

円筒容器内の非線形スロッシング現象の解析

NONLINEAR SLOSHING MOTION IN A CIRCULAR BASIN

大山 巧*

By Takumi OHYAMA

A numerical model has been developed to investigate the nonlinear sloshing motion in a circular basin in response to forced horizontal oscillation. The method is based on the complete boundary value problem of velocity potential and employs no additional assumptions other than those inherent in the potential theory. Experimental observations are in good agreement with the numerical results indicating that the fluid response, both in terms of wave height and hydrodynamic force, is significantly affected by the higher harmonics when the excitation is in the neighborhood of the first characteristic frequency. Moreover, the numerical analyses revealed that the observed secondary peak in the hydrodynamic force response near the predominant peak is caused by the internal resonance with the pumping mode.

Keywords: nonlinear sloshing motion, free surface flow, boundary element method, internal resonance

1. はじめに

近年、主にタワー系構造物や超高層構造物の風による振動を抑えることを目的に、TLD (Tuned Liquid Damper) とよばれるスロッシングを利用した制振装置が提案されている¹⁾。TLDでは、通常の液体貯蔵タンクなどに比べて、液深と容器の径の比がかなり小さい装置が用いられている^{2),3)}。この場合、容器内で発生する波の波高水深比が、相対的に大きくなるため、流体運動は波の非線形性の影響を強く受けることになる。

水深が比較的浅い場合の矩形容器内の非線形スロッシング問題(二次元)に対しては、清水・葉山⁴⁾、Lepelletier and Raichlen⁵⁾が浅水波理論に基づく手法により、また大山・藤井⁶⁾が境界積分方程式を用いた手法により理論的に検討している。そしてこれらの検討結果から、水面変動量および流体力がピークになる振動数は、加振外力が大きくなるにつれて高振動数側にずれることなどの非線形効果が明らかにされた。

振動方向が一方のみ卓越する構造物では、TLD容器として矩形容器がよく用いられるが¹⁾、円形や正方形に近い断面の構造物では、円筒容器が用いられている²⁾。

そこで本研究では、大山・藤井の手法を三次元に拡張し、円筒容器内のスロッシング問題に適用する。本解析法では、速度ポテンシャルに関する自由表面の非線形境界条件を近似することなく積分方程式に代入し、さらに自由表面を変動境界として取り扱っているため、非線形性の強い波動場にも適用できる点に特長がある。そして、この点において、同様の問題に境界要素法を適用した新開ら⁷⁾の手法との差異がある。すなわち、新開らは自由表面を固定境界として取り扱い、摂動展開を用いて第2次までの近似解を求めているが、この方法は液面振幅が大きく非線形性が強い場合には適用できない。

円筒容器内のスロッシングの問題は、石油貯蔵タンクなどの耐震設計上、重要な課題とされてきた。液体変位が容器の径や液深に比べて十分小さい場合には、線形理論に基づいて解析的に取り扱うことができ、その結果は広く実用に供されている。しかし、耐震設計上問題になるのは、一般に共振域付近の液面変位が大きい場合であり、この意味から波の非線形効果に着目した理論的研究がなされている。

木村・大橋^{8),9)}は、変分原理により導かれた基礎式から非線形定常解を求め、実験結果との比較を行っている。ただし、木村らの解析では空間的に一次の振動モードしか考慮されていないため、他のモードとの非線形相互作用

* 正会員 清水建設(株)技術研究所 環境技術研究部
(〒135 江東区越中島3-4-17)

用の効果が取り込まれていないことが、大森ら¹⁰⁾により指摘されている。そして大森らは、空間モードとしては合計6個のモードを、時間的には基本振動数成分と倍振動数成分を採用したモード解析を行うことにより、主共振領域近傍で他のモードとの内部共鳴が起きる場合があることを示した。これらの解析はいずれも定常振動を対象としているが、モード解析を用いて非定常解析を行っているものとして、坂田ら¹¹⁾の研究がある。ここでTLDでは、流体力の応答波形に含まれる高次振動数成分が、構造物の高次モードの振動を励起する可能性がある。すなわち、TLDの性能を評価する場合には、流体力と液面変動量の最大値のみが問題になる通常の耐振安全性の検討とは異なり、波の非線形性に対応した高次振動数成分の応答をよりの確に予測する必要がある。この意味から考えて、自由表面の非線形境界条件を直接取り込んだ本解析法は、空間的な振動モードと時間的な振動数成分を有限個として近似した解析法に比べて、TLDの流体力を評価するためのより有効な手法であると思われる。

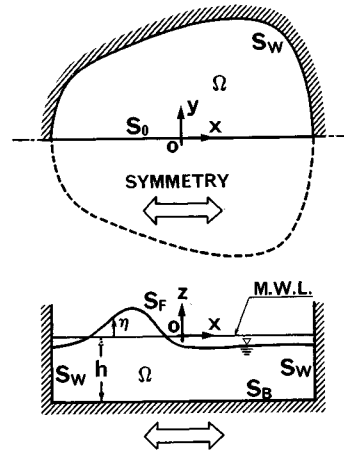
一方、石橋・葉山¹²⁾は、清水・葉山の手法を三次元に拡張し、浅水領域での円筒容器内のスロッシングを解析している。ただしこの手法では、浅水波の仮定を用いている関係で、非線形分散効果を直接的には考慮しにくい。このため石橋・葉山は、基礎式の離散化によって生じる数値的な固有振動数を線形理論から得られる固有振動数と整合させる方法を用いている。ただし、関連するすべてのモード（非線形相互作用を起こす可能性があるモード）に対応した固有振動数を整合させるためには、離散化方法が複雑になるものと思われる。

本論文では、まず非線形ポテンシャル理論に基づく数値解析法について述べる。そして、液深と内径の比がかなり小さい場合の円筒容器内のスロッシングに関して、模型振動実験と数値解析を行い、それらの比較から解析法の妥当性を調べるとともに、波の非線形性が円筒容器内のスロッシング現象に及ぼす影響について検討する。

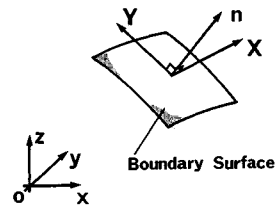
2. 境界積分方程式を用いた三次元非線形解析手法

(1) 基礎方程式と境界条件

図一1に示すように、三次元容器内に液深 h の流体があり、容器が x 方向に強制的に振動するときの流体運動を考える。ただし、流体を非圧縮、非粘性、非回転と仮定し、流体運動が速度ポテンシャル ϕ により記述できるものとする。本解析法は、任意形状の容器に対して適用できるが、実際のTLDでは通常円筒容器のような単純な形状が用いられる。そこで、本論文では計算時間、計算機容量の節約のため、容器が $y=0$ の平面 S_0 に関



