13) の連続条件式に用い, 水深方向の変数 z の値を変えて得られる未定係数に関する一次関係式を連立して解くだけである.

3. 数値計算結果と考察

選点解法の妥当性を明らかにするには, 計算点の配置, 計算点の個数, 級数項の打ち切り項数などが解の精度に及ぼす影響を調べておく必要がある. まず, 水面に固定されている矩形浮体を対象に, 従来の解法と選点解法による解析を行い, 両者を比較して選点解法の妥当性と解の精度を検討した. ついで, 没水水平版や波浪中で動揺する矩形浮体等の構造物を対象に, 両解法による解析を行って選点解法の適用性を調べた.

(1) 選点解法における計算点の配置

計算点の配置については検討の結果, いずれの場合であっても, 計算点は水面から水底面までを通して等間隔に取るのが最も精度がよく (連続条件の二乗誤差が小さい), 計算点を不等間隔に配置した場合 (たとえば図-1 において境界 AB 上の計算点の間隔と境界 BC および CD 上の計算点の間隔を異なって取った場合など) には著しく精度が落ちることがわかった. 等間隔の条件のもとで取り得る計算点配置は図-2 に示す 2 通りである



(図-2は矩形浮体を例に計算点配置を示している。図-1において、領域(2)がなく、流体域が領域(1)(3)(4)から成るものとして、諸量の添え字はそのまま用いる)。

図-2中(A)の計算点配置は、水面と水底に計算点を取り、その間に計算点を等間隔に配置した場合で、(B)の計算点配置は、境界面を等間隔に分割し、分割要素の中点を計算点に取った場合である。浮体の底面位置($z = -h_3$, 浮体喫水 d で表す)は(A)の場合には $d = (2M-1) \cdot (\Delta s/2)$, (B)の場合には $d = 2M \cdot (\Delta s/2)$ にとるものとする。こうすると、各境界の鉛直方向の長さは(A)では $(\Delta s/2)$ の奇数倍, (B)では $(\Delta s/2)$ の偶数倍となり、浮体底面は(A)(B)のどちらも、計算点のちょうど中間に位置することになる。理論上、 d は $(\Delta s/2)$ とは無関係に任意にとれるが、このようにとる方が精度よい解が得られる((3)参照)。

(2) 選点解法の妥当性と解の精度

喫水 $d/h=0.5$ の矩形浮体について、選点解法による解と従来の解法による解との比較を、反射率 $K_R (= |A_1^{(n)}|)$, 通過率 $K_T (= |B_1^{(n)}|)$, 浮体に作用する水平波力の振幅 P_x と鉛直波力の振幅 P_z について表-1に示している。いずれの計算点配置についても、選点解法による解と従来の解法による解とは、有効数字で2桁は完

表-1 反射率, 通過率, および波力 [$d/h=0.5, 2b/h=1.0, M=N_2=5, n^*+1=10, p^*+1=5$]

	kh	K_R	K_T	$P_x / \rho g C_0 h$	$P_z / \rho g C_0 h$
従来の解法	0.1	0.1244	0.9922	0.1489	0.9956
	0.5	0.5603	0.8283	0.6329	0.9001
	1.0	0.8637	0.5039	0.8410	0.6879
	1.5	0.9665	0.2567	0.7875	0.4859
	2.0	0.9926	0.1211	0.6836	0.3361
	2.5	0.9984	0.0561	0.5948	0.2331
3.0	0.9997	0.0262	0.5267	0.1634	
選点解法	0.1	0.1254	0.9921	0.1505	0.9956
	0.5	0.5636	0.8260	0.6386	0.8995
	1.0	0.8663	0.4995	0.8459	0.6861
	1.5	0.9676	0.2526	0.7904	0.4831
	2.0	0.9930	0.1183	0.6853	0.3326
	2.5	0.9985	0.0543	0.5960	0.2295
(A)	3.0	0.9997	0.0251	0.5276	0.1600
選点解法	0.1	0.1253	0.9921	0.1504	0.9956
	0.5	0.5632	0.8263	0.6380	0.8996
	1.0	0.8661	0.4999	0.8454	0.6864
	1.5	0.9675	0.2529	0.7902	0.4835
	2.0	0.9930	0.1184	0.6852	0.3331
	2.5	0.9985	0.0543	0.5959	0.2300
(B)	3.0	0.9997	0.0251	0.5275	0.1604

