

乱れエネルギースペクトルを考慮した乱流中の球の沈降速度

THEORETICAL STUDY ON MEAN FALL VELOCITY OF SPHERES IN FLUIDS WITH VERTICAL RANDOM OSCILLATIONS

山坂昌成*・池田駿介**

By Masashige YAMASAKA and Syunsuke IKEDA

The fall velocity of spherical particle is analyzed theoretically in taking account of the effects of fluid turbulence. The method of Fourier transformation is applied to the theory, from which the mean fall velocity of spheres is predicted in terms of the power spectral density function of vertical fluid oscillation. The method is applied to the suspended sand particles in a river, and the effect of turbulence on the fall velocity of sand particles is found to be negligible in natural geophysical flows as far as the nonlinear drag is concerned.

Keywords : fall velocity, nonlinear drag, sphere, spectral response, turbulence

1. 序 論

鉛直振動流や乱流中では、流体より重い物質の沈降速度が小さくなり、化学工業の分野では、これを利用して反応時間を長くさせたり、重物質の輸送を効率良く行おうとする試みがなされている。また、河川の浮遊砂は、河床近傍の流れの乱れの影響で河床から飛び上がり、その上方への拡散量と下方への沈降量がつり合うことによって、平衡濃度分布を形成している。著者ら¹⁾は、このような鉛直振動流や格子を上下運動させることによって得られる強い乱流中では砂の沈降速度が静水中の値と異なることに注目し、粒子の沈降速度に及ぼす非線形抵抗特性の影響を理論と実験の両面から明らかにした。ただし、そこでは流れを鉛直正弦振動で模擬している。しかし、格子乱流や河川では種々の乱れが存在するため、乱れの強さおよび乱れの周波数が分布を有していることの影響も考慮する必要がある。関根・吉川²⁾は乱れの周波数および強さをそれぞれ独立に変化させて数値解析を行い、その変化が平均沈降速度に及ぼす影響はほとんど現われないことを明らかにしている。しかし、周波数と乱れ強さの関係については考慮されておらず、その結果がそのまま乱れの場に適用できるとはいいがたい。本研究では、実河川における乱れエネルギースペクトル密度

を考慮できる、乱流中の球の沈降速度の推定法を提案し、沈降速度に及ぼす乱れおよびそれがもつ周波数分布の影響を明らかにする。

2. 球の運動方程式

一般の流れでは、流体が平均的に縦断方向へ移動するとともに、縦断方向、横断方向、鉛直方向の乱れ速度成分が存在する。関根・吉川²⁾は鉛直方向の乱れ成分、水平方向の乱れ成分のどちらか一方を与え(正弦振動)、水平方向の乱れと鉛直方向の乱れの強さが同じ程度である場合には乱れの水平方向成分が粒子の沈降速度に及ぼす影響は鉛直方向成分のそれに比べて無視し得るほど小さいことを見出している。そこで本研究では、簡単のために乱れの鉛直方向成分のみを考慮する。粒子の水平移動速度が流体の平均主流速に等しいと仮定すると、粒子の鉛直方向運動方程式は一次的に

$$(\rho_s + C_M \rho_f) \frac{\pi d^3}{6} \frac{dv_s}{dt} = (\rho_s - \rho_f) \frac{\pi d^3}{6} g - \frac{1}{2} \rho_f C_D \frac{\pi d^2}{4} (v_s - v_f) |v_s - v_f| + \rho_f (1 + C_M) \frac{\pi d^3}{6} \frac{dv_f}{dt} \dots\dots\dots (1)$$

と表わされる¹⁾⁻³⁾。ここに、 ρ は密度、 v は鉛直下向きを正とする速度で、添字 s, f はそれぞれ粒子、流体に関する諸量であることを示す。また、 d は球の直径、 t は時間、 g は重力加速度、 C_D は抗力係数、 C_M は仮想質量係数(=0.5)である。平均沈降速度に及ぼす Basset 項の影響は小

* 正会員 工博 金沢工業大学助教授 土木工学科
(〒911 石川県石川郡野々市町扇が丘7-1)

** 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科
(〒152 目黒区大岡山2-12-1)

さいため²⁾、式(1)ではこれが無視されている。式(1)においては右辺第3項は流体の加速による圧力勾配を表わす項であり、鉛直振動流では時間のみの関数となる。ところが、乱流では乱れの鉛直成分のみを考慮しても $dv_r/dt = \partial v_r/\partial t + v_r \partial v_r/\partial z$ となり、右辺第3項から乱れの空間構造に起因する非線形性が現われる。したがって、球の運動に影響を及ぼす非線形性は非線形流体抵抗(式(1)右辺第2項)と流体場の非線形性(式(1)右辺第3項)の2つとなる。しかし、この流体場の非線形性を考慮することはきわめて困難であり、かつ、乱れのスケールが球に比べて十分大きい場合($\partial v_r/\partial z \ll \nu/d^2$ 、ここに ν は動粘性係数)には第1近似として無視し得るので、ここでは非線形流体抵抗についてのみ論ずることにする。