図一1 全体座標系と記号の定義



図二 部分座標系

して面対称形の場合を対象に定式化する。このとき、流体が面外運動を起こさない限り、 S_0 を通過する波エネルギーはなく、 S_0 は不透過な直立壁面と等価になる。したがって、 ϕ に関する基礎方程式と境界条件は、以下のように表わすことができる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \dots\dots\dots (1)$$

$$\phi_n = 0 \quad (\text{on } S_w, S_0, S_b) \dots\dots\dots (2)$$

$$\phi_n = n_z \eta \quad (\text{on } S_f) \dots\dots\dots (3)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} \{ (\phi_n)^2 + (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \} + \gamma \phi + a_x x + g \eta = 0 \quad (\text{on } S_f) \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 ∇ ：ラプラシアン ($= \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$)、 η ：静液面からの液面変動量（鉛直上向きを正）、 n ：境界面での外向き法線方向、 n_z ：境界面上に立てた法線ベクトル n の z 成分、 (X, Y) ：図一2に示されるような液面上の点に接し法線ベクトル n に直交する面で定義される局所直交座標系（方向は任意）、 a_x ：容器の入力加速度、 γ ：自由表面の振動の減衰係数である。また、 ϕ, η に関する n, t 等の添字は、それぞれによる偏微分を表わしている。式(1)は流体の連続方程式、式(2)は容器側壁、中央断面、底面での不透過条件、式(3)、(4)は自由表面での運動学的条件および力学的条件である。式(3)、(4)に示される境界条件が、波の有限振幅性に対応して非線形境界条件になる。

式(4)の $\gamma\phi$ は、流体運動に伴う底面摩擦などの減衰効果を表わした項であり、本解析では水粒子速度に比例する等価線形減衰項として評価する。大山・藤井⁶⁾は、矩形容器内の二次元スロッシング現象を解析する際、 γ を次のように決めている。

$$\gamma = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\nu\omega}{2}} \left(1 + \frac{2h}{b} + C\right) \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 b ：加振方向と直交する方向の容器の幅、 ν ：流体の動粘性係数、 ω ：容器の加振角振動数である。 C は、Miles^{13),14)}により提案された surface contamination の影響を表わす項であり、理論的には0から2の間で変化するが、fully contaminated surface に対応した $C=1$ で一定としても問題ないことが、Lepelletier and Raichlen⁹⁾、孫ら¹⁵⁾、大山・藤井⁹⁾の二次元解析結果により示されている。ここで、式(5)右辺第1項の $(1/h)\sqrt{\nu\omega/2}$ は、底面せん断力係数を表わしている。これは、流体の正弦波振動状態における底面での層流境界層の解をもとに、1周期間のせん断エネルギーが等しくなるように等価線形化して求められたものである。孫ら¹⁵⁾は、これと同様な等価線形化を行っているが、その過程において Jonsson¹⁶⁾により示された抵抗係数を用いているため、式(5)の $(1/\sqrt{2})$ が $(8/3\pi)$ となる結果を得ている。ただし、 $(1/\sqrt{2})$ と $(8/3\pi)$ を用いた解析結果にはほとんど差がないことが、藤野ら¹⁷⁾により示されている。

また、式(5)の右辺第2項は容器側壁の影響を近似的に評価したものである。ただし、容器の幅あるいは内径が液深に比べて十分に大きい場合には、側壁での摩擦の影響は無視できるものと考えられる。本論文における円筒容器を対象にした計算では、液深と内径の比が0.05であることから、この項を無視することにし、 γ を以下のように与える。

$$\gamma = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\nu\omega}{2}} (1+C), \quad C=1.0 \dots\dots\dots (6)$$

(2) 境界積分方程式とその離散化

本解析では、大山¹⁸⁾が海洋における非線形回折波力を求めるために開発した、グリーン公式と重みつき残差法を用いた手法を応用する。まず、式(1)に示すように ϕ が調和関数であることから、流体領域 Ω に三次元グリーン公式を適用すると、 Ω を取り囲む境界面 S 上の点 $P(x_p, y_p, z_p)$ におけるポテンシャル $\phi(P)$ は、次のように表わせる。

$$\phi(P) = -\frac{1}{\alpha(P)} \int_S \{ \phi(Q)G_n(P, Q) - \phi_n(Q)G(P, Q) \} ds_q \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $Q(x_q, y_q, z_q)$ ： S 上の点、 $G(P, Q)$ ：グリーン関数、 $\alpha(P)$ ：点 P における境界面の形状から決まる係数

である。本解析法では、グリーン関数 G を以下のように与えている。

$$G(P, Q) = \frac{1}{r_0} + \sum_{n=1}^3 \frac{1}{r_n} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \sqrt{(C_x)^2 + (C_y)^2 + (C_z)^2} \\ r_1 &= \sqrt{(C_x)^2 + (C_y)^2 + (D_z)^2} \\ r_2 &= \sqrt{(C_x)^2 + (D_y)^2 + (C_z)^2} \\ r_3 &= \sqrt{(C_x)^2 + (D_y)^2 + (D_z)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} C_x &= x_p - x_q, & C_y &= y_p - y_q, & C_z &= z_p - z_q \\ D_y &= y_p + y_q, & D_z &= z_p + z_q + 2h \end{aligned} \right\}$$

式(8)で定義される関数 G は、 S_0 および S_B で $G_n=0$ を満足するため、結果として積分方程式中にはこれらの面での積分は現われない。また係数 $\alpha(P)$ は、式(7)を一様ポテンシャル場($\phi = \text{const. (in } \Omega), \phi_n = 0 \text{ (on } S)$)に適用することにより、 G_n を用いて以下のように計算することができる。

$$\alpha(P) = -\int_S G_n ds = -\int_{S_F \cup S_W} G_n ds \dots\dots\dots (10)$$

式(7)に各境界面での運動学的境界条件式(2)、(3)を代入すると、以下に示す積分方程式を得る。

$$\alpha(P)\phi(P) + \int_{S_F \cup S_W} \phi G_n ds - \int_{S_F} G_n z_p ds = 0 \dots\dots\dots (11)$$

一方、 S_F での力学的条件式(4)については、重みつき残差法を適用することにより、積分方程式に変換する。式(3)を式(4)に代入し、両辺に任意の重み関数 θ をかけて S_F 上で積分することにより、次式を得る。

$$\int_{S_F} \theta \left[\phi_t + \frac{1}{2} \{ n_z^2 (\eta_t)^2 + (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 + \gamma\phi + a_x x + g\eta \} \right] ds = 0 \dots\dots\dots (12)$$