全に一致し、選点解法による解同士は互いに有効数字で3から4桁一致していて、選点解法が妥当な解を与えることがわかる。

なお、(A)と(B)の計算点配置で計算点の間隔 Δs を同じに取ると、(A)と(B)で喫水 d が $(\Delta s/2)$ だけ異なるため、表-1は(A)(B)とも計算点数を同じ($M=N_2=5$)に取って計算した結果である。また、選点解法と従来の解法とも、各領域のポテンシャルの打ち切り項数は、対応する境界面の計算点の個数と同じに取っている(すなわち、 $n^*+1=M+N_2, p^*+1=N_2$, この n^* と p^* を便宜上、標準値とよぶ)。

速度ポテンシャルの未定係数を領域(1)の $A_1^{(n)}$ と領域(3)の $A_3^{(p)}$ について、従来の解法と選点解法とについて比較したのが表-2である。同じ項の係数値について比較すると、 n (同じく p) が小さいところでは解法による差は小さく、 n が大きいほど解法による差が大き

表-2 未定係数値の比較 [$A_1^{(n)}, A_3^{(p)}$]

		$kh=1.0 \quad d/h=0.5 \quad 2b/h=1.0 \quad M=5 \quad N_2=5 \quad n^*+1=10 \quad p^*+1=5$					
		選点解法 (A)			従来の解法		
n		$Re[A_1^{(n)}]$	$Im[A_1^{(n)}]$	$ A_1^{(n)} $	$Re[A_1^{(n)}]$	$Im[A_1^{(n)}]$	$ A_1^{(n)} $
0		0.7490E+00	0.4353E+00	0.8663E+00	0.7444E+00	0.4381E+00	0.8637E+00
1		0.1624E+00	0.9862E-01	0.1900E+00	0.1584E+00	0.9802E-01	0.1863E+00
2		0.2806E-01	0.1114E-01	0.3019E-01	0.3014E-01	0.1226E-01	0.3254E-01
3		-0.2785E-01	-0.1439E-01	0.3135E-01	-0.2497E-01	-0.1318E-01	0.2823E-01
4		-0.7683E-02	-0.3240E-02	0.8338E-02	-0.9427E-02	-0.4090E-02	0.1028E-01
5		0.1388E-01	0.6906E-02	0.1550E-01	0.1132E-01	0.5752E-02	0.1270E-01
6		0.3068E-02	0.1325E-02	0.3342E-02	0.4921E-02	0.2195E-02	0.5388E-02
7		-0.9574E-02	-0.4683E-02	0.1066E-01	-0.7222E-02	-0.3585E-02	0.8063E-02
8		-0.9783E-03	-0.4329E-03	0.1070E-02	-0.3246E-02	-0.1476E-02	0.3565E-02
9		0.3902E-02	0.1897E-02	0.4338E-02	0.6590E-02	0.3192E-02	0.7323E-02
p		$Re[A_3^{(p)}]$	$Im[A_3^{(p)}]$	$ A_3^{(p)} $	$Re[A_3^{(p)}]$	$Im[A_3^{(p)}]$	$ A_3^{(p)} $
0		0.3757E+00	0.2175E+00	0.4341E+00	0.3772E+00	0.2210E+00	0.4372E+00
1		0.4208E-01	0.2436E-01	0.4863E-01	0.4501E-01	0.2638E-01	0.5217E-01
2		0.1200E-01	0.6946E-02	0.1387E-01	0.1463E-01	0.8571E-02	0.1695E-01
3		0.4941E-02	0.2860E-02	0.5710E-02	0.7748E-02	0.4541E-02	0.8981E-02
4		0.1628E-02	0.9426E-03	0.1882E-02	0.5183E-02	0.3037E-02	0.6007E-02

くなる。表-2には $kh=1.0$ で、計算点配置 (A) の場合のみを示したが、(A)(B) いずれの計算点配置の場合も、選点解法の方が従来の方法よりも大体において未定係数値の収束が速く (吉田・鶴本・小島 (1989)²⁰⁾、このことは kh の値によらない。

反射率、通過率、波力などの算定に関しては、表-2に示したような、選点解法と従来の解法との間の係数値の差は問題とならない。すなわち、反射率と通過率はそれぞれ領域 (1) と (4) のポテンシャルの未定係数の初項で与えられるし、波力の算定値において、 n の大きなところの係数が寄与する分は比較的小さい。しかし、ポテンシャルの微分量である流速の算定値や、その二乗等の非線形量の算定値には、その差が大きく影響することになる。いずれがより厳密な解であるかは、境界面における連続条件式 (12), (13) の満足の程度によって判断することができると思われる。

