【土木学会論文集 第417号／II-13 1990年5月】

相関離散分布流量を受ける貯水池の利水機能評価の研究

STOCHASTIC EVALUATION OF THE WATER UTILITY FUNCTION OF THE RESERVOIR WITH DISCRETE CORRELATED INFLOWS

鈴木正人*・長尾正志**
By Masato SUZUKI and Masashi NAGAO

This study aims at the stochastic evaluation of the water utility function of reservoir with discrete Markovian correlated inflows. Matrix algebraic analysis has been carried out with two-step transition model proposed by the authors. Some statistics have been clarified for the quantitative and sequential characters of the reservoir, for example, the passage time to the first emptiness. Taking account of various characteristics of emptiness, the analytical representation of criteria for effectiveness of water utility in the reservoir is developed, and stochastic consideration are presented. Numerical calculation is carried out for the comparison with the operation of non-prediction, ideal stochastic DP, and linear regression model with inflow information for the case of correlated Binomial inputs. It is found that linear regression model is useful according to the probabilistic judgement of vulnerability of water -shortage.

Keywords : stochastic reservoir theory, drought, two-step transition model, emptiness probability, first passage time

1．本研究の概要

渇水期の流入量を離散モデル化して，貯水池の利水機能評価を行う際に，半旬などのある程度短い単位期間を対象とするときには，入力としての渇水時流況の代表的な特性の1つである強い自己相関性を無視することはできない．そこで本研究は，著者らがさきに提案した2段階推移モデルによる相関離散分布流量を受ける貯水池理論[1)]を用いて，貯水池の利水機能評価を行ったものである．まず時間的評価として，任意の貯水量状態から始まって貯水池が空になるまでの時間（以後空水到達時間）に関する問題の2段階推移モデルによる解法を示した．また，若干のケースについて数値実験解および，従来の解との比較を行った．次に，利水機能の評価の一貫として，2段階推移モデルによる期待放流量系列の導出方法を示し，これら空水到達時間，期待放流量系列，および，さきに提示した貯水量定常分布[1)]を用いて，利水安全度指標との関連を考えたうえで，利水機能評価関数を設定した．最後に，無節水操作，確率DP操作，線形予測操作などの操作方法の利水機能評価を行うことによって，最適操作への具体的方策の示唆を行っている．

2．2段階推移モデルの概要[1)]

2段階推移モデルは，ある単位期間を対象として，まず貯留のみを考え，ついで期末に放流のみを行うように考えたモデルである．貯留可能性，放流可能性はそれぞれ期首，期末という離散時点で判別される．また，すべての流入量，貯水量は時間的，量的に離散化された状態で取り扱い，流量時系列の自己相関性は一次マルコフとした流量の条件付き離散分布で勘案される．なお貯水池の貯水池容量，貯水量や放流量は，流量の離散化単位の整数倍で表現する．

まず貯留による推移，すなわち貯留推移は次式で表わせる．

$$\{H\}^{s}{}_{2}=\{H\}^{s}{}_{1}\cdot \boldsymbol{G} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで，$\boldsymbol{G}$ は条件付き流入量分布で構成される貯留推移確率行列である．また $\{H\}$ は貯水量分布ベクトルで，

$\{H\}=\{H_0, H_1, \cdots, H_i, \cdots, H_K\}$

$H_i=(h_{0i}, h_{1i}, \cdots, h_{ji}, \cdots, h_{ni})$

---

* 学生会員 工修 名古屋工業大学工学研究科博士後期課程学生（〒466 名古屋市昭和区御器所町）
** 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科（同上）

の成分から構成される．K は貯水池容量，n は流入量の上限である．ここで，要素 h_{ji} は流入量 j を得て貯水状態 i になる確率を，添字 s は期間 s を，添字1，2はそれぞれ期間の期首，期末を意味する．

次に，放流による推移，すなわち放流推移は次式のように表わされる．

$$\{H\}^{s+1}{}_1=\{H\}^s{}_2\cdot\boldsymbol{R} \quad\cdots\cdots(2)$$

ここで，$\boldsymbol{R}$ は1または0の要素から構成される放流推移(確率)行列である．いま，$R(ij)$ を貯水状態が i，流入量が j の場合の実放流量（目標放流量とは異なる場合もある）とすると，h^s_{ji2} に対応する行のうち，

$$i-R(ij)=L$$

に対応する列，つまり h^{s+1}_{jL1} に対する列に要素1が，他の要素に0が入る．放流操作（放流量）がどんなに複雑になっても，貯水状態 i，流入量 j が決まれば $R(ij)$ は一意に決まり，その推移先 $L(=i-R(ij))$ も一意に決まるから，放流推移行列 $\boldsymbol{R}$ は推移確率行列の性質をもつ．

式(1)，(2)を合成すると，

$$\{H\}^{s+1}{}_1=\{H\}^s{}_1\cdot\boldsymbol{P},\qquad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{R} \quad\cdots\cdots(3)$$

となり，貯水量の推移が独立な場合と同様に表記される．

3．空水到達時間の行列表示

貯水池の利水機能を議論するうえで，興味の1つに時間的な側面がある．その代表に，任意の初期貯水量を出発点とした貯水量系列が時間の経過とともにどのような推移を示すかという問題がある．特に問題となるのは，初めて空水に至る到達時間の平均値や分散，またその確率分布そのものを明らかにすることである．なお，ここでは空水状態に到達する時間として議論をしていくが，「空水」の表現を，「利水安全度からみた危険な貯水量」とおきなおした理論展開も類似の形式で取り扱うことができる．