式(11)、(12)に示された境界積分方程式は、三角形要素を用いて空間的に離散化することができる。ただしその手順は、大山¹⁸⁾が示した方法とほぼ同様なので、ここでは概略を述べることにする。まず、 S_F, S_W の要素分割数をそれぞれ M_F, M_W とし、要素番号を S_F, S_W の順につける。そして、 J 番目要素内の諸量を以下のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= N_j^T \phi_j, & \phi_j^T &= (\phi_{j1} \ \phi_{j2} \ \phi_{j3}) \\ \phi_t &= N_j^T (\phi_t)_j, & (\phi_t)_j^T &= ((\phi_t)_{j1} \ (\phi_t)_{j2} \ (\phi_t)_{j3}) \\ \eta &= N_j^T \eta_j, & \eta_j^T &= (\eta_{j1} \ \eta_{j2} \ \eta_{j3}) \\ \eta_t &= N_j^T (\eta_t)_j, & (\eta_t)_j^T &= ((\eta_t)_{j1} \ (\eta_t)_{j2} \ (\eta_t)_{j3}) \\ \theta &= N_j^T \theta_j, & \theta_j^T &= (\theta_{j1} \ \theta_{j2} \ \theta_{j3}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $j1, j2, j3$ ： J 番目三角形要素を構成する節点の番号、 N_j ：内挿関数ベクトルである。式(11)の積分を各要素での積分の和で置き換えたあと式(13)を代入し、さらに点 P を i 番目の節点に一致させることにより、以下の離散化方程式を得る。

$$\alpha_i \phi_i + \sum_{j=1}^M A_{ij}^T \phi_j - \sum_{j=1}^{M_W} (n_z)_i B_{ij}^T (\eta_t)_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (14)$$

$$A_{ij} = \int_{S_j} N_j G_n ds, \quad B_{ij} = \int_{S_j} N_j G ds \quad \dots\dots\dots(15)$$

ただし、 M ：全要素数（ $=M_f + M_w$ ）， N ：全節点数である。なお肩文字の T は、行列またはベクトルの転置を表わしている。本解析法では計算時間の節約のため、特異点（ $i=j1$ or $j2$ or $j3$ ）以外では一定要素を用いている。すなわち、 A_{ij} 、 B_{ij} を以下のように近似する。

$$A_{ij} \approx \frac{S_j}{3} (G_n)_{ij} E, \quad B_{ij} \approx \frac{S_j}{3} G_j E \quad (i \neq j1, j2, j3) \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$E^T = (1 \ 1 \ 1) \quad \dots\dots\dots(17)$$

ただし、 G_j 、 $(G_n)_j$ ：式（9）の点 Q の座標として、 J 番目要素の重心の座標を用いたときの G および G_n の値、 S_j ： J 番目要素の面積である。なお、特異点では N_j として線形内挿関数を用いて式（15）の積分を行うことにより、 A_{ij} 、 B_{ij} を求めている。

式（12）についても三角形要素を用いた離散化を行い、重み関数の節点値 θ_j （ $j=1, 2, \dots, N_f, N_f: S_f$ 上の節点数）について整理すると、式（12）は結果的に次のように表わすことができる。

$$\sum_{j=1}^{N_f} \gamma_j \theta_j = 0 \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここで、 θ_j にかかる係数 γ_j には ϕ_j 、 $(\phi_s)_j$ 、 η_j 、 $(\eta_s)_j$ （ $j=1, 2, \dots, N_f$ ）が未知数として含まれている。なお、 γ_j の算定方法については、大山¹⁸⁾の文献を参照されたい。式（18）が任意の重み関数について成り立つためには、次式を満足する必要がある。

$$\gamma_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_f) \quad \dots\dots\dots(19)$$

(3) 逐次計算法

式（14）、（19）を各時間ステップで連立して解くことにより、液面変動量および境界面上でのポテンシャルが逐次求められる。ここで、これらの式は ϕ および η に関する非線形連立方程式になっているが、微小な時間増分 Δt に対応した η 、 ϕ の増分 $\Delta\eta$ 、 $\Delta\phi$ が十分小さいものと考え、これらの2乗の項を無視することにより、線形連立方程式に変換できる。まず、時間ステップ n における η 、 ϕ 、 η_s 、 ϕ_s をそれぞれ1ステップ前の値のまわりでテイラー展開し、これらを $\Delta\eta$ 、 $\Delta\phi$ を用いて表わすと以下ようになる¹⁹⁾。

$$\eta_j^{(n)} = \eta_j^{(n-1)} + \Delta\eta_j^{(n)} \quad (j=1, 2, \dots, N_f) \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\phi_j^{(n)} = \phi_j^{(n-1)} + \Delta\phi_j^{(n)} \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$(\eta_s)_j^{(n)} = \frac{2}{\Delta t} \Delta\eta_j^{(n)} - (\eta_s)_j^{(n-1)} \quad (j=1, 2, \dots, N_f) \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$(\phi_s)_j^{(n)} = \frac{2}{\Delta t} \Delta\phi_j^{(n)} - (\phi_s)_j^{(n-1)} - \frac{2}{\Delta t} \Delta\eta_j^{(n)} (\phi_s)_j^{(n-1)} - (\eta_s)_j^{(n-1)} (\Delta\phi_s)_j^{(n)} \quad (j=1, 2, \dots, N_f) \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$(\Delta\phi_s)_j^{(n)} = (\phi_s)_j^{(n)} - (\phi_s)_j^{(n-1)} \quad \dots\dots\dots(24)$$

式（20）～（23）を式（14）、（19）に代入し、 $(\Delta\phi)^2$ 、 $(\Delta\eta)^2$

に対応した項を無視すると、 $\Delta\phi_j^{(n)}$ （ $j=1, 2, \dots, N$ ）， $\Delta\eta_j^{(n)}$ （ $j=1, 2, \dots, N_f$ ）に関する $(N+N_f)$ 本の線形連立方程式が得られる。ここで、 $\Delta\eta_j^{(n)}$ が未知数となっている関係で、式（14）の A_{ij} 、 B_{ij} および式（19）の γ_j に含まれる S_j 、 $(n_s)_j$ などの境界形状に依存する係数も未知量になっている。そこで本解析法では、1ステップ前の水面形状を初期条件として、水面形状が収束するまで同一ステップで計算を繰り返している¹⁹⁾。さらに、式（24）の $(\phi_s)_j^{(n)}$ についても、 n ステップの計算をする際に未知量になるが、これも同一ステップでの繰り返し計算において求めることにする¹⁸⁾。 ϕ_s は、自由表面の運動学的条件式（3）を用いて以下のように算定できる。

$$\phi_s = \begin{cases} \eta_s + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y & (S_f \text{ と } S_w \text{ の交線以外}) \\ \eta_s + \phi_c \eta_c & (S_f \text{ と } S_w \text{ の交線上}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(25)$$

ただし、 c は S_f と S_w の交線に沿った方向を表わしており、 ϕ_x 、 ϕ_c 、 η_x 、 η_c などは、隣合う節点における値から差分により求める。なお、 S_f と S_w の交線上の節点では、 ϕ_s の算定方法が交線上以外の節点と異なるだけで、2重節点の使用などの特別な取り扱いは行っていない。

容器側壁 S_w 上の点における圧力 p は、圧力方程式(力学的条件)により、以下のように求められる。

$$p = -\rho \left[\phi_t + \frac{1}{2} \{(\phi_z)^2 + (\phi_s)^2\} + \gamma\phi + a_x x + g z \right] \quad \dots\dots\dots(26)$$