このため、左右の境界面をそれぞれ 400 等分し、各要素の midpoint におけるポテンシャルの法線微分値 $\partial\phi/\partial x$ を算定して、式 (22) より境界面 ACD と A'C'D' 上の二乗誤差の和を求めた結果を図-3に示している。ただし、図中の ϵ_p^2 は、入射波の関数 $\phi(x, z) = Z^m(z) \exp(k^{(0)}x)$ の法線微分の二乗を、 $(-h \leq z \leq 0)$ で積分した $[kh \tanh(kh)[1 + 2kh/\sinh(2kh)]/2$ で二乗誤差の絶対値を基準化した値である。図中の実線が従来の解法による解の二乗誤差で、破線と点線がそれぞれ計算点配置 (A) と (B) に対する選点解法による解の二乗誤差である。さらに、 kh が 0.5 と 1.0 について、選点の個数 $N (= M + N_2, M = N_2)$ を変化させた場合 (すなわち級数項の打ち切り項数を標準値 $n^*+1 = M + N_2, p^*+1 = N_2$ 、に取って変化させた場合) の ϵ_p^2 の変化を選点解法と従来の解法とについて図-4に示した。これらの結果をみると、従来の解法より選点解法の方が kh や打ち切り項数によらず ϵ_p^2 は常に小さくなっている ((7) の没水水平版の解析例参照)。すなわち、隣合う領域の境界面における連続条件の二乗誤差が最小となるように未定係数を決定しようとする従来の解法に比べ、境界面の計算点上でのみ連続条件が成り立つことを条件

に未定係数を決める選点解法の方が、精度のよい解が得られることを示している。なお、ここに示してはいないが、ポテンシャル値の二乗誤差 ϵ_p^2 は、従来の方法も選点解法も、ともにほぼ 0 となり、連続条件は十分満足されている。

図-5は入射波側の境界面 ACD 上の流速分布で、隣合う領域の速度ポテンシャルよりそれぞれ境界面上の流速を算定し、両者を比較して流速の連続性の程度を示したものである。連続性の程度の差異は必ずしも明確ではないが、従来の解法では、領域 (1) と (3) の境界面における流速が、選点解法に比べて境界面に沿って幾分大きく振動している点や、浮体隅角部近傍での流速の連続性などから、選点解法による方が、従来の解法に比べて、連続条件が精度良く満足されているといえる。

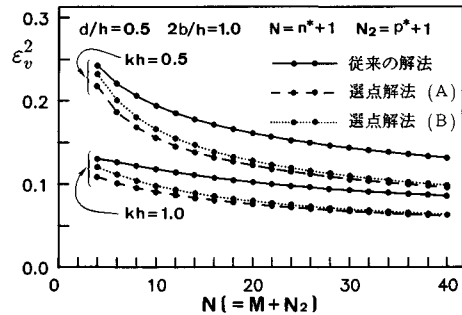


図-4 打ち切り項数 (計算点個数) による連続条件の二乗誤差

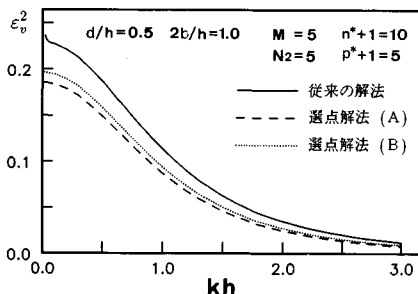


図-3 連続条件の二乗誤差

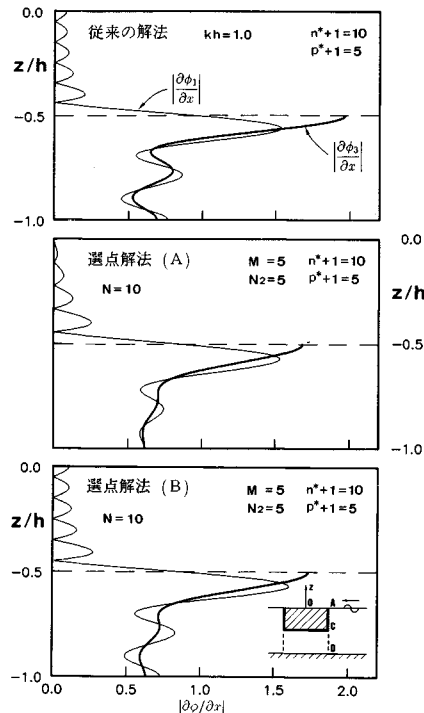


図-5 境界面 ACD の流速分布

以上の結果を、(A)と(B)の計算点配置に関して比較すると、(A)の方がわずかであるが二乗誤差が小さく、境界面における流速分布からも、連続性がよりよく満足されているようである。ただし、その差は小さく、実用上両者は全く同じ結果を与えているといえる。