さて，流入量に相関がない独立モデルに対する時間的問題は，Moran[2]，長尾ら[3]により研究されているが，その理論は貯水量の推移確率行列の導出が基礎となっていた．2段階推移モデルによれば，式(3)に示したように流入量に相関がある場合にも，貯水量の推移確率が独立な場合と同じ形式に表現された．したがって，従属の場合の時間的問題も若干の修正によって，同じ表現が可能になる．

(1) 吸収マルコフ連鎖による空水到達期待時間に関する統計量の導出

貯水量状態の時間的経過を，酔歩粒子の運動に模擬して考えてみよう[3]．一般に貯水量推移は，各状態が過渡的な過程であると考えられる．つまり，貯水量が空になったとしても空であり続けるわけではなく，正の貯水量に回復する可能性は残されている．しかし，初めて空になる時間を問題にするときには，空水状態を吸収壁（空になったら空であり続けるような境界条件）におきなおして考えることができる．なぜなら，利水安全度を問題にするような渇水期では，空に至るまでの期間の特性が問題であり，空になってから後の貯水量推移は，いまの場合関心外だからである．

貯水量の推移過程を吸収壁の酔歩問題におきなおすには，貯水量が空水（つまり貯水状態が0）の状態を吸収状態にとればよい．2段階推移モデルでは，貯水状態が流入量の条件付きで表現されているから，流入量の条件にかかわらず貯水状態0をすべて吸収状態に採る．具体的には，貯水量の推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ において，$h_{j0}(j=0,1,\cdots,n)$（流入量 j を受けて貯水量が0となる確率）に対応する要素部分を単位行列で置換した推移行列 $\boldsymbol{P}'$ を用いる．すなわち，$\boldsymbol{P}'$ は以下のように表現できる．

$$\boldsymbol{P}'=\begin{array}{c} \\ h_{j0} \\ h_{ji} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} h_{j0} & h_{ji} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{T} & \boldsymbol{\Gamma} \end{array}\right] \end{array}$$

$$(i=1,2,\cdots,K)\quad(j=0,1,\cdots,n) \quad\cdots\cdots(4)$$

ここで $\boldsymbol{I}$ は単位行列で吸収状態に対応する．つまり空水状態 h_{j0} は空水状態 h_{j0} にしか推移できない．また，$\boldsymbol{T}$ は非空水状態 $h_{ji}(j=0,\cdots,n\,;\,i=1,2,\cdots,K)$ から空水状態 h_{j0} へ推移する領域要素を表わし，$\boldsymbol{\Gamma}$ は非空水状態 h_{ji} から非空水状態 h_{ji} へと推移する過渡状態の領域要素を意味する．なお $\boldsymbol{0}$ は零行列で，現実にはこのような領域状態は存在しない．

詳しい説明は文献[4]に譲るとして，平均吸収時間，吸収確率を求める手順を示す．まず基本行列 $\boldsymbol{N}$ を，$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Gamma}$ の逆行列として

$$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Gamma})^{-1} \quad\cdots\cdots(5)$$

とする．なお，$\boldsymbol{N}$ の各要素は，初期状態 $h_{ji}(j=0,1,\cdots,n\,;\,i=1,2,\cdots,K)$ から出発して，空水状態 h_{j0} へ達するまでに，各状態をおのおの何回経たかを示す期待値である．

ついで，空水到達時間 t_e（平均吸収時間）の期待値ベクトル τ は，すべての要素が1の列ベクトル ξ を用いて，次式で求められる．

$$\tau=\boldsymbol{N}\cdot\xi \quad\cdots\cdots(6)$$

同様に空水到達時間に関するさらに高次の積率や統計量も計算できる．たとえば分散ベクトルは，

$$\mathrm{Var}(t_e)=(2\boldsymbol{N}-\boldsymbol{I})\tau-\tau_{sq} \quad\cdots\cdots(7)$$

で計算できる．ただし，τ_{sq} は τ の各要素の平方を要素とする行列である．

以上の手順は，流入量系列が独立な場合となんら相違ない．ところで2段階推移法では，貯水量推移が貯水量

と流入量の同時生起の確率で表わされていた．他方独立流量の場合は，初期貯水量からの推移がただ1つの流量状態の確率要素に対応していた．換言すれば，従属流量の場合には貯水量状態が同時分布としての流入量の状態によって細分化されていると考えればよい．したがって，従属流量の場合の基本的な考え方は，ある初期流量（あるいは初期貯水量）状態を前提とした推移を対象とする場合には，推移確率の内部での初期条件を満たす部分領域を使う．また，流量（あるいは貯水量）条件を特定しない推移を対象とする場合には，先に出た結果に初期流量（あるいは貯水量）に関する周辺分布の重みを勘案した加重平均を用いればよい．

（2） 行列演算による空水到達時間の分布の導出

貯水池の時間的問題に対する平均や分散といった統計量を求める手段のほかに，空水到達時間の確率分布を順次計算していく方法がある．ここでは非空水の任意の初期貯水量分布 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}\equiv\{U_1, U_2, \cdots, U_i, \cdots, U_K\}$, $U_i\equiv(u_{0i}, u_{1i}, \cdots, u_{ni})$ から始まり空になるまでの推移を1ステップずつ求めていく．ただし，u_{0i}, …は当該期間に流入量0を受けて期末貯水量が i である確率，…といったものを表わす．

さて，非空水状態から空水状態への推移は，推移行列 $\boldsymbol{P}'$ の部分行列 $\boldsymbol{T}$ で表現されていた．したがって，1ステップで空水状態0に至る確率ベクトル $\boldsymbol{f}_0^1$ は，次式のように書ける．

$$\boldsymbol{f}_0^1=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{T} \quad \cdots\cdots (8)$$

ここで，

$$\boldsymbol{f}_0^1\equiv\{f_{00}^1, f_{01}^1, \cdots, f_{0j}^1, \cdots, f_{0n}^1\}$$