ただし、 ρ ：流体密度、 s ： S_w 上の点での容器水平断面における接線方向である。容器に作用する x 方向の流体力 F_x は、 p を用いて次のように表わされる。

$$F_x = \int_{S_w} p n_x ds \approx \sum_{j=M_f+1}^M (p_o)_j (n_x)_j S_j \quad \dots\dots\dots(27)$$

ここで、 $(n_x)_j$ ： J 番目要素における単位法線ベクトル n の x 成分 n_x の値、 $(p_o)_j$ ： J 番目要素の重心における圧力で、以下のように求められる。

$$(p_o)_j = (1/3) E^T \{(\phi_s)_j + \gamma\phi_j + a_x x_j + g z_j\} + (1/2) \{(\phi_z)^2 + (\phi_s)^2\}_j \quad \dots\dots\dots(28)$$

$$x_j^T = (x_{j1} \ x_{j2} \ x_{j3}), \quad z_j^T = (z_{j1} \ z_{j2} \ z_{j3}) \quad \dots\dots\dots(29)$$

ただし、 $\{(\phi_z)^2 + (\phi_s)^2\}_j$ は、 ϕ が要素内で平面的（線形的）に分布するという仮定のもとに、 $j1, j2, j3$ での ϕ の節点値から求められる。

3. 流体力の応答に及ぼす波の非線形効果

(1) 模型振動実験

本解析法による結果を検証し、さらに円筒容器内のスロッシングに及ぼす波の非線形効果を調べるために、模型振動実験を行った。実験に用いた容器は、図—3に示すような内径 $2R$ が 50.0 cm、高さが 25.0 cm、厚さ 0.5 cm のアクリル製の円筒容器であり、これを振動台

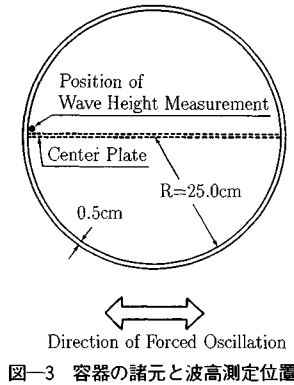


図-3 容器の諸元と波高測定位置

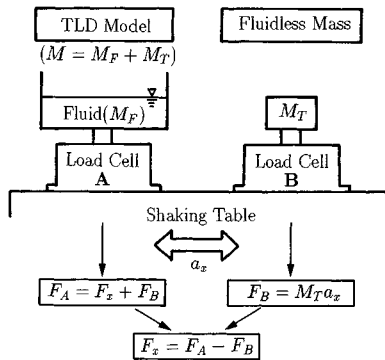
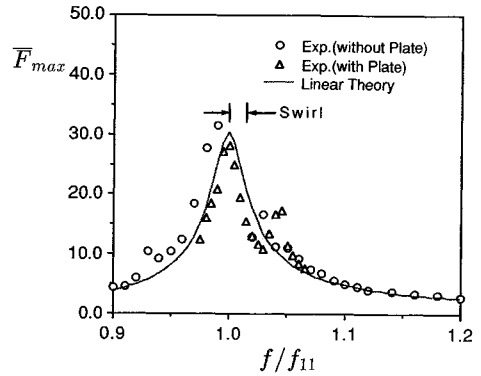


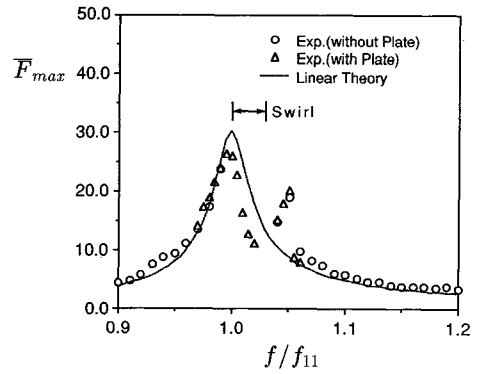
図-4 流体力の測定方法

の上に乗せて静止状態から定常振動状態に至るまで、正弦波状に一方に加振した。ここで本論文では、減衰効果によって振動の初期のうなりが消滅した後の状態を「定常振動状態」と定義している。なお容器内の液体には水を用い、水深 h は 2.5 cm で一定 ($h/R=0.1$) とした。実験では、容器の変位 D 、流体力 F_x および図-3 に示される点での水面変動量 η を測定した。ただし、水面変動量の測定には容量式波高計を用い、また流体力は図-4 に示すように 2 つのロードセルを用いて測定した。図-4 において、ロードセル B では容器や波高計など流体以外の質量 M_T と同じ重さのおもりにかかる慣性力 $F_B (= a_x M_T)$ を測定しており、これをロードセル A で測定した全体のベースシアホース F_A から引くことにより、流体力 F_x を検出した。また、実験における加振振動数 f は、周方向 1 次半径方向 1 次のモードに対する固有振動数 $f_{11} (= 0.577 \text{ Hz})$ を基準に、 $0.9 < f/f_{11} < 1.2$ の範囲で設定し、加振振幅 A を 0.5, 0.75, 1.0 mm の 3 通り ($A/R=0.002, 0.003, 0.004$) に変化させた。

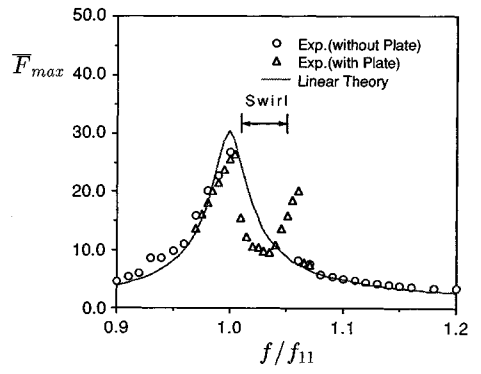
ここで、円筒のような鉛直軸対称形容器が水平一方向に加振される際、加振方向とは無関係に容器内の流体がスワーリングとよばれる回転運動を起こすことがあることは、一般によく知られており、本実験でもスワーリン



(a) $A/R=0.002$



(b) $A/R=0.003$



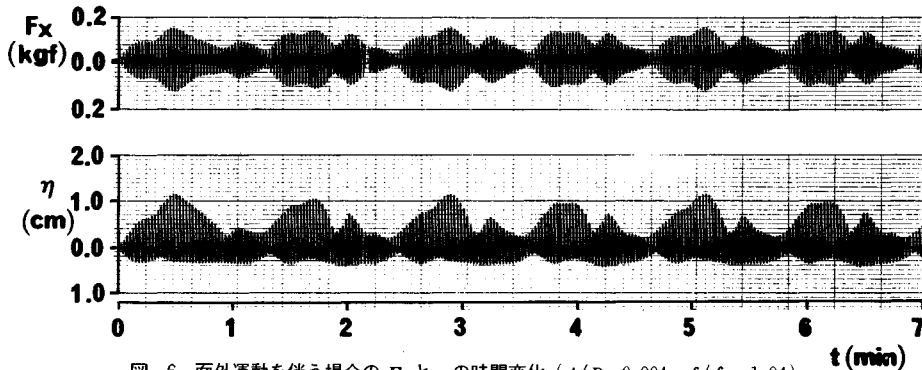
(c) $A/R=0.004$

図-5 無次元流体力の応答特性

グを起こす振動数領域の存在が認められた。このような振動数領域近傍については、図-3 における円筒中央面をアクリル板で仕切ることにより、スワーリングの発生（面外運動の発生）を強制的に抑えた場合についても実験を行った。