粒子が静水中を定常沈降する場合には、式(1)の時間微分項および v_f はゼロとなるので、

$$v_{s0} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \frac{gd}{C_{D0}}} \dots\dots\dots (2)$$

が成り立つ。ここに、添字“0”は静水中を定常沈降する場合の諸量であることを表わす。乱れの空間構造に起因する非線形項を無視し、式(2)を用いて、式(1)を無次元化すると、 w を τ のみの関数として

$$a \frac{dw}{d\tau} + c(u-w)|u-w| = 1 + (a-1) \frac{dw}{d\tau} \dots\dots (3)$$

となる。ここに、 $u = v_s/v_{s0}$ 、 $w = v_r/v_{s0}$ 、 $\tau = gt/v_{s0}$ 、 $c = C_D/C_{D0}$ 、 $a = (\rho_s/\rho_f + C_M)/(\rho_s/\rho_f - 1)$ である。粒子と流体の相対速度を

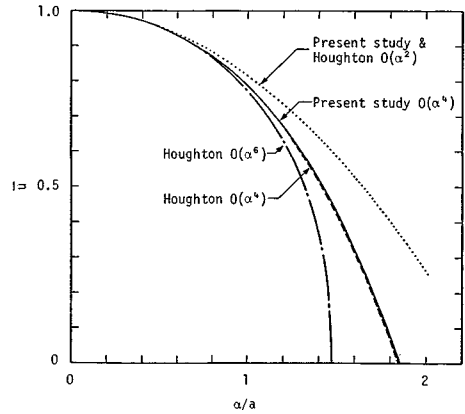
$$u_r = u - w \dots\dots\dots (4)$$

で表わし、これが常に正であることを仮定すると、式(3)は

$$a \frac{du_r}{d\tau} + cu_r^2 = 1 - \frac{dw}{d\tau} \dots\dots\dots (5)$$

のように簡単化される。式(3)から明らかなように、 $u_r < 0$ となる位相が存在する場合には、抗力は上向き、下向きと一周期内で変化するはずであるが、式(5)ではこれをすべて上向きの抗力としかみなせないため、 $u_r < 0$ となる位相が存在する条件で式(5)を適用すると、鉛直振動流中の粒子の沈降速度の低下を過大評価することになる¹⁾。抗力項を $cu_r|u_r|$ の形のままで残すと解析解を得ることが困難となるので、本研究では上記の点に留意しつつ、式(5)を用いた粒子の沈降速度の解析を行う。

前述の研究¹⁾では鉛直振動流速 w を正弦波で与え、摂動法により式(5)で表わされる非線形方程式の解を第4次近似解まで解析的に求めた。本研究では、 w のパワースペクトルを考慮するため、後述するように2次近似の定常解(平均沈降速度)までしか得られないが、先に仮定した $u_r > 0$ の範囲では2次近似と4次近似の定常解の差は微小であるので第2次近似まででも十分である。



図一1 Re数、 $|v_s - v_r|d/\nu$ が大きく C_D が一定とみなせる領域での各摂動解と Houghton の理論の比較¹⁾

たとえば2次近似解(図一1中の点線)と4次近似解(図一1中の実線)の比較を示した図一1の条件では $a/a < 1.17$ の領域で $u_r > 0$ となるが、この領域では両解に差異はほとんどみられない。ここで鉛直振動流の不規則性を考慮するために、 w を次のように正規化して表現する。

$$w = \sqrt{\langle w^2 \rangle} F(\tau) \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を意味する。定常確率過程を仮定すると、 $\langle w \rangle = 0$ であるので、

$$\langle F(\tau) \rangle = 0 \dots\dots\dots (7)$$

となる。また、 w の平均二乗根を β で表わすことにすると、 β は

$$\beta = \sqrt{\langle w^2 \rangle} \dots\dots\dots (8)$$

である。単振動の場合には、無次元流速振幅 α と上述の β の関係は、

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha \dots\dots\dots (9)$$

となる。

3. スペクトルを用いた摂動法解析

式(6)、(8)を用いて式(5)を書き直すと、

$$a \frac{du_r}{d\tau} + cu_r^2 = 1 - \beta \frac{d}{d\tau} F(\tau) \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここに、抗力係数比 $c (= C_D/C_{D0})$ は Reynolds 数比 $R = Re/Re_0$ ($Re = (v_s - v_r)d/\nu$ 、 $Re_0 = v_{s0}d/\nu$) の関数で、疑似定常を仮定すると、

$$c = \frac{1 + 0.152\sqrt{Re_0}\sqrt{R} + 0.0151Re_0R}{R(1 + 0.152\sqrt{Re_0} + 0.0151Re_0)} \dots\dots\dots (11)$$

が近似的に成り立つ¹⁾。抗力係数として定常流中で測定された値を非定常流に拡張して用いているが、正弦振動流中に置かれた球の抗力係数は KC 数によらず、ほぼ一定の値(約0.6)をとることが知られている³⁾。この値は定常流で Reynolds 数の大きい場合の値とほぼ一致して