(3) 鉛直境界の長さ(浮体喫水 d)と計算点の関係
理論上、各領域の鉛直境界の長さ(この場合は浮体喫水 d)は計算点と無関係に任意の値にとれるが、そうした場合は若干精度が悪くなる。この程度を通過率を例に図-6に示した。これは $\Delta s/h=0.1$ にとり、喫水 d を $\Delta s/2=0.05h$ きざみの値ではなく、その間の任意の値 $d/h=0.52$ に設定して選点解法により計算した結果を、従来の解法による解と比較したものである。これをみると、従来の解法による解に比べて幾分異なる値を与えており、(2)において喫水 d を、計算点配置(A)の場合には $d=(2M-1)\cdot(\Delta s/2)$ 、(B)の場合には $d=2M\cdot(\Delta s/2)$ と、 $\Delta s/2$ の整数倍の長さ設定した場合のような精度よい解が得られないことがわかる。

すなわち、従来の解法に比べて、選点解法はきわめて簡単で、かつ精度のよい解を与えるが、そのためには各領域の鉛直境界の長さを $(\Delta s/2)$ の整数倍に取らねばならない。種々の応用上、鉛直境界の長さは水深の $1/20$ から $1/40$ 程度の間隔で設定できれば大概は十分と考えられるから、(A)(B)の計算点配置を使い分けることによって、計算点の間隔 Δs は水深の $1/10$ から $1/20$ 程度でよいことになる((6)参照)。

(4) 条件式が過剰な場合の最小二乗解

未定係数の数に対して計算点の数が多いと、条件式が過剰となり、この場合は最小二乗解を求めることになる。喫水 $d/h=0.5$ の矩形浮体の場合について、計算点を $M=10, N_2=10$ の計20点(ACDとA'C'D'境界面の条件式の総数 $2\{M+2N_2\}=60$)に取り、ポテンシャルの打ち切り項数の組 $(n^*+1, p^*+1)=(19, 9), (18, 8), (10, 5)$ (いずれも $2\{(p^*+1)+(n^*+1)\}<60$) について最小二乗解を求めてみた。その結果、いずれの場合も、連続条件の二乗誤差はほぼ0となって $(\partial\phi_i/\partial x$ と $\partial\phi_s/\partial x$ ($i=1, 4$) がほぼ一致する)、一見、連続性が非常に精度よく満足されているように見える。しかし、標準値に取った場合の解と比べると、最小二乗解は、境界面における流速の大きさが境界面に沿って大きく変動するという合理的でない結果を与え、未定係数の収束も悪くなる。したがって、条件式の数 $2(M+2N_2)$ と未定係数の数 $2\{(p^*+1)+(n^*+1)\}$ は一致するように取らねば、精度のよい解は得られない。このことは計算点配置(A)(B)の違いや条件式の過剰の程度によらない。

(5) 打ち切り項数の配分による解の変動

条件式の数と未定係数の数を同じに規定した場合で

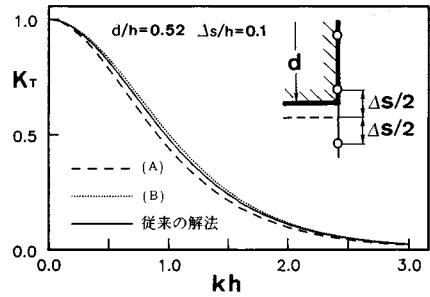


図-6 (A)で $d\equiv(2M-1)(\Delta s/2)$ 、(B)で $d\equiv 2M(\Delta s/2)$ に取った場合の解(通過率)の精度

