

## 変動する掃流力による掃流砂量変動の確率過程論的解析

STOCHASTIC ANALYSIS OF BED-LOAD FLUCTUATION DUE TO  
FLUCTUATING BED SHEAR STRESS

辻本 哲郎\*

By Tetsuro TSUJIMOTO

The study of bed-load fluctuation due to fluctuating bed shear stress is useful to improve the accuracy of bed-load measurements as well as to inspect the bed-load transport model from the aspect of dynamic response of bed-load motion to the fluctuation of bed shear stress. In this paper, by applying the bed-load model constituted by pick-up rate and step length, the characteristics of stochastic response of bed-load transport to fluctuating bed shear stress are clarified and they are represented by spectral relations. Two examples, bed load fluctuation purely brought about by turbulence (without any other irregularities such as sand waves) and that due to wind-generated surface wave are analyzed. The former is compared with the laboratory data of bed-load fluctuation on a flat bed composed of uniform gravels. This study clarifies that the variation coefficient of bed-load discharge becomes maximum near the critical tractive force and decreases against the bed shear stress. The variance of bed-load discharge can be well predicted on a flat bed by this study.

*Keywords*: bed-load transport, gravel bed, fluctuation of bed-load discharge, stochastic hydraulics, spectrum, impulse response, turbulence, wind-generated wave

## 1. ま え が き

掃流砂量は掃流力によって規定されるが、その掃流力は一般にさまざまな要因でさまざまな時間スケールの変動を呈し、それに応答する形で掃流砂量も変動している。たとえば、水流に含まれる乱れによるもの、水面波によるもののほか、河床形状の不規則性によって底面せん断応力の変動がもたらされるし、混合砂礫の場合や河床が分級している場合などにも掃流力の変動がもたらされる<sup>2)</sup>。こうした掃流力の変動によってもたらされる流砂量の変動特性とその機構を明らかにすることは、①掃流砂量測定精度向上に役立つ (Hubbell *et al.*<sup>1)</sup>) ほか、②掃流機構を記述するモデルを動的応答の面から検出できるという点で、さらに③さまざまな様式で掃流力が変動する場合での流砂量予測という点からも有意義であると考えられる。本論文では主として②の観点から、平坦河床上を一方向に流れる均一砂礫の掃流に限定して議論した。

①の観点からすれば、河床形状や粒度分布の効果などが、より振幅が大きくしかも工学的に有用な程度の周期を有する変動をもたらすことから注目されるべきである。

う。しかし、均一粒径の礫を用いた実験水路での掃流砂量変動の実測 (Suszka<sup>3)</sup>) によると、平坦河床であるにもかかわらず有為な変動が現われており、河床形状や混合砂礫の流送における分級がもたらす変動を研究する場合にも、そのベースとなる (平坦河床・均一砂礫の場合) の変動がどの程度かを知っておく必要がある<sup>4)</sup>。

いわゆる dunes で覆われた河床では、流砂量は形式的には dune の進行で受け持たれ、しかも dunes のスケールが不規則なため、dunes の波速や波長で規定されるような流砂量変動が出現するが、これについては Hamamori<sup>5)</sup> が理論的に流砂量変動の確率分布を導いているほか、Hubbell ら<sup>1)</sup> は観測データを多く収集して Hamamori の分布と比較する一方、変動流砂量の確率分布を用いて流砂量の測定精度を向上させるための議論を行っている。

混合砂礫からなる河床の場合、縦断方向あるいは横断

注1) 本論文の基礎的解析の部分と礫床水路実験データとの比較については、第6回国際水理学会アジア太平洋会議 (1988) で発表済み<sup>2)</sup>であるが、本論文ではさらに応用的解析と考察を加え、特に流砂量変動解析の意義を明らかにしている。

注2) これら以外のもっと大きい時間スケールの変動もあるが、それに対しては長時間平均とそれからの分散というより刻々の流砂量の定常近似で扱うことが多いので、ここで取り扱う対象とはしない。

\* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科  
(〒920 金沢市小立野 2-40-20)

方向に交互に生じる分級のため、実測された流砂量には強い変動がみられる。特に縦断方向の交互分級については、それが下流に伝播するため、1点で測定された流砂量は時間的に有意に変動するうえ、粒径別の流砂量の変動は互いに異なる位相をもつ<sup>6)~8)</sup>。池田・伊勢屋<sup>6)</sup>、Kuhnle and Southard<sup>7)</sup> は、実験水路でこうした交互分級と流砂量変動を観察・測定しており、さらに Kuhnle and Southard<sup>7)</sup> はその変動の確率分布あるいは変動係数についての検討を行っている。また辻本<sup>8),9)</sup>はこうした現象を河床表層粒度構成の不安定現象としてその形成機構を説明している。

本論文では、平坦河床における均一砂礫の掃流過程において、変動する底面せん断応力がどのように流砂量変動に反映されるかについて理論的に解析を行い、特にそれのみの効果が出現(卓越)すると考えられる平坦礫床上の定常等流下での流砂量変動の測定結果(Suszka<sup>3)</sup>)と比較して検討を加えた。

2. 掃流過程のモデル

砂礫の掃流輸送についてはいくつかのモデルが提案されている<sup>10)</sup>が、Einsteinのモデル<sup>11)</sup>にそのひな型を求め、非平衡性への適用性を考慮して、中川・辻本<sup>12)</sup>によって発展させられた pick-up rate と step length から構成されるモデルを採用する。なぜなら、pick-up rate は掃流力の変化に鋭敏に応答し、逆に step length は掃流力の変化に対して比較的鈍感という極端な性質を示すからである。すなわち掃流力の変動は pick-up rate に(ほとんど瞬時に応答した)変動をもたらし、step length の分布に関係するフィルター効果を通して流砂量変動を出現させる。なお、中川・辻本によると掃流砂礫の step length の分布は、河床の砂粒スケールの凹凸の分布に強く支配され、乱れの影響は非常に副次的である。