おり、疑似定常を仮定しても差し支えないことを示している。式(11)を式(10)に代入し、 $R=u_r$ を考慮すると、 $\beta/a \rightarrow 0$ の場合、 $\tau \rightarrow \infty$ における式(10)の解は、 $u_r=1$ (このとき、 $c=1$)となる。そこで、 β/a が微小な領域において、 u_r および c を1のまわりに β/a で展開し、 $\tau \rightarrow \infty$ における解を以下のように表わす。

$$u_r = 1 + \{U_1 + u_1(\tau)\} \frac{\beta}{a} + \{U_2 + u_2(\tau)\} \left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + \dots \quad (12)$$

$$c = 1 + \dot{c}(u_r - 1) + \frac{\ddot{c}}{2}(u_r - 1)^2 + \dots \\ = 1 + \dot{c}\{U_1 + u_1(\tau)\} \frac{\beta}{a} + [\dot{c}\{U_2 + u_2(\tau)\} + \frac{\ddot{c}}{2}\{U_1 + u_1(\tau)\}^2] \left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + \dots \quad (13)$$

ここに、 U_1, U_2 はそれぞれ、1次、2次の定常項を、 u_1, u_2 は時間変動項を表わし、

$$\langle u_1 \rangle = \langle u_2 \rangle = 0 \quad (14)$$

である。 $\dot{c} = dc/dR|_{R=1}$ 、 $\ddot{c} = d^2c/dR^2|_{R=1}$ であり、 \dot{c} および \ddot{c} の関数形は、式(11)から一般に次式で表わされる。

$$\dot{c} = -\left(1 + \frac{A}{2}\right) / K \quad (15)$$

$$\ddot{c} = \left(2 + \frac{3}{4}A\right) / K \quad (16)$$

ここに、 $A = 0.152\sqrt{Re_0}$ 、 $K = 1 + 0.152\sqrt{Re_0} + 0.0151Re_0$ である。

式(12)、(13)を式(10)に代入し、 β/a の各オーダーごとに整理すると以下ようになる。

$(\beta/a)^1$ のオーダー：

$$a \frac{du_1}{d\tau} + (2 + \dot{c})(U_1 + u_1) = -a \frac{dF}{d\tau} \quad (17)$$

$(\beta/a)^2$ のオーダー：

$$a \frac{du_2}{d\tau} + \left\{ (2 + \dot{c})(U_2 + u_2) + \left(1 + 2\dot{c} + \frac{\ddot{c}}{2}\right)(U_1 + u_1)^2 \right\} = 0 \quad (18)$$

定義から $\langle F \rangle = 0$ 、 $\langle u_1 \rangle = 0$ 、 $\langle u_2 \rangle = 0$ を考慮して、式(17)、(18)の両辺のアンサンブル平均をとると、

$$U_1 = 0 \quad (19)$$

$$U_2 = -\frac{1 + 2\dot{c} + \ddot{c}/2}{2 + \dot{c}} \langle u_1^2 \rangle \quad (20)$$

が得られる。無次元平均沈降速度、 $\langle u \rangle = \langle v_s \rangle / v_{s0}$ 、は式(4)、(6)、(7)から

$$\langle u \rangle = \langle u_r \rangle + \langle w \rangle = \langle u_r \rangle \quad (21)$$

と表わされるので、 u_r に以上の結果を代入し、

$$\langle u \rangle = 1 + U_2 \left(\frac{\beta}{a}\right)^2 = 1 - \frac{1 + 2\dot{c} + \ddot{c}/2}{2 + \dot{c}} \langle u_1^2 \rangle \left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \quad (22)$$

となる。

特に、 $F(\tau)$ が正弦振動する場合には、

$$\beta F(\tau) = a \cos(\Omega\tau) \quad (23)$$

より、

$$F(\tau) = \frac{a}{\beta} \cos(\Omega\tau) \quad (24)$$

となり、式(19)、(24)を考慮して式(17)を解くと

$$\langle u_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{(\Omega a)^2}{(\Omega a)^2 + (2 + \dot{c})^2} \left(\frac{a}{\beta}\right)^2 \quad (25)$$

が得られる。ここに、 Ω は無次元角振動数($v_{s0}\omega/g$ 、 ω :角振動数)である。式(25)を式(22)に代入すると、

$$\langle u \rangle = 1 - \frac{1 + 2\dot{c} + \ddot{c}/2}{2(2 + \dot{c})} \frac{(\Omega a)^2}{(\Omega a)^2 + (2 + \dot{c})^2} \left(\frac{a}{\beta}\right)^2 \quad (26)$$