である．たとえば，$\boldsymbol{f}_0^1$ の要素 f_{0j}^1 は，初期貯水量分布 $\boldsymbol{U}$ から1ステップで空水になる確率と流入量 j との同時確率を意味する．

次に，2ステップで初めて空水になる確率ベクトル $\boldsymbol{f}_0^2$ は，1ステップ目で非空水状態へ推移し，2ステップ目で空水状態へ推移する．そこで，非空水状態から非空水状態へ推移する行列 $\boldsymbol{\Gamma}$ を用いて，この確率は，

$$\boldsymbol{f}_0^2=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{T} \quad \cdots\cdots (9)$$

で表わされる．一般的に N ステップで初めて空になる確率ベクトル $\boldsymbol{f}_0^N$ は，$N-1$ ステップで非空水状態から非空水状態へと推移し，N ステップ目で空水状態へと推移するから，$N\geqq 2$ として

$$\boldsymbol{f}_0^N=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\Gamma}^{N-1}\cdot\boldsymbol{T} \quad \cdots\cdots (10)$$

と表わされる．なお，1ステップの推移である式(8)の場合でも $\boldsymbol{\Gamma}^0\equiv\boldsymbol{I}$（単位行列）と定義しておけば，式(10)で $N\geqq 1$ のすべての場合に適用することができる．

（3） 数値実験による空水到達期待時間の導出

これらの計算による妥当性を検証するために，数値実験により相関離散分布流量を受ける貯水池の空水到達期待時間を求める．それには，貯水池条件（有効貯水池容量 K，目標放流量 M），流入量条件（相関二項分布の母数である上限 r，形状母数 a，相関係数 ρ）を設定し，模擬発生させた流入量系列を用いる．採用した相関二項分布の周辺分布 $P(i)$，条件付き分布 P_{ij} を次式に示す．

$$P(i)\equiv\Pr[X_t=i]=\binom{r}{i}(1-a)^{r-i}a^i$$

$$\begin{aligned}P_{ij}&\equiv\Pr[X_{t+1}=j|X_t=i]\\&=\sum_{s=0}^{\min(i,j)}\binom{i}{s}\binom{-i+r}{j-s}\{a(1-\rho)+\rho)\}^s\\&\quad\times\{1-a(1-\rho)\}^{s+r-i-j}a^{i-s}\\&\quad\times(1-a)^{i-s}(1-\rho)^{i+j-2s}\\&\quad(i, j=0, 1, 2, \cdots, r) \quad \cdots\cdots (11)\end{aligned}$$

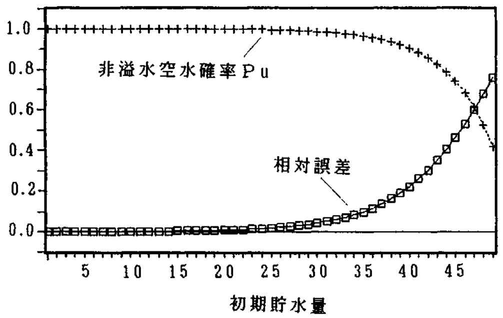
さて任意の初期貯水量 u から貯水量推移を追跡計算し，空水に至るまでのステップ数を求めると，これが先述の空水到達時間に相当するはずである．なお，Phatarfod の酔歩理論による結果と比較するために，その前提条件である溢水せずに空になる確率[5](P_u)も併せて求めている．

各貯水池条件に対し，流入量系列を1 000個×100ケース発生させ，各ケースの平均値を空水到達期待時間とした．

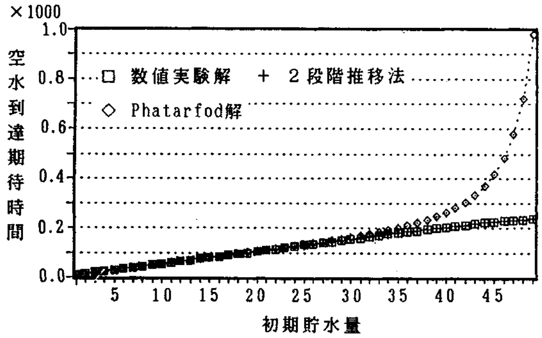
（4） 適用計算および従来の方法との比較

Phatarfod らは酔歩理論により，3状態二項分布流量を受ける貯水池の任意の初期貯水量から始まり溢水することなく空になる時間を，母関数の形で求めている[5]．また，長尾はそれをもとに平均値を，さらに，より一般な二項分布入力に対する近似解およびその近似度を検討している[6]．ここでは，2段階推移法による解と，Phatarfod の解と，さらに数値実験解とを比較する．

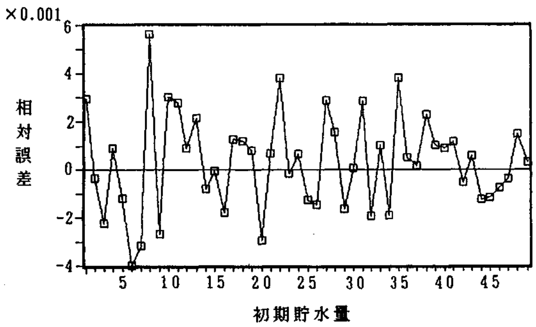
$K=50$, $M=1$, $r=2$, $a=0.4$, $\rho=0.6$ の条件で，2段階推移法と Phatarfod の方法によりそれぞれ任意の貯水状態から空水到達期待時間を求め，Phatarfod の解を真値とした場合の相対誤差と，溢水せずに空になる確率 P_u との関係を表わしたのが図―1である．2段階推移法と Phatarfod の方法との相違は，Phatarfod の方法が，溢水せずに空水に至るという前提での解であるのに対し，2段階推移法は，何ら制約はない．溢水せずに空になる確率が P_u であることを考えると，$P_u\fallingdotseq 1$ であれば，Phatarfod の解も，2段階推移法による解も，溢水しないという条件で一致し，両者の解が合致することが推測される．図をみると，$P_u\fallingdotseq 1$ の場合ほとんど相対誤差は0になっていることからこの解釈は正しいといえよう．2段階推移法と Phatarfod の方法は，たとえば，初期貯水量が十分に少ないといった，溢水しない条件のもとでは，どちらの方法を用いてもよいと思われる．しかし，P_u が小さくなるに従って誤差は大きくなり，最大0.8にもな