中川・辻本の流砂モデルはもともと掃流運動が個々の砂粒の運動であるため離散的である事実に着目しその特徴を少しでも忠実に表わそうとすることから確率・確率過程の概念を導入して構築されたものであり(たとえば離散的現象である pick-up 事象に対しても pick-up rate を河床からの飛び出し量としての連続量というよりも単位時間当たりの離脱確率密度としてのそれであるという解釈に立ってモデル化している)、他の流砂モデルに比べると、離散的現象としての流砂特性を合理的に記述しているとはいえ、モデルである以上完全とはいえない点には注意を払うべきである。

変動する pick-up rate  $p_s(x, t)$  に対する流砂量の変動  $q_B(x, t)$  は、中川・辻本<sup>12)</sup>の非平衡流砂量式により次のように書ける。

$$q_B(x, t) = \frac{A_2 d}{A_1} \int_0^\infty p_s(x - \xi) \int_0^\infty f_X(\zeta) d\zeta d\xi \dots\dots (1)$$

ただし、 $A_2, A_3$ ：砂礫の形状係数、 $f_X(\xi)$ ：step length の確率密度関数であり、1 step 間の moving period は無視した。

pick-up rate と掃流力の関係は、中川・辻本<sup>12)</sup>によって次のように定式化されている。

$$p_{s*} = p_s \sqrt{\frac{d}{(\sigma/\rho - 1)g}} = F_0 \tau_* \left(1 - \frac{k_2 \tau_{*c}}{\tau_*}\right)^m \dots\dots (2)$$

ここに、 $\tau_* \equiv u_*^2 / [(\sigma/\rho - 1)gd]$ 、 $u_*$ ：摩擦速度、 $\sigma$ ：砂礫の密度、 $\rho$ ：水の密度、 $d$ ：粒径、 $g$ ：重力加速度、 $\tau_{*c}$ ：無次元限界掃流力であり、実験定数  $F_0, k_2, m$  は砂に対して次のように決められている。 $F_0 = 0.03, k_2 = 0.7, m = 3$ 。

step length の分布は平坦河床では指数分布していることが実験的にも確認<sup>12)</sup>されており、

$$f_X(\xi) = (1/\Lambda) \exp(-\xi/\Lambda) \dots\dots (3)$$

ただし、 $\Lambda$  は平均 step length で粒径の 80 から 250 倍程度であり、pick-up rate に比べると掃流力の変化に対する変化は小さい。粒径で無次元化された平均 step length ( $\lambda \equiv \Lambda/d$ ) と掃流力の関係は、掃流粒子の運動方程式に基づいた方法では適切な式が導かれていないが、非平衡状態への適用にあたっては、平衡状態の流砂量 ( $q_{Be}$ ) と掃流力の関係はより巨視的なアプローチで決定されるはずとし、実際には既存の平衡状態に対する流砂量公式を用いて、次式によって逆算的に知られることが利用されることもある<sup>10)</sup>。

$$\lambda = A_2 q_{Be*} / (A_3 p_{s*}) \dots\dots (4)$$

ここに、 $q_{Be*} \equiv q_{Be} / \sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd^3}$  で  $\tau_*$  の関数である。

3. 掃流力の変動に伴う流砂量変動

いま底面せん断応力  $\tau$  の変動を次式のように表わす。

$$\tau(x, t) / \tau_0 = 1 + \psi_\tau(x, t) \dots\dots (5)$$

ここに、 $\tau_0$  は平均底面せん断応力である。

底面せん断応力の変動がその平均値に比べて微少なとき、これに追随する pick-up rate の変動は線形近似で次のように書ける<sup>13)</sup>。

$$p_s(x, t) / p_{s0} = 1 + \psi_{pr}(x, t) = 1 + r_{pr} \psi_\tau(x, t) \dots\dots (6)$$

ここに、 $r_{pr}$  は pick-up rate と底面せん断応力の関係から、

$$r_{pr} = (dp_{s*} / d\tau_*)_0 (\tau_{*0} / p_{s*0}) \dots\dots (7)$$

で与えられるが、式(2)を用いるならば次式が得られる。

注3) 底面せん断応力の変動が微少でも、pick-up rate の変動は式(8)で与えられる  $r_{pr}$  だけ倍加されるから、底面せん断応力の変動が相対的に大きく底面せん断応力が限界掃流力に近い場合では、厳密に定量的には以下の線形解析の成立は苦しい。

$$r_{pr} = (\eta + 2k_2) / (\eta - k_2) \dots \dots \dots (8)$$

ここに、 $\eta \equiv \tau_{*0} / \tau_{*c}$ である。また添え字 0 は非擾乱値を示す。

式(6)のように変動する pick-up rate に応答した流砂量の変動は、式(1)を適用して次のような畳み込み積分で書ける。

$$\psi_b(x, t) = r_{pr} \int_0^\infty \psi_\tau(x - \xi, t) g_R(\xi) d\xi \dots \dots \dots (9)$$