となり、上式はすでに得られている解析結果¹⁾の2次近似的に一致する。

次に、不規則鉛直振動の場合の解析法について述べる。式(17)、(19)より、一次のオーダーの運動方程式は、

$$a \frac{du_1}{d\tau} + (2 + \dot{c})u_1 = -a \frac{dF}{d\tau} \quad (27)$$

のように簡略化される。式(27)の両辺をLaplace変換すると(たとえば文献6)、

$$a\{sU_1(s) - u_1(0^+)\} + (2 + \dot{c})U_1(s) = -a\{s\mathfrak{F}(s) - F(0^+)\} \quad (28)$$

が得られ、 $U_1(s)$ について解くと、

$$U_1(s) = \frac{-as}{as + (2 + \dot{c})} \mathfrak{F}(s) + \frac{a\{u_1(0^+) + F(0^+)\}}{as + (2 + \dot{c})} \quad (29)$$

となる。ここに、 $U_1(s)$ 、 $\mathfrak{F}(s)$ はそれぞれ $u_1(\tau)$ 、 $F(\tau)$ のLaplace変換を表わし、次式で定義される。

$$U_1(s) \equiv \mathcal{L}\{u_1(\tau)\} = \int_0^\infty u_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ \mathfrak{F}(s) \equiv \mathcal{L}\{F(\tau)\} = \int_0^\infty F(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (30)$$

本研究では、時間が十分に経過した後の平均沈降速度を求めることに主眼を置いているので、初期条件は任意であり、簡単のために、

$$u_1(0^+) = 0 \\ F(0^+) = 0 \quad (31)$$

とおくことができる。このとき式(29)は応答関数 $h(\tau)$ を用いて、

$$\mathcal{L}\{u_1\} = \mathcal{L}\{h(\tau)\} \mathcal{L}\{F(\tau)\} \quad (32)$$

と表わすことができる。ここに

$$\Omega\{h(\tau)\} = \frac{-as}{as + (2 + \dot{c})} \dots\dots\dots (33)$$

である。式(33)の両辺を逆 Laplace 変換すると、応答関数が以下のように得られる。

$$h(\tau) = \Omega^{-1}\left\{-1 + \frac{(2 + \dot{c})}{as + (2 + \dot{c})}\right\} \\ = -\delta(\tau) + \frac{2 + \dot{c}}{a} \exp\left(-\frac{2 + \dot{c}}{a}\tau\right) \dots\dots\dots (34)$$

ここに、 $\delta(\tau)$ は Dirac のデルタ関数である。

Laplace 変換の積に関する公式を利用して、式(32)を逆 Laplace 変換すると、 u_1 は以下のたたみ込み積分の形で表わされる。

$$u_1(\tau) = \int_0^\tau h(\tau - \xi)F(\xi)d\xi \dots\dots\dots (35)$$

さらに、unit step 関数

$$u_{sr}(\tau - \xi) = 0, \tau - \xi < 0 \\ u_{sr}(\tau - \xi) = 1, \tau - \xi \geq 0 \dots\dots\dots (36)$$

を用い、流体の鉛直振動が $\tau = 0$ に開始したと仮定すると、

$$F(\xi) = 0, \xi < 0 \dots\dots\dots (37)$$

のもとに、式(35)は積分の下限、上限をそれぞれ $-\infty$ 、 $+\infty$ に置き換えて、

$$u_1(\tau) = \int_{-\infty}^\infty u_{sr}(\tau - \xi)h(\tau - \xi)F(\xi)d\xi \\ = \int_{-\infty}^\infty u_{sr}(\eta)h(\eta)F(\tau - \eta)d\eta \dots\dots\dots (38)$$

のように書き改められる。ここに $\eta = \tau - \xi$ である。

式(22)が示すように、粒子の平均沈降速度は $\langle u_1^2 \rangle$ に支配される。 $\langle u_1^2 \rangle$ は u_1 のパワースペクトル密度 $S_{uu}(\Omega)$ を用いて、

$$\langle u_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^\infty S_{uu}(\Omega)d\Omega \dots\dots\dots (39)$$

と表わされ、 $S_{uu}(\Omega)$ は u_1 の自己相関関数 $C_{uu}(T)$ と次のように関係づけられる (たとえば、文献7))。

$$S_{uu}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty C_{uu}(T)e^{-i\Omega T}dT \dots\dots\dots (40)$$

ここに、 i は虚数単位を表わし、 T はタイムラグを表わす。まず、式(38)を用いて $C_{uu}(T)$ を求める。

$$C_{uu}(T) = \langle u_1(\tau)u_1(\tau + T) \rangle \\ = \left\langle \int_{-\infty}^\infty u_{sr}(\xi)h(\xi)F(\tau - \xi)d\xi \right. \\ \left. \cdot \int_{-\infty}^\infty u_{sr}(\eta)h(\eta)F(\tau + T - \eta)d\eta \right\rangle \\ = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty u_{sr}(\xi)h(\xi)u_{sr}(\eta)h(\eta) \\ \cdot C_{FF}(T + \xi - \eta)d\xi d\eta \dots\dots\dots (41)$$