図―1　2段階推移法と Phatarfod 解による空水到達期待時間の相対誤差と非溢水空水確率 P_u
($K=50$, $M=1$, $r=2$, $a=0.4$, Corr.$=0.6$)



図―3　各計算手法による空水到達期待時間
($K=50$, $M=1$, $r=2$, $a=0.4$, Corr.$=0.6$)



図―2　数値実験解と2段階推移法による相対誤差
($K=50$, $M=1$, $r=2$, $a=0.4$, Corr.$=0.6$)

るので溢水の可能性のある場合には Phatarfod の解は使用すべきでない．

同じ条件で，今度は2段階推移法による解を真値として，数値実験解との相対誤差を表わしたのが図―2である．これをみると，初期貯水量と相対誤差の間には何ら関係がみられない．すなわち，この誤差はただ単なる数値実験上の偶発誤差だと思われる．また，その大きさは，最大で0.6%以下であるから，このケースでは流量系列の発生個数は上述の値で十分であろうし，貯水量定常分布の場合[1]と同様に数値実験のような膨大な計算をしなくても，2段階推移法により簡単に時間的問題が取り扱える．

なお，同じ条件で，数値実験解，2段階推移法，Phatarfod の解による空水到達期待時間を比較したのが図―3である．数値実験解と2段階推移法は図―2からも推測されるようにほとんど差がない．また，初期貯水量との関係では，初期貯水量が大きくなるに従ってほぼ線形的に空水到達期待時間が増す．2段階推移法と Phatarfod 解との比較では，図―1からも推測されるように初期貯水量が満水量の3/4くらいから Phatarfod 解が急速に大きくなり，2段階推移法の4倍にもなる場合がある．したがって，溢水の可能性のある場合には，空水到達期待時間が初期貯水量と線形関係にある2段階推移法の採用が妥当であろう．

4．放流量系列問題

(1)　2段階推移モデルによる放流量系列の導出

2．で述べた2段階推移モデルは貯水状態の推移に着目したものであり，貯水状態の表現としては，放流量を放流した後(つまり各期間の期首)，の貯水状態を対象としていた．他方放流量を流す前（つまり期間の期末）の貯水状態の推移を取り扱えば，期待放流量系列を求めることができる．

各期間における放流量の期待値を求めるには，実放流量 $R(ij)$ に対応する放流以前の貯水状態確率 h^s_{ji2} がわかればよい．つまり h^s_{ji2} を要素とする行ベクトル $\{H\}^s{}_2$ の推移を求めればよい．いま初期（期間番号0）の期首の貯水量ベクトル $\{H\}^0{}_1$ が与えられると，期間番号0の期末の貯水状態確率ベクトル $\{H\}^0{}_2$ は，式(1)より次式で表わされる．

$$\{H\}^0{}_2=\{H\}^0{}_1\cdot \boldsymbol{G} \quad \cdots\cdots (12)$$

また，一般の期間 s に対してはこの $\{H\}^0{}_2$ を基礎として式(2)と式(1)との合成によって，

$$\{H\}^{s+1}{}_2=\{H\}^s{}_2\cdot \boldsymbol{R}\cdot \boldsymbol{G} \quad \cdots\cdots (13)$$

となり，期間の期末の貯水状態確率ベクトルの推移が表現できる．結局 $\{H\}^s{}_2$ が求まればその要素 h^s_{ji2} を用いて，s 期間における放流量の期待値 $E[R^s]$ は，

$$E[R^s]=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{K}R(ij)\cdot h^s_{ji2} \quad \cdots\cdots (14)$$

で計算できる．

5．利水安全度指標と利水機能評価関数

(1)　代表的な利水安全度指標

貯水池あるいは貯水池を含む利水システムの利水安全度をどのような指標によって評価するかという問題は，利水問題の基礎となる課題で，中川[7]，Hashimoto[8]，小

尻・池淵[9]などいくつかの注目すべき研究がみられる．しかしながら，各貯水池の地域的・社会的特性等がかなり異なるために，一義的にどの指標がよいとはいいがたいように思える．ここでは，建設省技術研究会により行われた研究成果を参考にして，上述の表現を用いた代表的な利水安全度指標を記述する．

研究会の報告[10]によれば，利水安全度指標は渇水特性の面から以下の4つに分類される．

① 渇水の「頻度」を表わす指標
② 渇水の「長さ(期間)」を表わす指標
③ 渇水の「大きさ(程度)」を表わす指標
④ 渇水の「厳しさ（深刻さ)」を表わす指標

すなわち，頻度を表わす代表的な指標として“渇水の発生頻度”や貯水池での“補給不能発生日数”が，長さを表わす代表的な指標として貯水池での“補給不能発生日数”が，大きさを表わす代表的な指標として“不足%・日”が，厳しさを表わす代表的な指標として”(不足%)²・日”や“渇水被害関数”などが考えられている．