ただし、 $\psi_b(x, t)$ は、平均値で規準化した掃流砂量の変動成分 ( $q_b(x, t) / q_{b0} - 1$ )、 $g_R(\xi)$ は次式で与えられるもので  $\psi_\tau$ を入力とし  $\psi_b$ を出力とするシステムのインパルス応答といえる<sup>注4)</sup>。

$$g_R(\xi) = \frac{1}{\Lambda} \int f_R(\xi) d\xi \dots \dots \dots (10)$$

式(9)をフーリエ変換すると、

$$\Psi_B(x) | t = r_{pr} G_R(x) \Psi_\tau(x) \dots \dots \dots (11)$$

であり、ただし、

$$\Psi_B(x) \equiv \mathcal{F}[\psi_b(x)]; \quad \Psi_\tau(x) \equiv \mathcal{F}[\psi_\tau(x)] \dots \dots \dots (12 \cdot a)$$

$$G_R(x) \equiv \mathcal{F}[g_R(\xi)] \dots \dots \dots (12 \cdot b)$$

である。 $\mathcal{F}[\cdot]$ はフーリエ変換を表わし、 $x$ は角波数である。

スペクトルの定義により、流砂量変動の波数スペクトル密度関数  $S_B(x)$  は次の演算で求められる。

$$S_B(x) = \overline{\Psi_B(x) \cdot \Psi_B^*(x)} \dots \dots \dots (13)$$

ここで、 $Z^*$ は  $Z$  の共役複素数を表わし、 $\overline{Z \cdot Z^*}$ は  $Z$  と  $Z^*$  の積のアンサンブル平均を表わす。式(11)を用いると、次のように、流砂量変動のスペクトル ( $S_B(x)$ ) と掃流力の変動のスペクトル ( $S_\tau(x)$ ) を関係づけることができる。

$$S_B(x) = r_{pr}^2 \overline{G_R(x) \cdot G_R^*(x)} \cdot S_\tau(x) \dots \dots \dots (14)$$

ところで、step length が平均値  $\Lambda$  の指数分布に従う場合、 $G_R(x)$  は、

$$G_R(x) = \int_0^\infty g_R(\xi) \exp(-ix\xi) d\xi = \frac{1}{1+(x\Lambda)^2} - \frac{ix\Lambda}{1+(x\Lambda)^2} \dots \dots \dots (15)$$

のようになり、掃流力変動のスペクトルと流砂量の変動のスペクトルとの関係は次のようになる。

$$S_B(x) = \frac{r_{pr}^2}{(1+x\Lambda)^2} S_\tau(x) \dots \dots \dots (16)$$

このようにスペクトルが求められると、その積分によって変動の分散が知られるし、また上式が示すように流砂量のスペクトル性状は、流砂量変動を卓越的に支配する掃流力変動に規制されるから、たとえば実測された流砂

注4) ここでは、時間についての「緩和」は考えていない。もともと掃流砂の 1 step に要する時間を無視したためである。moving period より小さい時間スケールの現象では、凍結乱流のように変動が一定速度で移流されているとみなしている。

量変動のスペクトルから変動要因を類推することが可能である。

#### 4. 水流の乱れに起因する流砂量変動

水流に乱れが存在することから、底面せん断応力、すなわち掃流力にも変動が含まれる。しかし乱れに起因する底面せん断応力の変動特性については、必ずしもスペクトル性状までは明らかとはなっていない。そこで次のように簡単にモデル化する。すなわち、底面せん断応力の変動の標準偏差 (平均値で規準化した  $\psi_\tau$  を考えているのでむしろ変動係数とよぶべきもの) を  $\alpha_\tau$  とし、自己空間相関係数  $R_\tau(\xi)$  が緩和距離を  $1/x_0$  とする指数型モデルで表わされるとすると、

$$R_\tau(\xi) = \alpha_\tau^2 \exp(-x_0\xi) \dots \dots \dots (17)$$

であり、そのフーリエ変換として次のように掃流力変動 ( $\psi_\tau(x, t)$ ) の空間スペクトルを定式化できる。

$$S_\tau(x) = \frac{2\alpha_\tau^2}{\pi} \frac{x_0}{x+x_0^2} \dots \dots \dots (18)$$

赤津<sup>13)</sup>の水面変動や底面圧力変動のスペクトルについての実測結果と比較して、上式は悪い近似ではないものと推測される。ところで、緩和距離は水流の乱れのオイラー的長さスケール  $L_E$  に匹敵するものと類推され、次のように仮定した。

$$x_0 = 2\pi/L_E \dots \dots \dots (19)$$

式(18)を式(16)に代入して得られる流砂量変動 (ただし規準化されたもの、すなわち  $\psi_b(x, t)$ ) の波数スペクトル密度関数は次のとおりである。

$$S_B(x) = \frac{2\alpha_\tau^2 r_{pr}^2}{\pi} \frac{x_\lambda^2 x_0}{(x+x_\lambda^2)(x^2+x_0^2)} \dots \dots \dots (20)$$

ただし、 $x_\lambda \equiv 1/\Lambda$  である。上式は、流砂量変動の波数スペクトルは高波数領域で (ただし流砂量変動として有意義な範囲内で) 波数の-4乗に比例して逓減すること、すなわち仮定した底面せん断応力の変動のスペクトル (高波数領域で波数の-2乗に比例) に比べて急激に逓減することを示す<sup>注5)</sup>。

スペクトルを全波数領域にわたって積分することから、次のように流砂量変動 ( $\psi_b$ ) の分散  $\alpha_b^2$  と、底面せん断応力 ( $\psi_\tau$ ) のそれ  $\alpha_\tau^2$  を関係づけることができる。

$$\alpha_b^2 = \int_0^\infty S_B(x) dx = \frac{r_{pr}^2 x_\lambda}{x_\lambda + x_0} \alpha_\tau^2 \dots \dots \dots (21)$$

あるいは、次のように流砂量変動 ( $\psi_b$ ) の標準偏差 (変動係数) と底面せん断応力 ( $\psi_\tau$ ) の変動のその比を求めることができる。

注5) 高波数領域のスペクトル逓減のべき乗を示したが、このようにべき乗が一定になるような高波数領域まで物理的に有意義であるとは必ずしもいえず、ここではその比較によってより低波数領域を含むスペクトルの形の相違に言及したものである。

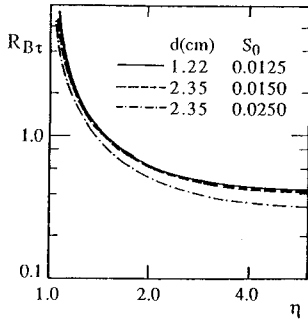


Fig. 1 Relation between  $R_{Br}$  and  $\eta \equiv \tau_* / \tau_{*c}$ .