ここに、 C_{FF} は $F(\tau)$ の自己相関関数、すなわち v_{s0} で無次元化され、式(6)で正規化された流体の鉛直振動流速の自己相関関数である。式(41)を式(40)に代入すると、

$$S_{uu}(\Omega) = H(\Omega)H^*(\Omega)S_{FF}(\Omega) \\ = |H(\Omega)|^2 S_{FF}(\Omega) \dots\dots\dots (42)$$

が得られる。ここに、 $*$ は複素共役を表わし、 $H(\Omega)$ 、 $S_{FF}(\Omega)$ は、それぞれ、

$$H(\Omega) = \int_{-\infty}^\infty u_{sr}(\eta)h(\eta)e^{-i\Omega\eta}d\eta \dots\dots\dots (43)$$

$$S_{FF}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty C_{FF}(T)e^{-i\Omega T}dT \dots\dots\dots (44)$$

である。 $H(\Omega)$ はシステム関数または周波数応答とよばれ⁸⁾、 $S_{FF}(\Omega)$ は $F(\Omega)$ のパワースペクトル密度を意味する。

式(27)で表わされる運動方程式に基づいた応答関数、式(34)、を式(43)に代入すると、システム応答 $H(\Omega)$ は、

$$H(\Omega) = \frac{-a\Omega\{a\Omega + i(2 + \dot{c})\}}{(a\Omega)^2 + (2 + \dot{c})^2} \dots\dots\dots (45)$$

となる。したがって、 $|H(\Omega)|^2$ は、

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{(a\Omega)^2}{(a\Omega)^2 + (2 + \dot{c})^2} \dots\dots\dots (46)$$

で表わされる。式(22)、(39)、(42)、(46)より、流体が不規則鉛直振動する場合の粒子の無次元平均沈降速度は

$$\langle u \rangle = 1 - \frac{1 + 2\dot{c} + \dot{c}/2}{2 + \dot{c}} \left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \\ \cdot \int_{-\infty}^\infty \frac{(a\Omega)^2}{(a\Omega)^2 + (2 + \dot{c})^2} S_{FF}(\Omega)d\Omega \dots\dots\dots (47)$$

によって与えられる。すなわち、鉛直振動流速のパワースペクトル密度が与えられれば、粒子の平均沈降速度が求められる。ただし、 $S_{FF}(\Omega)$ が複雑な関数形の場合には、数値積分を行う必要がある。式(47)は (β/a) の2次のオーダーまでの解であるが、流体が不規則振動する場合には式(17)、(18)から式(19)、(20)および(25)のように U_1 、 U_2 および $\langle u_1^2 \rangle$ しか求めることができないため、本手法により平均沈降速度のさらに高次の解析解を得ることはできない。

ここで、流体が正弦鉛直振動する場合を例にとり、式(47)の妥当性を検証する。式(24)と同様に無次元角振動数が Ω_0 (Ω は式(47)では積分変数となっているのでこのように置く)の単振動を考える。

$$F(\tau) = \frac{\alpha}{\beta} \cos(\Omega_0\tau) \dots\dots\dots (48)$$

このとき、 $F(\tau)$ の自己相関関数 $C_{FF}(T)$ は定義から、またパワースペクトル密度 $S_{FF}(\Omega)$ は式(44)から、それぞれ

$$C_{FF}(T) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \cos \Omega_0 T \dots\dots\dots (49)$$

$$S_{FF}(\Omega) = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \{ \delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0) \} \dots\dots (50)$$

となる⁹⁾。式(50)を式(47)に代入して積分を行うと、

$$\langle u \rangle = 1 - \frac{1+2\dot{c} + \dot{c}/2}{2(2+\dot{c})} \frac{(a\Omega_0)^2}{(a\Omega_0)^2 + (2+\dot{c})^2} \left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 \dots\dots\dots (51)$$

が得られる。上式は式(26)および先の解析¹⁾の2次近似解に一致し、ここで用いた解析法の妥当性が検証された。

4. 河川への適用

前節までの解析で、鉛直方向乱れのパワースペクトル密度が与えられると、式(47)により粒子の平均沈降速度が求められる。そこで、実河川の乱れのパワースペクトル密度を Ω の関数として近似表現することを試みる。

Taylor の凍結乱流の仮定を用い、乱れの空間的な自己相関関数が距離に対して指数的に減衰、 $\exp(-x/\Lambda_f)$ 、することを仮定すると一様流中の乱れの流下方向成分のパワースペクトル密度は、

$$Eu_f(n) = 2 \frac{\langle u_f^2 \rangle \Lambda_f}{U_f} \frac{1}{1 + \{2\pi(n\Lambda_f/U_f)\}^2} \dots\dots\dots (52)$$