(2) 利水機能評価関数

本研究では，5.(1)の代表的な利水安全度指標にならって「頻度」,「長さ」,「大きさ」,「厳しさ」の観点から貯水池の利水機能評価関数の表現を行う．

a）頻度を表わす評価関数

渇水の発生頻度を貯水量分布により評価する．初期貯水量ベクトル $\{H\}^0{}_1$ が与えられたとすると，渇水期間 N の最後の貯水量ベクトル $\{H\}^N{}_2$ は，

$$\{H\}^N{}_2=\{H\}^0{}_1\cdot \boldsymbol{P}^N\cdot \boldsymbol{G} \quad (\boldsymbol{P}\equiv \boldsymbol{G}\cdot \boldsymbol{R}) \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

で与えられる．渇水の頻度は，渇水期において放流量 R が目標放流量 M を下回る確率（以後不足確率とよぶ）で表現できるから，貯水量ベクトル $\{H\}^N{}_2$ の要素 h^N_{ji2} を用いて，

$$\text{不足確率}=\sum_{j,i\in c} h^N_{ji2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

ここに，C：$R(ij)<M$ となる i，j のすべての組合せと表わされる．

b）長さを表わす評価関数

渇水期では，利水上危険な貯水量レベル（空水状態，あるいは最低限維持すべき貯水状態）に一度達したら，その後回復することは難しいと思われる．そこで，全渇水期間 N から貯水状態が危険なレベルに達するまでの期待時間を差し引いた残りの期間を期待補給不能期間と定義して渇水の長さの評価に用いる．いま空水到達期待時間を $E[t_e]$ とすれば，

$$\text{期待補給不能期間}=N-E[t_e]$$

と表わされる．なお，$E[t_e]$ は，3.の空水到達時間で示した手順で求められる．

c）大きさを表わす評価関数

渇水の大きさを不足%・期間の期待値で評価する．目標放流量に対する相対不足%は $((M-R(ij))/M)\times 100$ であるから式(14)の期待放流量系列と同じ手順で，期待不足%・期間は，

$$\begin{aligned}\text{期待不足\%・期間}&=\sum_{s=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{K}((M-R(ij))/M)\cdot h^s_{ji2}\times 100\\&=\sum_{s=1}^{N}((M-E[R^s])/M)\times 100 \quad \cdots\cdots\cdots (17)\end{aligned}$$

で表わせる．

d）厳しさを表わす評価関数

渇水の厳しさを，各単位期間当たりの（期待不足%)²の全渇水期間にわたる総和で評価し，これを（期待不足%)²・期間と定義する．各単位期間当たりの，目標放流量に対する（期待不足%)²は，式(17)と同様に $\{((M-R(ij))/M)\cdot h^s_{ji2}\times 100\}^2$ である．そこで全渇水期間にわたり，これを総和して，

$$\begin{aligned}(\text{期待不足\%})^2&=\sum_{s=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{K}\{((M-R(ij))/M)\cdot h^s_{ji2}\times 100\}^2\\&=\sum_{s=1}^{N}\{((M-E[R^s])/M)\times 100\}^2 \quad \cdots\cdots\cdots (18)\end{aligned}$$

で求められる．この式は，一般的な意味の(不足%)²・期間の期待値ではない．貯水池の出力である放流量の期待値（放流量期待値）を基礎として用いた表現をしている．なお，煩雑となるので以後は，これを単に(不足%)²・期間とよぶ．

6．貯水池操作方法の表現

利水用貯水池の操作規則は，どういう貯水量や流量状態の場合にどれだけ放流するかをあらかじめ策定しておくことといえる．

ここでは，操作の単位期間は，流量表現に関する時間の離散化幅で表現する．もちろん一般に，離散化幅を細かくすればきめ細かい操作に対応する．しかし，細かい分割はそれだけ流量分布の母数推定の精度の低下や計算量の増大といった問題を伴う．また，流入量分布に一次の自己相関性を考慮しているから，引き続く期間での流入量を予測する場合に，どの程度の離散化幅が精度のよい予測を可能にするか，などといった問題にも注意を払う必要がある．

さて，どういう状況でどれだけ流すかは，ここでは放流量の設定として表現する．すなわち，放流量を貯水状態の関数とするか，貯水状態と流入量の関数とするか，

さらにどういった関数形とするかで，操作方針を表現する．

（1） 貯水量方程式の拡張表現

放流量 R が貯水状態と流入量の関数であることを明記するために，従来の貯水量方程式[1]を表現し直す．なお，ここでは，当該期間における完全な流量予測が不可能で，放流を期末に一度に行う場合を対象とする．

従来の表記によれば，s 期間の流入量 Q^s を受けた期末の貯水量状態 $Z^s{}_2$ は，s 期間の期首の貯水量状態 $Z^s{}_1$ と Q^s および有効貯水池容量 K を使って，次式のように表現された．

$$Z^s{}_2=\min(Z^s{}_1+Q^s, K) \quad \cdots\cdots (19)$$

また，放流量を放流した後の貯水状態，つまり，$S+1$ 期間の期首の貯水状態 $Z^{s+1}{}_1$ は，放流可能性を考えて，次式で表記された．

$$Z^{s+1}{}_1=Z^s{}_2-\min(M, Z^s{}_1+Q^s) \quad \cdots\cdots (20)$$

したがって総合した貯水量状態の推移は式(19)，(20)より，

$$Z^{s+1}{}_1=\min(Z^s{}_1+Q^s, K) -\min(M, Z^s{}_1+Q^s) \quad \cdots\cdots (21)$$

であった．なお，式(21)は，操作方針として「貯水状態が目標放流量以上であれば目標放流量を，目標放流量未満であれば目標放流量にできるだけ近い量を放流する」という節水を考えない操作（以後無節水操作とよぶ）の表現にほかならない．そこで，より一般性をもたせた操作方法を考えるために，式(20)を次式のように拡張した表記をする．

$$Z^{s+1}{}_1=Z^s{}_2-R^s(Z^s{}_2, Q^s) \quad \cdots\cdots (22)$$

上式右辺の $R^s(Z^s{}_2, Q^s)$ は s 期間の放流量 R^s が $Z^s{}_2$ と Q^s の関数であることを意味する．したがって式(20)は R^s を以下のように設定したことになる．

$$R^s=M \quad (Z^s{}_2\geqq M),$$
$$R^s=Z^s{}_2 \quad (Z^s{}_2<M) \quad \cdots\cdots (23)$$