$$R_{Br} \equiv \alpha_B / \alpha_\tau = r_{p\tau} / \sqrt{1 + \kappa_0 \Lambda} \dots\dots\dots (22)$$

$r_{p\tau}$  は式 (8) で与えられ、 $\eta$  の関数である。また、 $\Lambda = 100 d^{10,111}$ 、 $L_E = 1.5 h^{13}$  ( $h$ : 水深) として計算された  $R_{Br}$  と  $\eta$  との関係を図. 1 に示した。ただし、 $h/d = \eta \tau_{*c} (\sigma/\rho - 1) / S_0$  ( $S_0$ : 路床勾配) の関係を用いた。

Fig. 1 では  $R_{Br}$  が  $\eta$  の減少関数であることが示されている。 $\kappa_0 \Lambda$  は  $h/d$  の関数であり、あるいはそれゆえ  $R_{Br} \sim \eta$  関係は粒径と路床勾配をパラメーターとするが、礫床に限ると Fig. 1 に示すようにその影響は大きくない。

ところで、流砂量の変動は単に空間的なものでなく、それが進行する形で時間変動としても出現する。実際、1点で測定される流砂量の変動はむしろ時間的変動として記録される。その特性は周波数スペクトルで代表される。波数スペクトル ( $S_B(x)$ ) から周波数スペクトル ( $S_{Bf}(\omega)$ ) への変換は次式で実行される。

$$S_B(x) dx = S_{Bf}(\omega) d\omega \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $\omega$  は角周波数である。

変動の伝播速度 ( $c$ ) は位相速度  $dx/d\omega$  と同一視される。水流の乱れがその平均速度で移流されるとすると  $c$  は  $x$  に独立であるから、式 (20)、(23) より、次の周波数スペクトル密度関数を導くことができる。

$$S_{Bf}(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha_\tau^2 r_{p\tau}^2 \kappa_\lambda^2 \kappa_0 c^3}{[\omega^2 + (c\kappa_\lambda)^2][\omega^2 + (c\kappa_0)^2]} \dots\dots\dots (24)$$

このスペクトルは高周波数領域で  $\omega$  の-4 乗に比例して遞減する性状を示す。

もし変動が河床波のように波数に比例した位相速度をもつ場合は、 $c = \beta x$  において、波数スペクトルが同じであっても次のように異なる性状の周波数スペクトル密度関数が導かれる。

$$S_{Bf}(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha_\tau^2 r_{p\tau}^2 \kappa_\lambda^2 \kappa_0 \sqrt{\beta}}{(\omega + \beta \kappa_\lambda)^2 (\omega + \beta \kappa_0)} \dots\dots\dots (25)$$

すなわち、この場合周波数スペクトルは高周波数領域で  $\omega$  の-2 乗に比例した (式 (24) よりも緩やかな) 遞減性状を示す。このことが、河床波に覆われた河床での流砂量変動の周波数スペクトルの方が、平坦河床のそれよりも緩やかなプロフィールを示す一因であると推測され

る。

### 5. 風による水面波の影響についての考察

海岸域では掃流力の変動とそれに伴う砂の挙動は複雑で本論文のモデルが必ずしも適用できないが、Fig. 2 に示すように一方向流れに同一方向の微小な水面波が重畳した簡単な場合について本モデルの適用を図ってみる。これは本論文のフレームワークが特に不規則性のからむ現象への適用に有意義であることを例示するものである (海岸域の漂砂のように波によって砂移動の向きを変えるような現象までは含めない)。また、風波の影響は通常の乱れのそれよりもずっと低周波の現象であると考へ、この節では乱れの影響は無視する。

Fig. 2 に示すような水面波による水深の変動を、

$$h(x, t) / h_0 = 1 + \phi_h(x, t) \dots\dots\dots (26)$$

と書く。ただし  $h_0$  は非擾乱水深とする。水面波は微小振幅波とし、次の分散関係が成立するものとする。

$$\omega^2 = g x \tanh x h_0 \dots\dots\dots (27)$$

すなわち、波速  $c (= \omega/x)$  は次のように表わされる。

$$c / U_0 = \sqrt{\tanh x h_0 / (Fr_0 x h_0)} \dots\dots\dots (28)$$

ただし、 $U_0$ : 一様流の断面平均流速、 $Fr_0 \equiv U_0 / \sqrt{g h_0}$  である。

この波のオイラー的速度の  $x$  成分  $u_w(x, y, t)$  が一様流れに流速変動として付加されるものと考えられる。 $\phi_h$  が振幅  $a_*$  ( $= H / (2 h_0)$ ,  $H$ : 波高) の正弦波で表わされるとすると、

$$u_w(x, y, t) = \frac{\pi c H}{L} \frac{\cosh xy}{\sinh x h_0} \sin(x x - \omega t) \dots\dots\dots (29)$$

である。簡単のため断面平均流速に着目してその変動を考慮し、それを、

$$U(x, t) = U_0 [1 + r_u \phi_h(x, t)] \dots\dots\dots (30)$$

と書くと、

$$r_u = \sqrt{x h_0 \tanh x h_0} / Fr_0 \dots\dots\dots (31)$$

である。さらに、近似的に Manning-Strickler 式を用いて断面平均流速と掃流力を関係づけると、

$$\phi_r(x, t) = r_\tau \phi_h(x, t) \dots\dots\dots (32)$$

$$r_\tau = 2 a_* (\sqrt{x h_0 \tanh x h_0} / Fr_0 - 1/6) \dots\dots\dots (33)$$

となる。

式 (31) に 3. の考え方を適用して、この場合の掃流

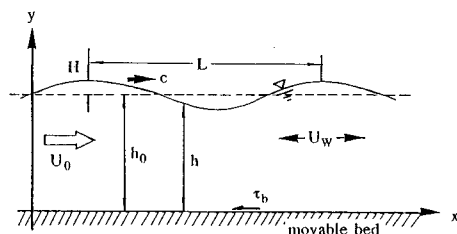


Fig. 2 Unidirectional flow and superimposed surface wave.