と表わされる¹⁰⁾(文献10)では one-sided のスペクトル表示をしているので、上式の前頭の係数は4)。ここに、 Λ_f は渦の代表長さ、 u_f および U_f はそれぞれ、一様流れの乱れ成分および平均流速であり、 n は周波数である。本来ここで使用されるべきスペクトルは Lagrange 的スペクトルでなければならないが、本解析では乱れ場の非線形性(たとえば $v_f \partial v_f / \partial z$ の項)を無視しているので、Euler 的スペクトルと一致し、スペクトルを式(52)のように表わすことができる。式(52)は、流下方向の乱れのパワースペクトルを表わしたものであるが、鉛直乱れの周波数特性が流下方向乱れのそれと相似であると仮定すると、鉛直乱れのパワースペクトル密度は、式(52)の $\langle u_f^2 \rangle$ を単に $\langle v_f^2 \rangle$ に置き換えて、

$$Ev_f(n) = 2 \frac{\langle v_f^2 \rangle \Lambda_f}{U_f} \frac{1}{1 + \{2\pi(n\Lambda_f/U_f)\}^2} \dots\dots\dots (53)$$

で表わすことができる。上式で表わされるパワースペクトル密度は次元量であるが、本解析で用いた無次元化に従い、 $S_{FF}(\Omega)$ に変換すると

$$S_{FF}(\Omega) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{1 + (\gamma\Omega)^2} \dots\dots\dots (54)$$

となる。ここに、

$$\gamma = \frac{g\Lambda_f}{U_f v_{s0}} \dots\dots\dots (55)$$

である。式(54)では、高波数域でエネルギースペクトル密度が周波数の2乗に逆比例して低減し(図-2)、実測される $-5/3$ 乗則あるいは $-13/3$ 乗則¹¹⁾を忠実に表現することはできないが、高波数域のエネルギースペクトル密度はきわめて小さく、この領域での誤差が粒子の平均沈降速度に及ぼす影響はほとんどないので、扱いやすさを考慮すると、式(54)の表現は十分に実用的であると判断される。

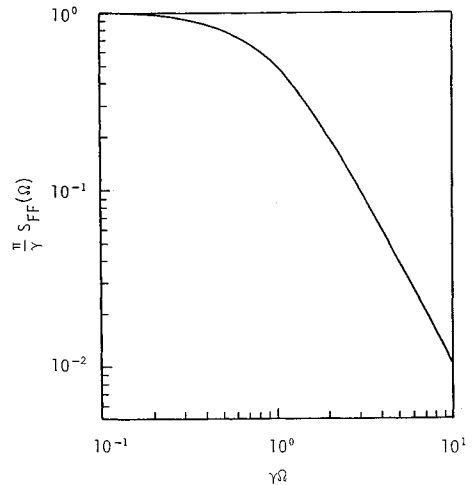


図-2 空間的な自己相関が指数分布となるパワースペクトル密度

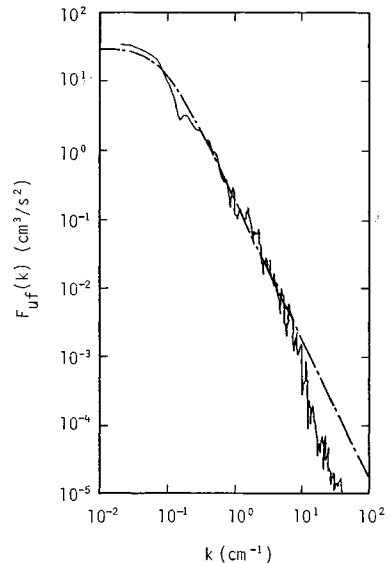


図-3 遠賀川の乱れエネルギースペクトル¹¹⁾とその近似表現の比較

式(54)を式(47)に代入し、積分計算を行うと、粒子の無次元平均沈降速度が、

$$\langle u \rangle = 1 - \frac{1+2\dot{c}+\ddot{c}/2}{2+\dot{c}} \frac{a}{a+\gamma(2+\dot{c})} \left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \dots\dots (56)$$

のように求められる。Ω が -∞ から ∞ 間の式(54)の積分は γ の値に依存せず常に 1 となることから、γ を変化させると乱れ強度を一定に保ちつつ周波数分布のみを変化させることができる。図-2 から明らかなようにエネルギースペクトル密度は γΩ に対して相似分布となるので、γ が小さいほど高周波成分が多く存在することになる。さらに式(56)より、高周波成分が多くなると粒子の沈降速度が小さくなることがわかる。そして、γ→0 の極限で最小値をとる。式(56)の \dot{c} 、 \ddot{c} および a は流体および粒子の性質から決まる量であり、流体の乱れの状態を表わす 2 つのパラメーター β および γ が知られれば、問題は完結する。β、γ は平均水量を用いて理論的に求めることが困難であるので、他の研究者の測定結果を用いてこれを推定する。

まず、鉛直乱れの 2 乗平均値は、富永・江崎¹²⁾の実験値をもとに、平均流速と関連づけて近似的に

$$\sqrt{\langle v_f^2 \rangle} = \beta v_{s0} \approx 0.03 U_f \dots\dots\dots (57)$$