以下では，この放流量関数 $R^s(Z^s{}_2, Q^s)$ を使った操作方法を表現する．

7．合理的放流操作の策定

ここでは，渇水の厳しさの観点からみた放流操作を考えよう．式(18)で表現した渇水の厳しさを表わす評価関数である（不足%)^2・期間をできるだけ小さくするような操作方法を合理的放流操作とみなすことにする．

（1） 確率 *DP* による最適放流量系列の導出

無節水操作やその他の操作法との比較のために，渇水の厳しさからみた最も理想的な最適放流量系列を確率 *DP*[11]により求める．時間の流れを逆にとり，渇水期の最後を $s=0$ とおくと，貯水量方程式は，

$$Z^{s-1}{}_1=Z^s{}_1+Q^s-R^s$$

また，確率 *DP* は，次式のように定式化できる．

$$f_s(Z^s{}_1|Q^s)=\min[D(R^s)+\sum_{q=0}^{n}f_{s-1}(Z^{s-1}{}_1|q)\times P[q|Q^s]]$$
$$D(R^s)=(M-R^s)^2 \quad (0\leqq R^s\leqq M)$$
$$f_0=0 \quad \cdots\cdots (24)$$

ここで，min は，

$$R^s+Z^{s-1}{}_1=Z^s{}_1+Q^s, \quad 0\leqq Z^{s-1}{}_1\leqq K$$

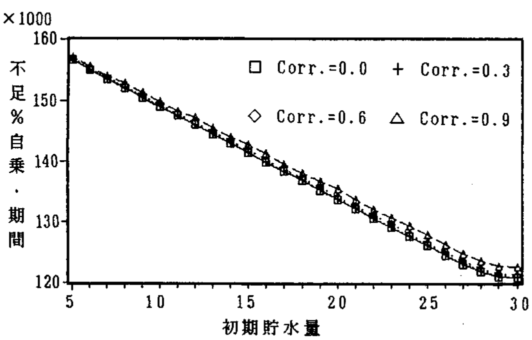
を満たす各 $(R^s, Z^{s-1}{}_1)$ の組合せの中での最小値を選ぶことを意味する．また，ここに $D(R)$ は不足量の二乗で表現した渇水被害関数，$f(Z|Q)$ は Q を既知とした場合の Z から生ずる s 以後の総被害関数の最小値，$P[q|Q]$ は Q を既知とした q の条件付き確率である．

式(24)により，$s=0$ から初めて，$s=N$ まで順次 f_s を求めれば，各初期貯水量に対応する最適放流量系列，および単位期間当たりの（不足%)^2 の全渇水期にわたる和の最小値が求められる．以後この操作を最適操作とよぶ．

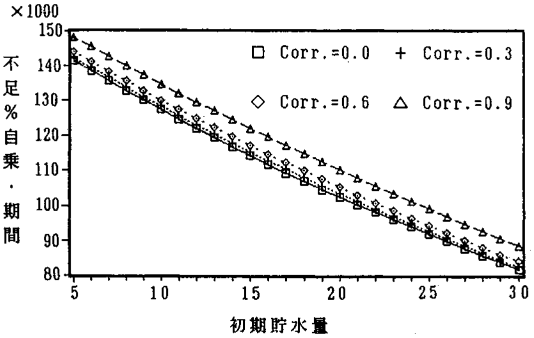
（2） 評価の対象とする貯水池操作方法

ところで前項の *DP* による最適放流量系列は，（不足%)^2・単位期間を最小にする操作ではあるが，最後に貯水量が使いきれるとしているし，また，操作法が時間に依存した非定常操作であった．利水用貯水池では，非定常操作は実用的とは思えないので，以後では定常操作で，できるだけ（不足%)^2・単位期間を小さくするようなものを式(22)の形式で表現する．

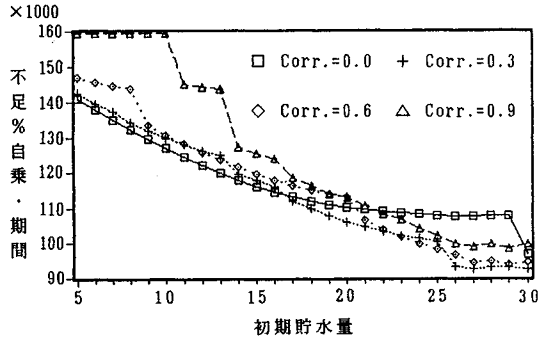
さて（不足%)^2・単位期間を小さくすることは，最小二乗誤差基準からみて，いわば，渇水期間中にわたり放流量ができるだけ一定になるような操作に連なるものと考えられる．ところで，いまの場合流量に自己相関性を勘案していることから，当該期間の流入量から次の期間の流入量の予測をし，流量が少ないときには少ない量を，多いときには多い量を放流するような操作を考えてみよう．



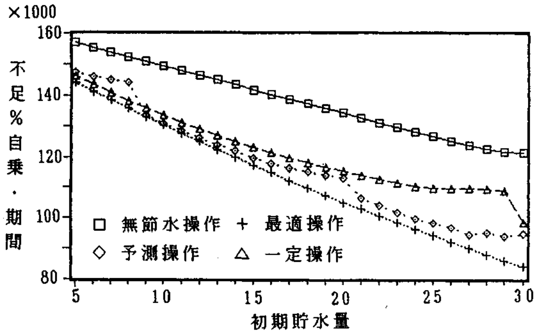
図―4　相関係数の違いによる（不足%)^2・期間の比較（無節水操作）($K=30$, $M=5$, $N=30$, $r=5$, $a=0.3$)