力変動のスペクトル ( $S_\tau(x)$ ) を、水面変動のスペクトル ( $S(x)$ ) から次のように知ることができる。

$$S_\tau(x) = r_s^2 \cdot S(x) \dots \dots \dots (34)$$

風波のスペクトルについてはいくつかのモデルが提案されているが、ここでは次の光易<sup>14)</sup>の式を採用する。

$$S_f(\omega) = AH_{s*}^2 T_s \omega_s^{-5} \exp(-\beta \omega_s^4) \dots \dots \dots (35)$$

ここで、 $S_f(\omega)$ : 風波の周波数スペクトル、 $T$ : 周期、 $\omega_s \equiv \omega/\omega_s$ ,  $H_s \equiv H/h_0$ , 添字  $s$  は有義波高の波についての値を示し、また、実験定数については、 $A=0.258$ ,  $B=1.03$  と決められている。このスペクトルモデルは高周波数領域で  $\omega$  の-5乗に比例した遞減性状を示し、Phillips<sup>15)</sup>による平衡領域でのスペクトルの相似性状についての指摘と合致している。

式 (27) の分散関係を深水波近似して ( $xh_0 \rightarrow \infty$ ) 用いて、式 (35) を波数スペクトルに変換すると、

$$S(x) = (AH_{s*}^2 L_s/2) x_*^{-3} \exp(-Bx_*^2) \dots \dots \dots (36)$$

ただし、 $x_* = x/x_0$ ,  $L$ : 波長である。結局、このときの流砂量変動の波数スペクトルは次のように求められる。

$$S_b(x) = \frac{2 AH_{s*}^2 L_s r_{pr}^2}{F r_0^2 (\Lambda/h)} x_*^{-4} \cdot D_1(x_*) \dots \dots \dots (37)$$

$$D_1(x_*) \equiv [1 + [1/(x_s \Lambda)] x_*^{-1}]^2 \exp(-Bx_*^2) \dots \dots \dots (38)$$

高波数領域において、風波のスペクトルは  $x$  の-3乗に比例した、流砂量変動のそれは  $x$  の-4乗に比例した遞減性状を示す<sup>26)</sup>。

さらに式 (37) の波数スペクトルを周波数スペクトルに変換して次式が得られる。

$$S_{br}(\omega) = \frac{4 AH_{s*}^2 L_s r_{pr}^2}{F r_0^2 (\Lambda/h)} \omega_*^{-7} \cdot D_2(\omega_*) \dots \dots \dots (39)$$

$$D_2(\omega_*) \equiv [1 + [g/(\omega_s^2 \Lambda) \omega_*^{-1}]^2] \exp(-B\omega_*^2) \dots \dots \dots (40)$$

高周波数領域では、風波のスペクトルが  $\omega$  の-5乗に比例して遞減するのに対し、流砂量変動のそれは-7乗とより急激な遞減を呈す<sup>26)</sup>。

4. と同様に、スペクトルの積分によって流砂量変動の標準偏差と風波による水面変動のそれを関係づけることができる(が式 (37) または (39) の定積分は容易ではない)。

6. 平坦礫床上の掃流砂量の変動

Graf and Suszka<sup>16),17)</sup>は急勾配の礫床水路での鋭いハイドログラフに対する非定常流砂量特性の研究のため、実験水路で掃流砂量の時間的変動を連続的に計測する装置を工夫した。これは幅 0.6 m, 長さ 17 m の可変勾配水路で、下流端近くのトラップに金網製バスケットを吊り下げて掃流砂の累積重量を吊り下げワイヤに貼付けら

れたストレインゲージを用いて連続的に記録できるものである(詳細については文献3)または18)参照)。非定常流れに対する実験に先立って、定常等流下での実験が繰り返され、その中で掃流砂量の変動特性についてのデータも得られ、簡単な考察が加えられている<sup>3)</sup>。用いられた河床材料は、 $d=12.2$  mm と 23.5 mm の2種類の礫で、水理条件の範囲は Table 1 に示される。定常等流下での実験は、河床形態の影響を避け、平坦河床の条件でなされている。一般に礫床では dunes などの河床波は形成されにくい(あるいは顕著な発達に至りにくい)、また発達に時間がかかるが、この実験では平坦にされた河床に通水後、10分程度以内に実験を終えている。こうした条件を確保するためにも実施された実験の無次元掃流力の範囲は Table 1 に示すように限界掃流力付近に限られている。実際ここで実施された以上の掃流力の条件ではむしろ河床形態の影響が卓越し、これらと比較しようとする4.の解析対象とは異なる。

ところで動ひずみ計からの出力信号には高周波雑音が含まれており、その除去のため移動平均によって平滑化し、標準偏差、スペクトル形状が安定する時系列を得た

Table 1 Experimental conditions.