で与える。あるいは、Nezu and Rodi¹³⁾の実験結果も考慮して平均摩擦速度と関連づけると、

$$\sqrt{\langle v_f^2 \rangle} = \beta v_{s0} = (0.7 \sim 0.9) u_* \dots\dots\dots (58)$$

程度となる。ここに、 u_* は底面の平均摩擦速度である。

次に、樺・小松ら¹¹⁾により測定された実河川の乱れエネルギースペクトル密度の分布から A_f を求め、γ を見積る。樺・小松らは Taylor の凍結乱流の仮定を用いて波数空間でのスペクトル $Fu_f(k)$ を求め、one-sided で定義しているので、式(52)の $Eu_f(n)$ との関係は

$$2Eu_f(n)dn = Fu_f(k)dk \dots\dots\dots (59)$$

となる。ここに、 k は波数を表わす。凍結乱流の仮定のもとでは、波数と周波数は

$$k = \frac{2\pi}{U_f} n \dots\dots\dots (60)$$

の関係にある。この関係式を式(59)に代入すると、

$$2Eu_f\left(\frac{U_f}{2\pi}k\right) = \frac{2\pi}{U_f} Fu_f(k) \dots\dots\dots (61)$$

が得られる。樺・小松らにより測定されたエネルギースペクトル密度の分布形は、 A_f を一定とみなした式(53)には従わない。すなわち、式(53)のように表わしたとき、 A_f は波数 k の関数となるが、ここでは式(53)を用いているので A_f の代表値を以下のように見積る。周波数 n が比較的大きな領域では、式(52)は次のように近似される。

$$Eu_f(n) \approx 2 \frac{\langle u_f^2 \rangle A_f}{U_f} \frac{1}{(2\pi(nA_f/U_f))^2} \dots\dots\dots (62)$$

式(61)、(62)より、 A_f は、

$$A_f = \frac{2\langle u_f^2 \rangle}{k^2 Fu_f(k)\pi} \dots\dots\dots (63)$$

となる。また、式(52)、(61)を用いると、 $Eu_f(0)$ と $Fu_f(0)$ の関係は、

$$Fu_f(0) = \frac{U_f}{\pi} Eu_f(0) = \frac{2\langle u_f^2 \rangle A_f}{\pi} \dots\dots\dots (64)$$

となる。式(63)、(64)から $\langle u_f^2 \rangle$ を消去すると、

$$A_f = \sqrt{\frac{Fu_f(0)}{k^2 Fu_f(k)}} \dots\dots\dots (65)$$

が得られる。樺・小松ら¹¹⁾により測定された遠賀川における流下方向乱れエネルギースペクトル密度 $Fu_f(k)$ と波数 k の関係を示した図-3 から $k^2 Fu_f(k)$ を大きめに推定すると(式(56)から明らかなように、γ が小さくなり、粒子の平均沈降速度の低下を大きめに見積る)、

$$k^2 Fu_f(k) \approx 0.2 \text{ cm}^2/\text{s}^2 \dots\dots\dots (66)$$

となる。また、 $Fu_f(0)$ の値は、ほぼ

$$Fu_f(0) \approx 30 \text{ cm}^3/\text{s}^2 \dots\dots\dots (67)$$

である。したがって、式(66)、(67)を式(65)に代入し、

$$A_f \approx 12 \text{ cm} \dots\dots\dots (68)$$

が得られる。図-3 の 1 点鎖線は、 $A_f = 12 \text{ cm}$ とした場合の式(52)を示し、広い領域にわたって実測のスペクトルを表現できることがわかる。

樺・小松らが測定したときの遠賀川の平均流速は $U_f \approx 15 \text{ cm/s}$ 程度であり、このとき、粒径の異なる、比重 2.65 ($a = 1.91$) の砂粒子の平均沈降速度がどのようになるかを、式(55)、(56)、(57)、(68)を用いて計算した結果を表-1 に示す。なお静水中の沈降速度は、式(11)のもととなる C_{D0} と Re_0 の関係式¹⁾を用いて決定した。表-1 からわかるように、この計算条件では平均主流速が小さいので、 $d = 0.015 \sim 0.2 \text{ cm}$ の範囲では粒子の平均沈降速度に及ぼす乱れの影響は、計算の過程でその効果を大きめに見積っているにもかかわらず、きわめて小さく、 10^{-6} 程度のオーダーでしか効かないことがわかる。式(56)から明らかなように、平均沈降速度は $\gamma = 0$ (乱れエネルギースペクトル密度が比較的高波数域まで分布する) のとき最小となるが、これを $\langle u \rangle_{\min}$ で表わした表-1 の計算結果をみると、この場合でさえ、平均沈降速度に及ぼす乱れの影響は、 10^{-3} のオーダー程度しかない。

遠賀川のデータでは、平均流速は $U_f = 15 \text{ cm/s}$ とかなり小さいため、乱れはそれほど大きくなく、粒子の平均沈降速度は静水中の値とほとんど変わらなかったが、ここで、平均流速を仮に $U_f = 200 \text{ cm/s}$ とし、上記と同様の