(2) 流体力特性の実験結果

実験結果と数値解析結果を比較する前に、実験で得られた流体力特性をもとに波の非線形効果について考察する。図-5(a), (b), (c) は、定常振動状態での無次元流体力 $\bar{F} (= F_x / \rho g R h A)$ の最大値 \bar{F}_{max} の応答特性を示したもので、○が仕切り板なしの場合、△が仕切り板



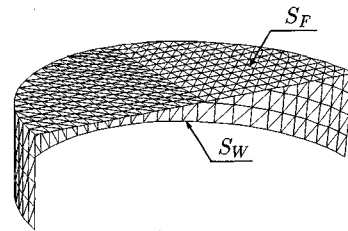
図—6 面外運動を伴う場合の F_x と η の時間変化 ($A/R=0.004$, $f/f_{11}=1.04$)

つきの場合の結果を表わしている。また、図中には線形理論に基づく定常解²⁰⁾についても実線で示してある。ただし、線形解における減衰定数 γ は、式 (6) から得られる値を用いている。

大森ら²¹⁾は、波の非線形性により面内運動成分から面外運動成分が分岐的に発生する振動数が存在し、それがスワーリング現象に対応することを示すとともに、そのような振動数は f_{11} よりも高い振動数領域のみに存在することを理論的に明らかにしている。本実験結果においても、スワーリングが発生するいわゆる面内運動が不安定になる現象は、いずれの場合も f_{11} よりも高い振動数領域で発生し、加振振幅を大きくするにつれてその領域が広がっているのがわかる。ただし、大森らの定式化では時間的に加振振動数成分とその2倍の振動数成分のみを考慮しているが、実際の応答波形には加振振動数よりも低振動数成分が含まれる場合がある。図—6 にその一例として、 $A/R=0.004$, $f/f_{11}=1.04$ における仕切り板なしの場合の流体力と水面変動量の時間変化を示しておく。この場合の流体の回転運動は一方方向ではなく、ある方向に回転した後、一度回転が止まり、次に逆方向に回転するといった運動を繰り返す。このような運動がさらに不規則的になる場合は、一種のカオス現象としてとらえることができ、その方面からの理論的、実験的検討が Miles²²⁾, Funakoshi and Inoue²³⁾ によりなされている。

以上のように、スワーリングは波の非線形性に関連した興味深い現象であるが、本論文における以下の考察では、面内運動に及ぼす非線形効果のみに着目することとし、スワーリングについての検討は今後の研究課題としたい。したがって、スワーリング発生領域の実験結果としては、仕切り板つきの実験結果を参照する。

木村ら⁹⁾は、液深と容器内径の比が0.3よりも大きい範囲で、円筒容器に作用する圧力の周波数応答を調べている。その結果、応答は、加振振幅が大きくなるほど圧力が最大になる振動数が低振動数側にずれるソフトスプ



図—7 解析で用いた要素

リング形になるが、液深と容器内径の比が小さくなるとその性質は弱くなることが示されている。そして図—5 からわかるように、液深と内径の比が木村らの検討範囲よりもさらに小さい本実験条件では、 \bar{F}_{\max} が最大になる振動数は、 A/R が0.002から0.004の範囲で $f/f_{11} \approx 1.0$ であり、加振振幅による変化はみられない。一方、 $A/R=0.002$ の場合に $f/f_{11}=1.04$ で現われた小さなピークは、 A/R が大きくなるにつれてより顕著になり、またピークとなる振動数が高振動数側にずれるハードスプリング形の応答を示している。このことから、 $1.04 < f/f_{11} < 1.06$ において流体力がピークとなる現象は、 $f/f_{11} \approx 1.0$ における共振現象（主共振現象）とは基本的に異なり、波の非線形性により励起される別の共振現象であることが推察できる。

(3) 解析結果と実験結果の比較

$A/R=0.003$ の場合について、前に述べた数値解析手法を用いて非線形応答解析を行った。解析における S_F , S_W の要素分割数 M_F , M_W はそれぞれ532, 288とし、また時間増分 Δt は $\Delta t \sqrt{g/h} = 0.475$ と設定した。図—7に、要素分割図を示す。ただし図中、鉛直方向のスケールは水平方向の5倍としている。解析では、実験と同様に静水状態を初期状態とし、流体運動が定常振動状態になるまで正弦波加振外力 ($a_x = A \sin 2\pi ft$) を与えた。

図—8, 9は、定常振動状態での無次元最大流体力 \bar{F}_{\max} および図—3に示した点における無次元水面変動量 $\bar{\eta}$ ($=\eta/A$) の最大値 $\bar{\eta}_{\max}$, 最小値 $\bar{\eta}_{\min}$ の応答特性に関して、本解析結果と実験結果との比較を示したもの

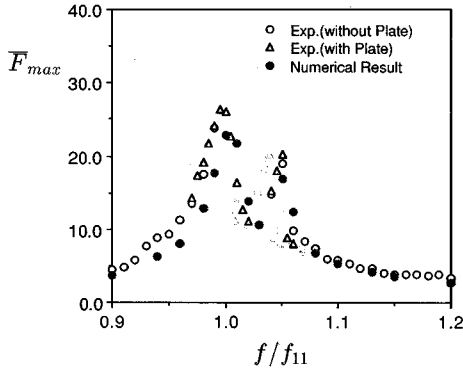


図-8 \bar{F}_{max} の応答特性の比較

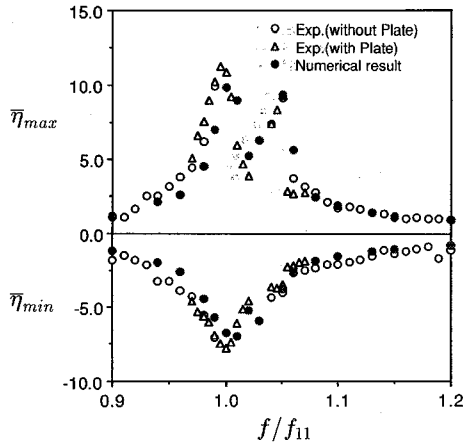
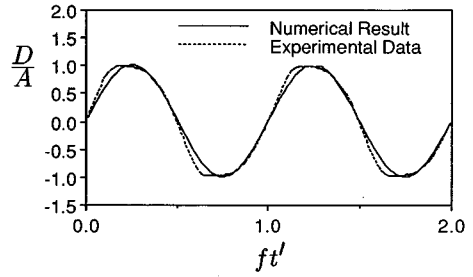