も、各領域のポテンシャルの打ち切り項数は、一意には定まらない。すなわち、矩形浮体を例にとると、外域(1)(4)のポテンシャルの打ち切り項数 n^* と内域(3)のポテンシャルの打ち切り項数 p^* の値は $p^*+n^*+2=M+2N_2$ の条件のもとで任意の値を取り得る。そこで、喫水を $d/h=0.5$ 、計算点の個数を $M=5, N_2=5$ に取り、未定係数の総数を $2\{p^*+n^*+2\}=30$ ($=2\{M+2N_2\}$) に固定し、打ち切り項数 p^* と n^* の配分を変化させた計算を行って解の変動の程度を調べた。この結果、(A)(B)の計算点配置にかかわらず、未定係数の項数を対応する領域の境界面上の計算点の個数と同じに取った場合(標準値)が、最も精度のよい解が得られることがわかった。しかも、この p^* と n^* の配分による解の変動の程度は、(A)と(B)の計算点配置によって大きく異なり、(A)では標準値からの1,2項程度の変化に対して反射率・通過率、波力はほとんど変わらないのに対し、(B)の場合には標準値以外の p^* と n^* の配分を用いると妥当な解は得られない。この例を、(B)の計算点配置について図-7に示した。ただし、打ち切り項数を標準値に取りさえすれば(A)(B)の計算点配置にかかわらず精度の良い解が得られるのは(2)に示したとおりである。

(6) 打ち切り項数(計算点個数)による解の変動
ポテンシャルの打ち切り項数を変えた場合の解の変化

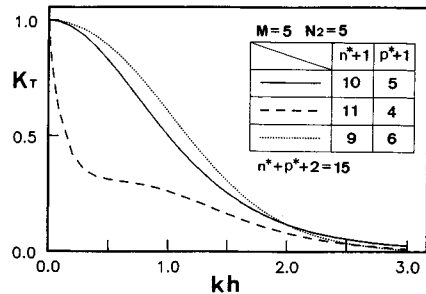
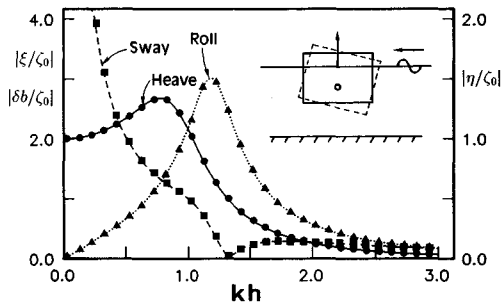


図-7 打ち切り項数の配分による解の変動 [矩形浮体 $d/h=0.5, 2b/h=1.0$, 計算点配置(B)]



図—12 自由浮体の運動変位, (—, ---, ……) 選点解法, (●, ■, ▲) 従来の解法 ($2b/h=2.0, d/h=0.5, z_g/d=-0.75, \gamma=1.0$)

$\phi(x, z, t)$ は浮体の底面では式 (28), 側面では式 (29) の運動学的条件を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} \partial\phi_s/\partial z &= -i\sigma[\eta - \delta x] \exp(i\sigma t) \quad (z = -d) \cdots (28) \\ \partial\phi_i/\partial x &= -i\sigma[\xi + \delta(z - z_g)] \exp(i\sigma t) \\ &\quad (x = \pm b) \quad (i=1, 4) \cdots (29) \end{aligned}$$

η, ξ, δ は, それぞれ Heave, Sway, Roll の運動変位の複素振幅で, z_g は浮体重心の z 座標である。

浮体底面における運動学的条件と水底面の境界条件を満足するラプラスの方程式の一般解は, 浮体底面の境界条件をフーリエ級数に展開する方法によって井島 (1972)³⁾ が与えている。伊藤・千葉 (1973)⁴⁾ も有限フーリエ変換を用いて一般解を求めており, この方が一般解の表示は簡潔である。ただし, 図—1 のように浮体が完全に没水して動揺する場合には, 浮体上の領域 (2) に対して有限フーリエ変換はうまく適用できない。いずれにせよ選点解法では直交関数に関する積分を必要としないので, 一般解の表示の違いはそれほど計算の煩雑さには影響しない。井島の示した一般解を用いて選点解法と従来の解法とにより解析した結果を, Heave, Sway, Roll の運動変位について図—12 に示した。各運動変位について両者は全く一致する結果を与える。なお, γ は重心回りの慣性モーメントに関する定数³⁾である。

4. あとがき

波動境界値問題におけるポテンシャル接続法の選点解法を提示し, その妥当性と有用性を示した。選点解法の特長を要約すると次のようになる。

選点解法によれば, 直交関数に関する積分などの数式の展開は必要なく, 理論式と計算プログラムは“簡潔かつ明瞭”である。したがって, 比較的複雑な形状の (領域分割数が多い) 固定構造物や動揺浮体等の波動境界値問題の解析にポテンシャル接続法を用いることがきわめて容易となる。しかも, 従来の解法よりも精度の良い解が得られる (線形問題に関してはこの精度の差は実用上問題にならない程度である)。