表一 遠賀川データに対する粒子の平均沈降速度の計算結果
($\rho_s/\rho_f=2.65, U_f=15 \text{ cm/s}, \Lambda_f=12 \text{ cm}$)

d (cm)	R_{∞}	β	γ	$\langle u \rangle$	$\langle u \rangle_{min}$ ($\Lambda_f=0$)
0.015	2.5	0.28	480	$1-6.7 \times 10^{-6}$	$1-1.9 \times 10^{-3}$
0.05	53	0.042	74	$1-2.4 \times 10^{-6}$	$1-1.4 \times 10^{-4}$
0.1	260	0.017	30	$1-1.1 \times 10^{-6}$	$1-3.2 \times 10^{-5}$
0.2	1200	7.7×10^{-3}	14	$1-5.2 \times 10^{-7}$	$1-7.3 \times 10^{-6}$

表二 模擬河川における粒子の平均沈降速度の計算結果
($\rho_s/\rho_f=2.65, U_f=200 \text{ cm/s}, \Lambda_f=12 \text{ cm}$)

d (cm)	R_{∞}	β	γ	$\langle u \rangle$
0.015	2.5	3.7	36	$1-8.8 \times 10^{-2}$
0.05	53	0.56	5.5	$1-4.7 \times 10^{-3}$
0.1	260	0.23	2.3	$1-2.1 \times 10^{-3}$
0.2	1200	0.10	1.0	$1-6.6 \times 10^{-4}$

計算を行ってみる。 Λ_f は渦の代表径を表わすと解釈できるので、平均流速が変わればこれも変化すると考えられる(平均流速が大きいほど Λ_f も大きい)が、遠賀川のデータから得られた $\Lambda_f=12 \text{ cm}$ を用いて、粒子の平均沈降速度の低下を大きめに見積ることにする。計算結果を表一に示す。平均沈降速度の低下を大きめに見積ったにもかかわらず、 $d=0.05, 0.1, 0.2 \text{ cm}$ の場合には乱れの影響はほとんどない。この計算結果から推定すると、 $d < 0.2 \sim 0.3 \text{ mm}$ の砂の沈降速度に乱れの影響が若干現われる程度である。

以上から一般の河川では砂粒子の沈降速度に及ぼす非線形抵抗の効果は小さく、静水中の値を用いて十分代用できることがわかる。

5. 結 論

本研究では自然乱流中の粒子の沈降速度に及ぼす乱れの影響を明らかにするために、粒子の運動方程式を統計手法を用いて解析的に解いた。この結果、同一の乱れ強度であっても乱れエネルギーのスペクトルの分布が高周波域に存在するほど、粒子の平均沈降速度が小さくなることを明らかにした。流体抗力の作用方向が常に上向きであるなどの、粒子の沈降速度の低下を大きめに見積ることになる仮定を導入しているにもかかわらず、遠賀川の乱流データに対して、また模擬河川の水利条件に対して、粒子の平均沈降速度に及ぼす非線形抵抗項の影響は微小であった。今後の課題は乱れの場の非線形性が沈降速度に及ぼす影響を明らかにすることである。

謝 辞：本研究に際し、文部省科学研究費一般研究C(課題番号01550398, 代表：池田駿介)の補助を受けた。記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 池田駿介・山坂昌成・木内国彦・高橋宏樹：鉛直振動を受ける流体中の球の沈降速度，土木学会論文集，第393号/II-9，pp. 57~66，1988.
- 関根正人・吉川秀夫：脈動流中の粒子の沈降特性に関する研究，土木学会論文集，第387号/II-8，pp. 209~218，1987.
- Houghton, G.: The Behaviour of Particles in a Sinusoidal Velocity Field, Proc. Royal Society of London, Vol. A272, pp. 33~43, 1963.
- Corrsin, S. and Lumley, J.: On the Equation of Motion for a Particle in Turbulent Fluid, Applied Scientific Research, A, Vol. 6, pp. 114~116, 1956.
- 中村広昭・池田駿介・大八木崇：正弦振動流中に置かれた球に作用する流体力，第30回海岸工学講演会論文集，pp. 381~384，1983.
- 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，pp. 129~131，1977.
- 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，pp. 40~43，1977.
- 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，pp. 125~126，1977.
- 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，pp. 70~75，1977.
- Hinze, J.O.: Turbulence, Second Edition, McGraw-Hill, pp. 44~68, 1975.
- 椿東一郎・小松利光・柴田敏彦・松本泰司：高 Reynolds 数の流れにおける乱れエネルギーのスペクトル特性，第29回水利講演会論文集，pp. 803~808，1985.
- 富永晃宏・江崎一博：長方形断面水路の三次元乱流構造に関する実験的研究，土木学会論文集，第357号/II-3，pp. 81~88，1985.
- Nezu, I. and Rodi, W.: Open-Channel Flow Measurements with a Laser Doppler Anemometer, J. Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 112, No. 5, pp. 335~355, 1986.

(1989. 11. 15・受付)