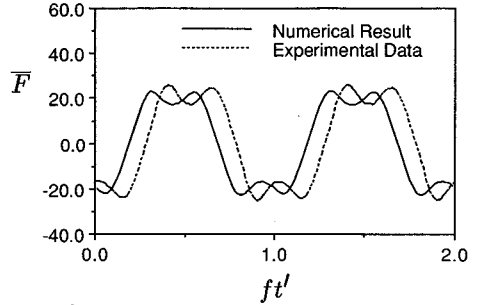
図-9 $\bar{\eta}_{max}$, $\bar{\eta}_{min}$ の応答特性の比較

である。本解析結果においても、 $f/f_{11}=1.0$ 付近での主共振現象のほかに、線形理論では説明し得なかった $f/f_{11}=1.05$ での \bar{F}_{max} , $\bar{\eta}_{max}$ のピークが明確に現われている。そして、解析結果と実験結果は良好な一致を示している。

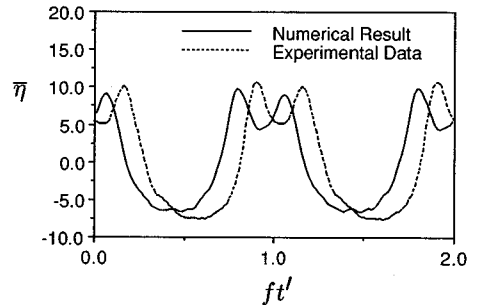
図-10, 11 は、 $f/f_{11}=1.0, 1.05$ における定常振動状態での容器の変位 D , \bar{F} , $\bar{\eta}$ の時刻歴波形に関して、解析結果と実験結果（仕切り板あり）の比較を示したものである。なお、入力条件となる D の波形を解析と実験で一致させることにより、 \bar{F} , $\bar{\eta}$ の波形の位相を整合させている。また図中の t' は、図-10(a), 図-11(a) に示すように、容器の変位が 0 になるときを $t'=0$ とした時間である。図-5 に示したように、 $f/f_{11}=1.0$ での \bar{F}_{max} については、実験結果と線形理論解とで大きな差はないが、図-10 の \bar{F} , $\bar{\eta}$ の実験波形は線形理論から得られる正弦波とはかなり異なっており、1 周期間に 2 つのピークが現われている。また $f/f_{11}=1.05$ では、波の峰の高さが谷の深さに比べて大きくなり、 \bar{F} , $\bar{\eta}$ の波形は尖鋭的になっているのがわかる。このように、応答波形には波の非線形性に関連した高次振動数成分（加振



(a) 容器変位



(b) 流体力

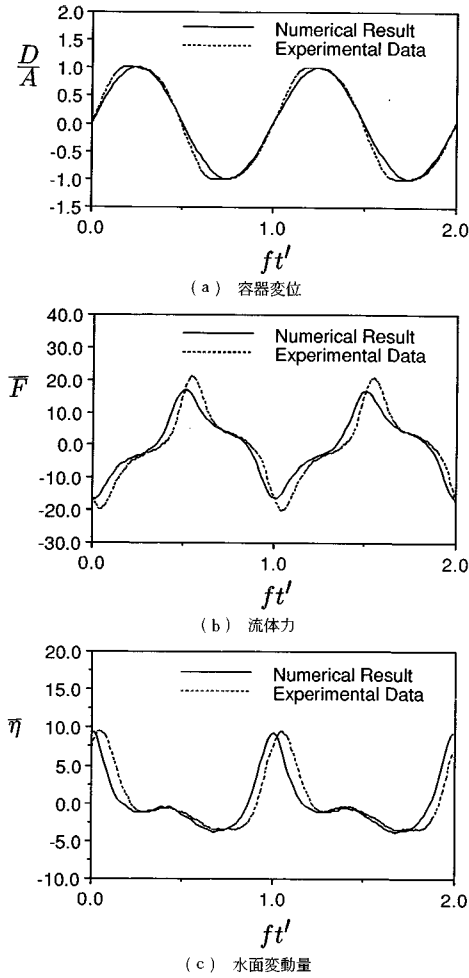


(c) 水面変動量

図-10 \bar{F} , $\bar{\eta}$ の時刻歴波形の比較 ($f/f_{11}=1.0$)

振動数の整数倍の振動数成分)の影響が、顕著に現われてくる。スロッシングを利用した制振装置では、この高次振動数成分が構造物の高次の振動モードを励起する可能性があることから、波の非線形効果を考慮することが装置の性能を評価するうえで重要になるものと考えられる。

本解析結果の波形は実験結果とほぼ一致しているが、図-10 に示す $f/f_{11}=1.0$ のケースでは、波の位相が実験結果と 0.2π ほどずれている。加振振動数が異なる他のケースについても調べてみたが、実験波形と解析波形の位相ずれは $f/f_{11}=1.0$ のケースが最も大きかった。この位相ずれの原因としては、実験の入力波形が解析で用いた正弦波とは若干異なり高周波数成分を含んでいること、解析における減衰項の評価が適切でなかったことが考えられる。そこでまず、実験の入力波形をそのまま用いて解析を行ったが、解析結果は図-10 に示す結果とほとんど変わらなかった。したがって、実験と解析の



図一十一 \bar{F} , $\bar{\eta}$ の時刻歴波形の比較 ($f/f_{11}=1.05$)

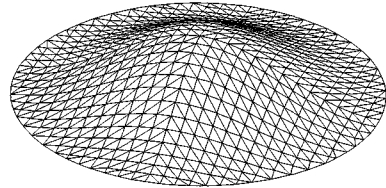
入力波形の差の影響は小さいものと思われる。また、減衰係数の影響を調べるために、 γ の値を式 (6) から求められる値よりも 50% 大きくして解析を行ってみた。その結果、応答波形の位相は実験結果に近づくが、同時に振幅も減少する傾向がみられた。このことから、単に γ の評価に問題があるのではなく、底面摩擦などの局所的な効果を場全体の平均的な減衰として評価していることなどが、結果に影響している可能性があると考えられる。