Series	d(mm)	$S_0$	h (cm)	$\tau_*$
FA	12.2	0.0125	7.6-13.7	0.045-0.082
FX	23.5	0.0150	15.1-21.0	0.051-0.069
FZ	23.5	0.0250	9.4-12.9	0.055-0.074

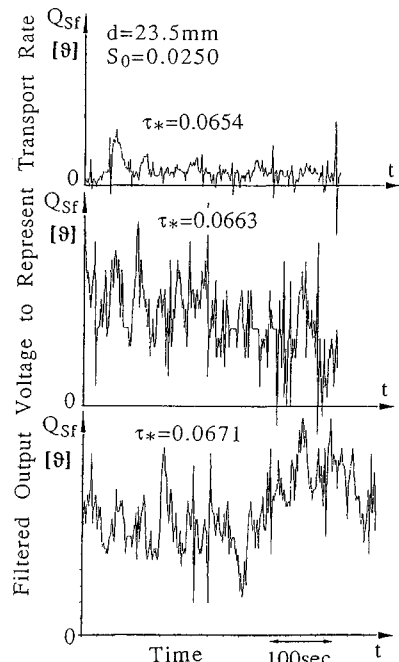


Fig. 3 Examples of fluctuation of bed-load discharge (time series obtained from measuring device).

注6) スペクトルの形の比較のためべき乗が一定になるような高周波数領域に言及しているが、現象がこのような高周波領域であるというものではない。

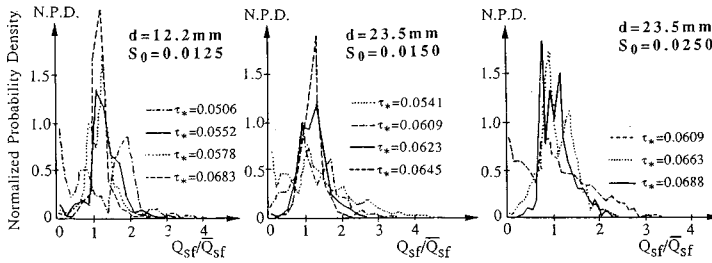


Fig.4 Normalized histogram of bed-load fluctuation.

(最終的に1~3秒程度の平均化がされた)。この時系列 ( $Q_{sf}$ , Fig. 3 にいくつかの例を示す) を掃流砂量変動に較正して (線形の較正曲線が得られている<sup>3)</sup>), 以下の検討に用いた。

Fig. 4 は平均値で規準化した流砂量変動 ( $\xi \equiv Q_{sf}/\bar{Q}_{sf}$ ) のヒストグラムの例であるが, Fig. 5 のような累積確率表示するとその特徴がよりわかりやすい。すなわち, 掃流力とともに変動程度が小さくなる。言い換えれば, 流砂量変動の変動係数 ( $\alpha_B$ ) は移動限界で最大値をとり, 掃流力の増加とともに減少する。このことが Fig. 6 に示されている。

同じ径の礫では路床勾配に対し無次元限界掃流力が増加する傾向にあるなど一定でないため<sup>13)</sup>, 掃流力をおのおのの河床材料, 河床勾配に対する限界掃流力で規格化して掃流力を表現すれば ( $\eta \equiv \tau_*/\tau_{*c}$ ) 変動係数 ( $\alpha_B$ ) の変化はほぼ普遍表示されることが期待され (実際には相対水深がもう1つのパラメーターに, あるいはより具体的には掃流砂礫の粒径と勾配がパラメーターとなるが,

ここで対象としている条件の範囲内で相対水深の効果は小さい), 実際 Fig. 7 のようなまとまりを示す。もし, 掃流力, すなわち底面せん断応力の変動係数 ( $\alpha_\tau$ ) が一定値をとるなら,  $\alpha_B$  は  $R_B$  と比例し, 実験結果として得られた  $\alpha_B$  と  $\eta$  の関係は 4. の結果 (Fig. 1) と定性的に一致するはずである。

Fig. 8 は理論的に得られた  $R_{B\tau}$  と実験的に得られた  $\alpha_B$  の関係を示すもので, おおむね比例しているとみせよう。図中の実線は,

$$\alpha_\tau = 0.4 \dots \dots \dots (41)$$

を仮定したもので, 実験値をよく表わしているといえよう。なおこの値は, 河床材料粒子の初期移動, 特に

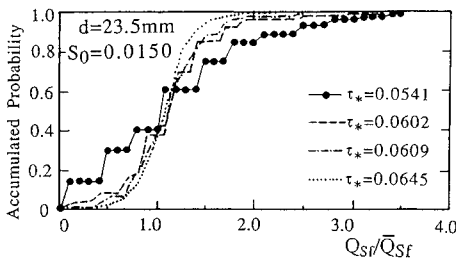


Fig. 5 Accumulated probability representation of fluctuation of bed-load discharge.

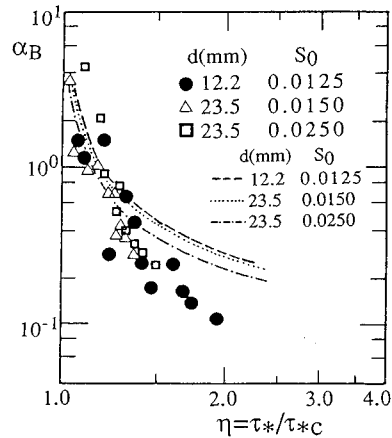


Fig. 7 Relation between variation coefficient of bed-load discharge and dimensionless bed shear stress ( $\eta \equiv \tau_*/\tau_{*c}$ ).

(a)  $d=12.2\text{mm}$ ,  $S_0=0.0125$  (b)  $d=23.5\text{mm}$ ,  $S_0=0.0150$  (c)  $d=23.5\text{mm}$ ,  $S_0=0.0250$

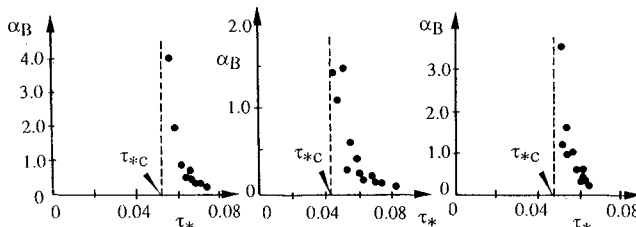


Fig. 6 Relation between variation coefficient of bed-load discharge and dimensionless bed shear stress ( $\tau_*$ ).