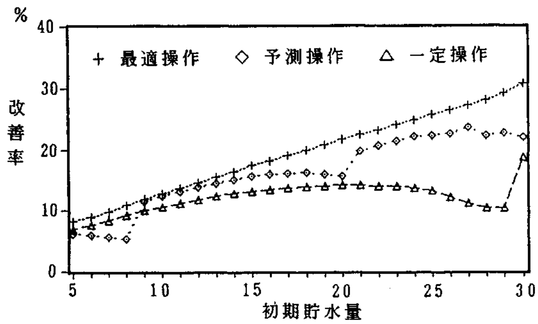
図－5　相関係数の違いによる（不足%）²・期間の比較
（最適操作）(K=30, M=5, N=30, r=5, a=0.3)



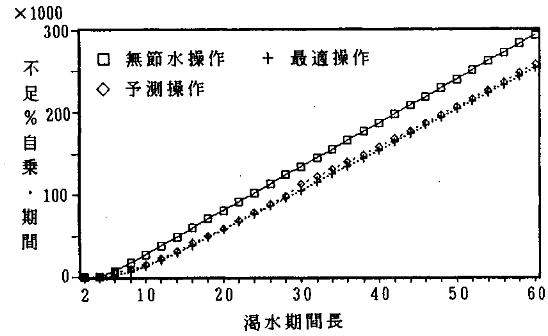
図－6　相関係数の違いによる（不足%）²・期間の比較
（予測操作）(K=30, M=5, N=30, r=5, a=0.3)



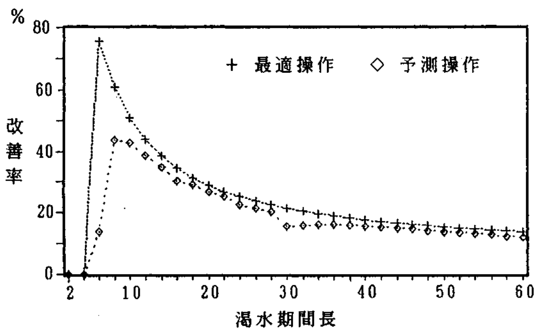
図－7　操作方法による（不足%）²・期間の比較
(K=30, M=5, N=30, r=5, a=0.3, Corr.=0.6)



図－8　操作方法による改善率の比較
(K=30, M=5, N=30, r=5, a=0.3, Corr.=0.6)



図－9　操作方法による（不足%）²・期間の比較
(K=30, M=5, U=20, r=5, a=0.3, Corr.=0.6)



図－10　渇水期間長と改善率
(K=30, M=5, U=20, r=5, a=0.3, Corr.=0.6)

いま，流入量平均を Q_m, 流入量の自己相関係数を ρ とすると，s 期間の流入量 Q^s が既知の場合，採用してきた相関分布では，$s+1$ 期間の流入量 Q^{s+1} の条件付き期待値は，次式の線形回帰で表わされることが知られている[12].

$$E[Q^{s+1}|Q^s]=(1-\rho)\times Q_m+\rho\times Q^s \quad \cdots\cdots (25)$$

そこで，s 期間の放流量 R^s は，初期貯水量による放流分と，Q^{s+1} の期待値による放流分とを加算して，次式のような関数で表現する．

$$R(ij)=M \quad [M\leqq U/N+(1-\rho)\times Q_m+\rho\times j\leqq K]$$
$$R(ij)=(U/N)+(1-\rho)\times Q_m+\rho\times j \quad [U/N+(1-\rho)\times Q_m+\rho\times j\leqq i<M]$$
$$R(ij)=i \quad [0\leqq i<U/N+(1-\rho)\times Q_m+\rho\times j] \quad \cdots\cdots (26)$$

上式で U は初期貯水量を意味する．なお，R は離散化量なので，上式で求めた数値を，四捨五入して整数化して

用いる．以後この操作を予測操作とよぶ．

8．適用計算例

有効貯水池容量 $K=50$，目標放流量 $M=5$，渇水期間長 $N=30$ の条件で，上限 $r=5$，形状母数 $a=0.3$，相関係数 $\rho=0.0$，0.3，0.6，0.9 の相関二項分布流量を与えたときの（不足%）^{2}・単位期間と初期貯水量との関係を図—4～6に示す．図—4は無節水操作，図—5は確率 DP による最適操作，図—6は，式(26)に示した予測操作の場合である．まず無節水操作と最適操作は，値そのものは最適操作の方が小さいという違いはあるが，全体的な傾向は類似している．つまり，相関の大小にかかわらず，（不足%）^{2}・単位期間と初期貯水量の間では，初期貯水量が増加するほど（不足%）^{2}・単位期間が線形的に減少する．ただし，無節水操作において，初期貯水量が満水に近くなると，ややその関係が不明確となる．これは，まだ貯水量が満水に近い渇水期初期に，大きな流入量が生起すると，目標放流量以上の放流をして，溢水（つまり無効放流）をしてしまう場合があるためと思われる．さらに相関係数の影響をみると，相関が強いほど，（不足%）^{2}・単位期間が大きくなっている．この理由として，流入量分布に，量の少ない方にひずんだ（正のひずみをもつ）分布形を与えているため，自己相関が強くなるほど，量の少ない範囲の持続性が強く働き，渇水傾向が強くなるためであろう．