(4) 内部共鳴の影響

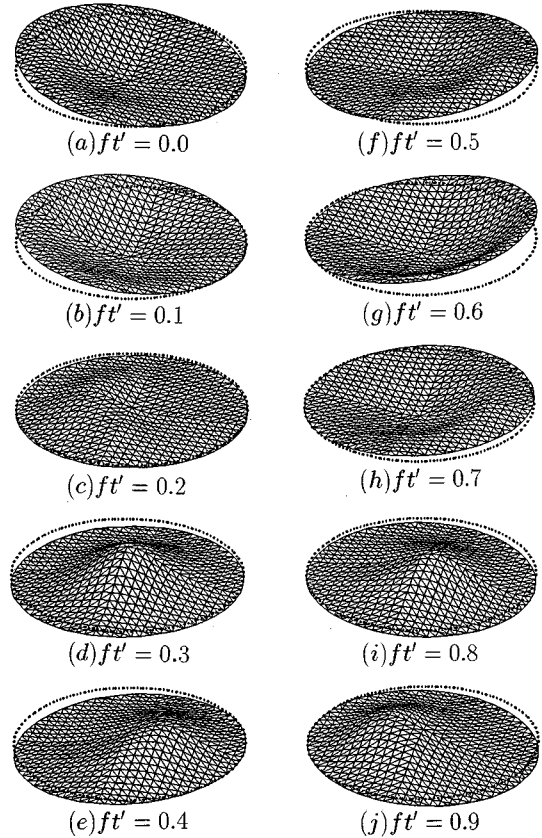
主共振振動数付近では、波の非線形性により引き起こされた高次振動数成分が別の振動モードを励起し、さらに励起されたモードが主共振モードの振動に影響することは、内部共鳴²⁴⁾または高調波共振¹⁰⁾として知られている。この現象は、非線形系特有の現象であるが、励起される可能性があるモードは線形理論により予測できる。ここで、周方向 i 次半径方向 j 次のモード (以下、 $(i,$

表一 f_{ij} と $2f_{11}$ との比

$i \setminus j$	1	2	3
0	1.022	1.780	2.415
1		1.393	2.100
2	0.821	1.711	2.378
3	1.115	1.994	2.622



図一十二 (0,1) モードの空間形状

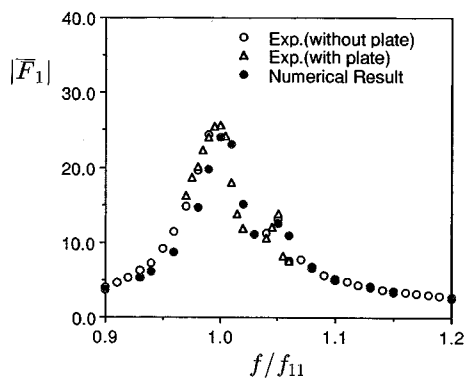


図一十三 1 周期間の水面形状の変化 ($A/R=0.003, f/f_{11}=1.05$)

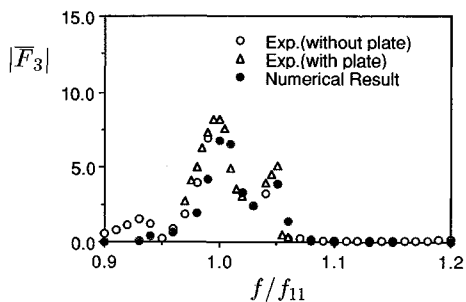
j) モードと表わす。) に対応した固有振動数 f_{ij} は、線形の自由表面条件のもとで、次のように算定できる。

$$f_{ij} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\nu_{ij} \frac{g}{R} \tanh\left(\nu_{ij} \frac{h}{R}\right)} \dots\dots\dots (30)$$

ただし、 ν_{ij} は $J'_i(\nu) = 0$ の第 j 番目の正根 ($J'_i(\nu)$: 第 1 種 i 次ベッセル関数) である。表一に、本実験条件における固有振動数 f_{ij} ($i=0\sim 3, j=1\sim 3$) と $2f_{11}$ との比を示す。この表からわかるように、 $f_{01}/2f_{11}$ が最も 1



(a) 加振振動数成分



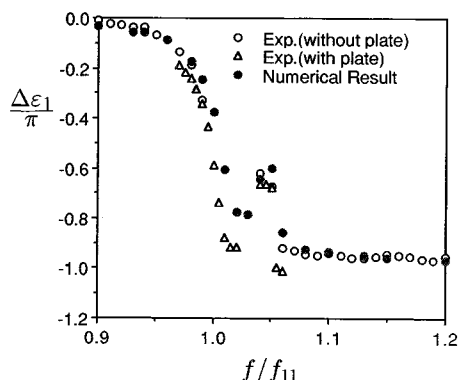
(b) 3倍振動数成分

図一14 \bar{F} における各振動数成分の振幅の応答特性 ($A/R=0.003$)

に近い値になっており、(0, 1) モードの振動が主共振振動数付近で励起される可能性があることを示唆している。図一12に(0, 1)モードの空間形状を示しておく。なお、同様な方法で3倍振動数成分についても調べたが、この振動数成分については主共振振動数近傍で別のモードが励起される可能性はなかった。

図一13は、周波数応答において主共振とは別のピークが現われる $f/f_{11}=1.05$ での水面形状の1周期間の変化(解析結果)を示したものである。なお、図中の点線は静水面の位置を表わしており、鉛直方向のスケールは水平方向の10倍としている。この図からわかるように、 $x=0$ が軸となる(1, 1)モードの振動のほかに、図一12に示した(0, 1)モードの振動が励起されている(図一13(d), (i))。さらにこのモードの振動は、線形理論による検討から推察したように、加振振動数の2倍の振動数に対応しているのがわかる。なお、内部共鳴が最も顕著に現われるときの振動数が、表一1に示した $f_{01}/2 f_{11}=1.022$ と若干ずれているのは、固有振動数 f_{10} が線形の自由表面条件から導かれたもので、波の非線形効果 が考慮されていないことによるものと思われる。

ここで、時空間的な対称性から考えて、流体力の波形には加振振動数の奇数倍の成分のみが含まれることになる。そして、 $2f$ の振動数をもつ(0, 1)モードの振動は、



図一15 \bar{F}_1 の位相差の応答特性 ($A/R=0.003$)

図一12のモード形状からもわかるように、直接的には水平方向の流体力に影響しない。図一14は、 $A/R=0.003$ の流体力波形における加振振動数成分 F_1 と3倍振動数成分 F_3 の振幅の応答特性を示したものである。いずれの成分の応答においても $f/f_{11}=1.05$ で明確なピークが現われている。これらの結果から、波の非線形性により励起された(0, 1)モードの振動が、内部共鳴により別の振動数成分に影響を及ぼしていることが理解できる。また図一15は、 F_1 の入力加速度に対する位相差 $\Delta\epsilon_1$ の特性を示したものである。 $\Delta\epsilon_1$ についても、 $f/f_{11}=1.05$ 付近で、鋭いピークが現われているのがわかる。特にTLDの場合には、流体力の振幅だけでなく入力加速度に対する位相差が、構造物の振動に大きく影響することから、このような内部共鳴の影響は無視できないものと考えられる。そして、本解析結果はこのような非線形現象を良く再現している。なお、内部共鳴により励起されるモードとその影響が現われる振動数は、各モードの固有振動数と主共振振動数との関係で決まるものである。すなわち、 $h/R=0.1$ とした本検討条件では、(0, 1)モードが f_{11} よりもわずかに高い振動数で励起されるが、 h/R が変れば各固有振動数の比が変化するため、励起されるモードと振動数も異なってくると考えられる。