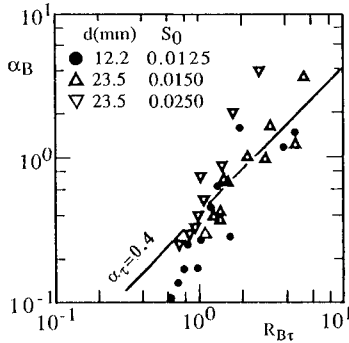


Fig. 8 Relation between measured variation coefficient of bed-load discharge and calculated value of  $R_{B\tau}$ .

pick-up rate を評価するにあたって、底面圧力変動や底面近傍の流速変動の実験結果から類推された底面せん断応力の変動係数<sup>10)</sup>とほぼ一致しており、妥当な評価といえる。

Fig. 7 に示された実験的に得られた  $\alpha_B$  と  $\eta$  の関係に併示した曲線群は、 $\alpha_\tau=0.4$  を仮定して得られた理論的結果を示し、実験結果と良く対応している。詳細にみると、 $\alpha_B$  を、 $R_B$  の大きいとき、すなわち限界掃流力付近では 0.4 よりやや大きく、掃流力の大きいところではやや小さく評価すると、実験結果と理論の適合が良くなる。

とにかく、理論的にも実験的にも、平坦河床で、純粋に水流の乱れによる底面せん断応力の変動に起因する流砂量変動の変動係数は、移動限界時に最大値 (5.0 程度

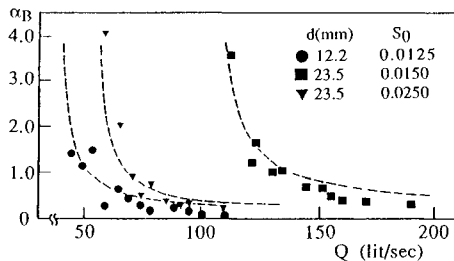


Fig. 9 Relation between variation coefficient of bed-load discharge and water discharge.

以上) をとり、掃流力の増加とともに減少し、限界掃流力の 2~3 倍程度の掃流力にでもなれば 0.1 程度にまで小さくなることが明らかにされた。

従来、掃流砂量の変動強度については定量的な検討は少なく、確率分布関数を与えた Hamamori<sup>5)</sup> の理論との比較がされることが多い。

$$g(\zeta) = (1/4) \ln(4/\zeta) \quad (0 \leq \zeta \leq 4) \dots\dots\dots (42)$$

ここに、 $g(\zeta)$  は平均値で標準化された流砂量変動の確率密度関数である。この分布は次のように定まった変動係数を有し、ここで論じたように変動係数が変化する変動には当てはめられないことは明らかである (ここで用いたデータを得た Suszka<sup>3)</sup> も不適合を指摘している)。

$$\alpha_B = \sqrt{\int_0^4 \left( \zeta^2 \cdot \frac{1}{4} \ln \frac{4}{\zeta} \right) d\zeta - 1} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0.882 \dots\dots\dots (43)$$

1. でも述べたように、Hamamori の式は dunes で覆われた河床を対象としており、dunes 河床では流砂が dunes の進行によって受け持たれ、それゆえ流砂量変動はある特定の統計的性質を有する dunes の形状の不規則性に支配され (たとえば dunes の波長の変動係数は水理条件にかかわらずほぼ一定値 0.35~0.5 を示す<sup>19)</sup>)、このように一定の変動係数をもつ確率分布に従うものと判断される。

実際には、掃流力が増してくると河床波が形成される場合が多く、変動係数の大きさからみて、純粋に乱れによるものから河床波に起因するものへと変動要因が移り変わってゆくことがわかる。1. で述べたように、そのほか、混合砂礫の場合交互分級の効果が卓越してくることも考えられる。流砂量変動の確率分布は式 (42) にこだわらず、変動要因に応じて変動係数を評価してガンマ分布などを適合させるのが適当と考えられる。いずれにせよ、流砂量変動に占める、純粋に乱れによる底面せん断応力の変動の貢献が評価された。

なお、Fig. 9 は流砂量の変動係数と流量 (Q) の関係をプロットした Suszka の原図<sup>3)</sup> に、今回の理論から計算された曲線を比較したもので、平坦河床での流砂量変動が本モデルでうまく予測できることがわかる。

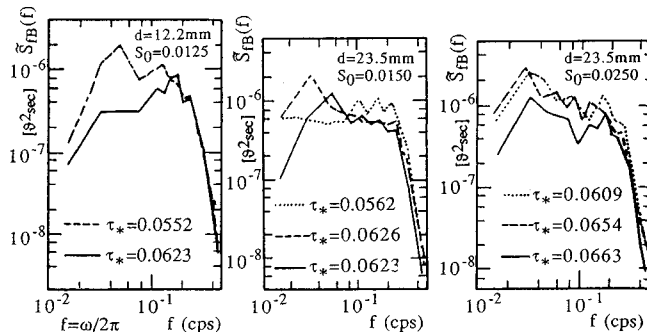


Fig. 10 Frequency spectra of bed-load fluctuation on flat bed composed of uniform gravels.