さらに, 有限振幅波に関する波動境界値問題の解析に, まえがきに述べたような利点を有するポテンシャル接続法を適用することが, 選点解法を用いることによって実質的に可能となる。

本文では二次元問題に限ったが, 三次元問題への適用も可能で, これについては別の機会に報告したい。

最後に, 本研究における数値計算と図面の作製は九州大学水工土木学科大学院学生の辻哲君によるところが大きい。また九州大学名誉教授 井島武士先生よりは貴重な助言を頂いた。ここに記して感謝申し上げる。

参考文献

- 井島武士・尾崎重雄・松尾隆彦・小林 彰：直立消波岸壁に関する研究 (1) —水平板岸壁について—, 第16回海岸工学講演会論文集, pp.289~296, 1969.
- 井島武士：最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用, 1971年度水工学に関する夏期研究会講義集, 1971.
- 井島武士・田淵幹修・湯村やす：有限水深の波による矩形断面物体の運動と波の変形, 土木学会論文報告集, 第202号, pp.33~48, 1972.
- 伊藤喜行・千葉 繁：浮防波堤の水理に関する近似理論と応用, 港湾技術研究所報告, 第11巻, 第2号, pp.137~166, 1972.
- 樺木 亨・久保雅義・京谷光高：荷役限界からみた港内静穏度に関する研究 (第2報), 第25回海岸工学講演会論文集, pp.593~597, 1978.
- 谷本勝利・吉本靖俊：直立消波ケーソンの反射率に関する理論, 港湾技術研究所報告, 第21巻, 第3号, pp.43~77, 1982.
- 萩原運弘：積分方程式法による両面透過壁型防波堤の消波特性の解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp.405~409, 1983.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A.: Propagation of obliquely incident water waves over a trench, J. Fluid Mech., Vol. 133, pp.47~63, 1983.
- Massel, S.R.: Harmonic generation by waves propagating over a submerged step, Coastal Engineering, Vol. 7, pp.357~380, 1983.
- 清川哲志・大山 巧：空気密閉式カーテンウォール堤による波の反射・透過特性と内部空気圧の調節による波浪制御, 土木学会論文報告集, 第375号, pp.271~280, 1986.
- Mcluver, P.: Wave forces on adjacent floating bridges, Applied Ocean Research, Vol.8, No.2, pp.67~75, 1986.
- Wu, J. and Liu, P.L.-F.: Interaction of obliquely incident water waves with two vertical obstacles, Applied Ocean Research, Vol.10, No.2, pp.66~72, 1988.
- Garrett, C.J.R.: Bottomless harbours, J. Fluid Mech., Vol. 43, part 3, pp.433~449, 1970.
- 井島武士・田淵幹修・湯村やす：有限水深の波による円柱状浮体の運動, 土木学会論文報告集, 第206号, pp.71~84, 1972.
- 井島武士・湯村やす・周 宗仁・吉田明德：水底および

- 水面付近の任意断面の固定柱状体による波の散乱と波力，土木学会論文報告集，第 228 号，pp.29~43，1974.
- 16) 新井信一・高木又男・中村彰一・松永康二：箱型船の流体力について，日本造船学会論文集，第 137 号，pp.113~121，1975.
- 17) 合田良実・鈴木康正・笹田 正：波浪中の直立円柱浮体に働く流体力とその運動，港湾技術研究所報告，第 15 巻，第 2 号，pp.167~210，1976.
- 18) 清川哲志・田中正博・小林 浩：全没水大型円筒構造物の地震時付加質量，第 29 回海岸工学講演会論文集，pp.457~461，1982.
- 19) 吉田明德・村上啓介：半没水および没水柱体列による波の散乱の解析法，第 34 回海岸工学講演会論文集，pp.586~590，1987.
- 20) 吉田明德・鶴本良博・小島治幸：波浪境界値問題におけるポテンシャル接続法の選点解法について，九州大学工学集報，第 62 巻，第 3 号，pp.169~177，1989.
- 21) 吉田明德・小島治幸・鶴本良博：ポテンシャル接続法の選点解法，海岸工学論文集，第 36 巻，pp.474~478，1989.
- 22) 江沢 洋：フーリエ解析，pp.67~69，1987.
(1989.11.9・受付)
-