他方予測操作の場合（不足%）^{2}・単位期間と初期貯水量との間には，初期貯水量が多くなれば（不足%）^{2}・単位期間は減少するという関係は認められるが，その変化の仕方は不連続で，全体でみると線形関係とはみえない．また，その傾向は相関が強いほど，強くなる．これは，式(26)の放流量の関数値が整数化されることにより，所与の初期貯水量などの貯水池条件に対して予測操作による効果が不明瞭になるためであろう．さらに相関係数が大きいほど流入量が放流量に与える影響が大きくなり，不明瞭になりやすいものと思われる．

次に，先と同じ貯水池条件で，$r=5$，$a=0.3$，$\rho=0.6$ の相関二項分布流量を与えたときの，無節水操作，最適操作，予測操作，および式(26)で $\rho=0$，すなわち流入量の影響を受けないとした場合（以後一定操作とよぶ）の4ケースについて（不足%）^{2}・単位期間と初期貯水量との関係を図—7に示す．また無節水操作の場合からどれだけ（不足%）^{2}・単位期間が減少（改善）したかを無節水操作による（不足%）^{2}・単位期間を100とした場合の減少百分率（改善率）として図—8に示す．図—7によると，予測操作はかなり最適操作に近く，有効な操作であることがわかる．また，ほとんどの場合，予測操作の方が，一定操作より（不足%）^{2}・単位期間が小さいので，放流量を決める際に流入量を情報として用いた方がより合理的なことがわかる．改善率は，全体的な傾向として，どの操作の場合も初期貯水量が大きくなるほど上がっている．したがって，まだ渇水が深刻でなく貯水量に余裕のあるほど，利水効果が期待できることとなる．

図—7，8と同じ条件で，初期貯水量を20単位とし，渇水期間長と（不足%）^{2}・単位期間との関係を図—9に，渇水期間長と改善率との関係を図—10に示す．やはり，予測操作は，最適操作にかなり近い値を示す．全体的な傾向としては，渇水期間が長くなるほど，（不足%）^{2}・単位期間も大きくなり，その関係はほぼ線形的になる．改善率は，渇水期間長が長くなるほど小さくなっており，やはり渇水傾向が弱いほど予測操作の効果があるようである．

9．ま　と　め

得られた成果を箇条書にして以下に示す．

（1）　2段階推移モデルが，空水到達期待時間などの利水機能の時間的な側面の評価に有用なことを示した．

（2）　2段階推移法，数値実験，Phatarfod の解の各方法により空水到達期待時間を求め，比較した結果，2段階推移法の妥当性と，Phatarfod の解の適用の限界を示した．

（3）　2段階推移モデルにより，実用的な利水安全度指標に対応する利水機能評価関数を計算できることを示した．

（4）　渇水の厳しさの観点から，確率 DP による最適操作，流入量を情報とした予測操作，可能な限り目標放流量を放流する無節水放流の3つの操作方法を評価した結果，予測操作が，最適操作とほぼ同等に合理的な操作であることがわかった．

10．あ と が き

現実の利水安全度に対応した評価関数という観点から，本稿ではいくつかの機能評価関数を設定し，そのうち渇水の厳しさを表わす評価関数について適用計算例を提示した．しかしながら本来，貯水池に求められる利水機能は，その貯水池系に特有なさまざまな自然的・社会的・経済的条件などにより異なるはずであり，一般にどの評価方法がよいとは断定できない．ここに示した評価関数のみならず，より基礎的な貯水量定常分布，空水到達期待時間などをもとに，それぞれの貯水池系に適した評価関数を設定し，利水評価を実施していくべきであることはいうまでもない．しかし，その際に本研究で提案した2段階推移法による時間的側面の勘案は，いずれにおいても基礎とした役割を果たし得るものと期待している．また，本稿では，計算例として，仮想の貯水池条件，

流入量分布を設定して，利水機能評価を行った．実存する貯水池への適用に際しては，流入量の確率特性の定常性が保証されるように季節分割を行い，各季節に応じた目標放流量を設定して，各季節ごとに利水機能評価を行うことで，流入量，目標放流量の季節変化に対応できると思われる．

参考文献

1) 鈴木正人・長尾正志：2段階推移モデルによる相関離散分布流量を受ける貯水池理論，土木学会論文集，第411号／II-12，pp. 161～168，1989.
2) Moran, P.A.P.: A probability theory of dams and storage systems, Aust. J. Appl. Sci., Vol. 5, pp. 116～124, 1954.
3) 長尾正志・梶間津洋志：利水用貯水池における期間長特性の確率行列による推算，第24回水理講演会論文集，pp. 65～70，1980.
4) 森村英典・高橋幸雄：マルコフ解析，日科技連，pp. 60～66，1979.
5) Phatarfod, R.M. and Mardia, K.V.: Some results for dams with Markovian inputs, J. Appl. Prob., Vol. 10, pp. 166～180, 1973.
6) 長尾正志：貯水池による水量制御の信頼性評価，土木学会水理委員会水工学シリーズ，84-A-1，1984.
7) 中川芳一：水資源システムの策定プロセスに関する一考察，NSC研究年報，Vol. 8，No. 1，pp. 21～67，1980.
8) Hashimoto, T. *et al.*: Reliability, Resiliency, and Vulnerability Criteria For Water Resource System Performance Evaluation, Water Resources Research, Vol. 18, No. 1, pp. 14～20, 1982.
9) 小尻利治・池淵周一・飯島　健：安全度評価をベースにした最適な水利用システムの構成，第29回水理講演会論文集，pp. 323～328，1985.
10) 建設省河川局河川計画課・建設省土木研究所：利水安全度に関する研究，第36回建設省技術研究会，pp. 73～79，1982.
11) たとえば，吉川和広ら：土木計画学演習，森北出版，pp. 139～144，1985.
12) Edwards, C.B. and Gurland, J.: A class of distributions applicable to accidents, Journ. Amer. Statist. Ass., Vol. 56, pp. 503～517, 1961.

(1989.12.4・受付)