また、Fig. 10には、実測された流砂量変動の周波数スペクトルの例を示した。なお Fig. 10は、校正前の量(単位 $\vartheta$ )に対するスペクトル密度( $\tilde{S}_{Rb}(f)$ ; 単位 $\vartheta^2/s$ )であり、4.の理論スペクトルとの詳細な定量的比較は行っていないが、高周波領域での減衰特性、相似性などは理論的に予測されたものと比較的良く一致している。

## 7. あとがき

本論文では pick-up rate と step length から構成される掃流砂モデルを用いて、変動する掃流力に対する流砂量の確率応答の変動について検討した。平坦河床で評価された step length の分布形に基づいたモデルであるという制約から、具体的には、平坦河床で、水流の乱れによる底面せん断応力の変動と、一樣流れと同方向の風波がもたらす底面せん断応力の変動を想定した。前者は河床波の存在しにくい礫床水路での掃流砂量変動についての実験結果との比較に重点をおき、後者は素過程の変動のスペクトルと流砂量変動のスペクトルを関連させる確率過程論的解析の格好の素材としてとりあげた。

流砂量が、掃流力と一対一に対応づけられる pick-up rate と、step length と関係づけて決定されるインパルス応答の畳み込み積分で表わされる性質を利用すると、フーリエ変換を用いて容易に底面せん断応力のスペクトルと流砂量変動のそれが関係づけられるという確率過程論的手法を利用した。

乱れによる底面せん断応力の変動をオイラスケールを利用した指数型自己相関モデルを用いて表現し、流砂量変動のスペクトル特性を導き、その積分によって、流砂量変動の変動係数と底面せん断応力のそれとの比が、掃流力の減少関数で表わされることを明らかにした。

一方、一樣流に風波が重畳している場合については、風波のスペクトル形状に対してどのような流砂量変動のスペクトルが出現するかを、解析的に論じた。

礫床では、河床波が出現しにくいことから、ローザンヌ工科大学で測定された平坦礫床水路での流砂量変動に対して、本モデルでの解析結果との比較を行った。その結果、乱れによる底面せん断応力の変動係数に従来から推定されている値を仮定して、流砂量変動の変動係数が精度良く予測できることがわかった。純粋に乱れの効果による流砂量の変動係数は、移動限界において5.0以上の最大値をとるが、掃流力の増加とともに減少し、限界掃流力の2~3倍程度では0.1程度にまで減じる。実際にはこの程度の掃流力から河床波の影響が支配的となり、従来の研究成果を考慮すると0.8から0.9程度の一定の変動係数を示すことになるものと推測される。

流砂量の変動にはさまざまな要因が考えられ、今後それらについての検討も進めたいが、ベースとして本来の

掃流砂現象そのものに含まれる変動程度を推定できた点に本研究の意義があると考えられる。また、流砂量変動の予測がどのように流砂量計測の精度向上、あるいはその他の工学的問題に生かされるかについても今後検討を進めたい。

なお、本研究の主たる部分は著者がローザンヌ工科大学に滞在中(1987年度)に行ったもので、本研究テーマに著者を導き、その機会を与えて頂いたW.H. Graf教授に深甚の謝意を表わす。また、実験データを提供、計測・データ処理について細部にわたり教示頂き、さらに追実験に協力頂いたL. Suszka氏(現在ポーランド科学アカデミー研究員)にも感謝の意を表わす。

## 参考文献

- 1) Hubbell, D.W., Stevens, Jr., H.H., Skinner, J.V. and Beverage, J.P.: New approach to calibrating bed load samplers, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.111, No.4, pp.677~694, 1985.
- 2) Tsujimoto, T.: Fluctuation of bed load transport rate on steep gravel beds, *Proc. 6th Congress, APD-IAHR*, Kyoto, Japan, Vol. II, pp.7~14, 1988.
- 3) Suszka, L.: Sediment transport at steady and unsteady flow; A laboratory study, Thesis for Dr. Technical Science, No.704, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1987.
- 4) Parker, G.: Personal communication, 1987.
- 5) Hamamori, A.: A theoretical investigation on the fluctuation of bedload transport, Report R4, Delft Hydraulics Laboratory, 14 p., 1962.
- 6) 池田 宏・伊勢屋ふじこ: 混合砂礫の流送に伴う縦断分級, 第30回水理講演会論文集, pp.217~222, 1986.
- 7) Kuhnle, R. and Southard, J.: Bed load transport fluctuations in gravel bed laboratory channel, *Water Resources Research*, Vol.24, No.2, pp.247~260, 1988.
- 8) 辻本哲郎・本橋 健: 混合砂礫床における縦断方向の交互分級の形成とその卓越波長, 第33回水理講演会論文集, pp.409~414, 1989.
- 9) 辻本哲郎・2次流による分級縦筋の形成, 第33回水理講演会論文集, pp.403~408, 1989.
- 10) 中川博次・辻本哲郎: 移動床流れの水理, 土木学会新体系土木工学23, 技報堂出版, 310 p., 1986.
- 11) Einstein, H.A.: Formulas for the transportation of bed load, *Trans. ASCE*, Paper No.2140, pp.561~597, 1942.
- 12) Nakagawa, H. and Tsujimoto, T.: Sand bed instability due to bed load motion, *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol.106, HY12, pp.2029~2051, 1980.
- 13) 柗津家久: 開水路流の乱流構造に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 118 p., 1977.
- 14) 光易 恒: 風波のスペクトルの発達(2), 第17回海岸工学講演会論文集, pp.1~7, 1970.
- 15) Phillips, O.M.: The equilibrium range in the spectrum



- of wind-generated waves, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 4, No. 4, pp. 426~434, 1958.
- 16) Graf, W.H. and Suszka, L. : Unsteady flow and its effect on sediment transport, *Proc. 21st Congress of IAHR, Melbourne, Australia*, Vol. 3, pp. 539~544, 1985.
- 17) Suszka, L. and Graf, W.H. : Sediment transport in steep channels at unsteady flow, *Proc. of 22nd Congress of IAHR, Lausanne, Switzerland, Fluvial Hydraulics*, pp. 166~170, 1987.
- 18) Graf, W.H. and Suszka, L. : Sediment transport in steep channels, *Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, JSCE*, Vol. 5, No. 1, pp. 11~26, 1987.
- 19) 中川博次・辻本哲郎：河床波の統計モデルに関する研究, *土木学会論文報告集*, 第 290 号, pp. 79~87, 1979.  
(1989. 6. 30・受付)
-