4. おわりに

本研究で得られた主な結論を以下に示す。

(1) 三次元非線形スロッシング問題に対する数値解析法を示した。本解析法は、グリーンの公式と重みつき残差式から導かれる境界積分方程式を各時間ステップで解くことにより、流体運動を追跡するものである。

(2) $h/R=0.1$ の円筒容器を用いて振動実験を行った。本実験条件 ($h/R=0.1, A/R=0.002\sim 0.004$) では、主共振振動数 ($f=f_{11}$) における流体力の最大値は線形理論解とほとんど差がなかったが、その時刻歴波形

には波の非線形性により引き起こされた高次振動数成分の影響が顕著に現われた。

(3) 容器に作用する流体力および水面変動量の最大値と応答波形に関して、本解析結果は実験結果と良い一致を示した。ただし主共振振動数での解析結果では、応答波の位相が実験結果と 0.2π ほどずれることが確認された。この位相ずれについては、解析における減衰項の評価方法が影響を及ぼしている可能性があり、位相をさらに適合させるためには今後の検討を要する。

(4) 実験では、主共振振動数よりもわずかに高い振動数で、主共振とは別のピークが現われ、加振振幅を大きくするに従ってピーク値が大きくなることが認められた。数値解析の結果、この振動数では $2f$ の振動数をもつ周方向 0 次半径方向 1 次のモードの振動が波の非線形性により励起され、さらにこのモードの振動が内部共鳴により別の振動数成分の応答に影響を及ぼしていることが明らかになった。

なお、模型振動実験を行う際には、技術研究所環境技術研究部流体グループの大築民夫研究員の協力を得た。ここに、記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 藤野陽三：流体の動揺を利用したダンパー，日本機械学会第 674 回講習会「流体関連振動の最近の話題」，pp. 113~127, 1988.
- 2) Fujii, K., Tamura, Y., Sato, T. and Wakahara, T. : Wind-Induced Vibration of Tower and Practical Applications of Tuned Sloshing Damper, Jour. Wind Eng., No. 37, pp. 537~546, 1988.
- 3) 吉田英敏・立見栄司・野路利幸・小坂英之：スロッシングを利用した制振装置の研究（その 6）高層タワーへの適用とその振動実験（1），日本建築学会大会学術講演概要集（関東），B 構造 I，pp. 567~568, 1988.
- 4) 清水 隆・葉山眞治：浅水波理論を応用したスロッシングの非線形応答（第 1 報，基礎式の導出と長方形容器における非線形応答），日本機械学会論文集（C 編），53 巻 486 号，pp. 357~363, 1982.
- 5) Lepelletier, G. and Raichlen, F. : Nonlinear Oscillations in Rectangular Tanks, Jour. Eng. Mech., ASCE, Vol. 114, No. 1, pp. 1~23, 1988.
- 6) 大山 巧・藤井邦雄：2 次元非線形スロッシング問題の境界要素解析，構造工学論文集，Vol. 35A, pp. 575~584, 1989.
- 7) 新開明二・野津康夫・山口賢二・福田淳一：3 次元スロッシング問題の数値解析，西部造船会会報，第 64 号，pp. 103~117, 1982.
- 8) 木村憲明・大橋弘隆：軸対称容器におけるスロッシングの非線形応答（第 1 報，支配方程式の導出と解の性質），日本機械学会論文集（第 1 部），44 巻 385 号，pp. 3024~3033, 1978.
- 9) 木村憲明・大橋弘隆：軸対称容器におけるスロッシングの非線形応答（第 2 報，数値計算および実験との比較），日本機械学会論文集（第 1 部），44 巻 386 号，pp. 3446~3454, 1978.
- 10) 大森博司・松井徹哉・日比野浩：液体貯槽における有限振幅液面動揺に関する研究（その 1）基礎方程式の誘導とその円筒形貯槽への適用，日本建築学会構造系論文報告集，第 375 号，pp. 65~72, 1987.
- 11) 坂田 勝・木村康治・内海雅彦：円筒タンク内の非線形液面動揺の非定常不規則応答解析，日本機械学会論文集（C 編），49 巻 442 号，pp. 963~970, 1983.
- 12) 石橋博人・葉山眞治：浅水波理論を応用したスロッシングの非線形応答（第 2 報，長方形容器と円筒容器における非線形応答），日本機械学会論文集（C 編），55 巻 511 号，pp. 663~670, 1989.
- 13) Miles, J. W. : Surface Wave Damping in Closed Basins, Proc. Roy. Soc. London, A297, pp. 459~475, 1967.
- 14) Miles, J. W. : Resonantly Forced Nonlinear Gravity Waves in a Shallow Rectangular Tank, Wave Motion, Elsevier Science Publishers, B. V. (North Holland), Vol. 7, pp. 291~297, 1985.
- 15) 孫 利民・藤野陽三・ベニート M. パチェコ・磯部雅彦：同調液体ダンパーに関する非線形波動シミュレーションとその応用—長方形容器の場合—，第 10 回風工学シンポジウム論文集，pp. 361~366, 1988.
- 16) Jonsson, I. G. : Wave Boundary Layer and Friction Factors, Proc. 10th CCE, ASCE, pp. 127~148, 1966.
- 17) 藤野陽三・ベニート M. パチェコ・孫 利民・ピヤワットチャイセリ・磯部雅彦：同調液体ダンパーに関する非線形波動シミュレーションとその実験的検証—長方形容器の場合—，構造工学論文集，Vol. 35A, pp. 561~574, 1989.
- 18) 大山 巧：境界要素法による非線形回折波力の一解析法，土木学会論文集，第 411 号/II-12, pp. 197~206, 1989.
- 19) 大山 巧：数値波動水槽によるクノイド波の変形の解析，第 33 回海岸工学講演会論文集，pp. 99~103, 1986.
- 20) 曾我部 潔・柴田 碧：円筒液体貯槽の液面動揺の応答第 1 報—基礎式と正弦波解—，生産研究 26 巻，3 号，pp. 119~122, 1974.
- 21) 大森博司・松井徹哉・加藤啓一・藤原 健：液体貯槽における有限振幅液面動揺に関する研究（その 3）スワリングについての検討，日本建築学会構造系論文報告集，第 385 号，pp. 69~77, 1988.
- 22) Miles, J. W. : Resonantly Forced Surface Waves in a Circular Cylinder, Jour. Fluid Mech., Vol. 149, pp. 15~31, 1984.
- 23) Funakoshi, M. and Inoue, S. : Surface Waves due to Resonant Horizontal Oscillation, Jour. Fluid Mech., Vol. 192, pp. 219~247, 1988.
- 24) 船越満明・井上 進：水面波のカオス，日本物理学会誌，Vol. 44, No. 5, pp. 323~329, 1989.

(1989.11.1・受付)