

# DIM型の連行現象に関する理論的研究

## THEORETICAL STUDY ON THE DIM TYPE ENTRAINMENT

石川 忠晴\*・田中 昌宏\*\*

By *Tadaharu ISHIKAWA and Masahiro TANAKA*

A theoretical model is presented that describes deepening of a surface mixed layer under the action of wind. The model is an extension of DIM (Dynamic Instability Model) which is applicable for the situation where turbulence produced by wind-induced shear flow rather than water stirring by wind itself controls the entrainment process. Comparative considerations of existing results lead to an idea that the meanings of self-similarity must be followed up for a reasonable modeling. Present study therefore adopts some assumptions on self-similarity not only of density and velocity profiles but also of energetic balance and of mass and momentum transport. Consistency of these assumptions is described through a simple imaginary mixing model associated with  $K-H$  instability mixing. The resulted model, including no unknown parameter, successfully predicts the entrainment rate observed by authors in Lake Kasumigaura.

*Keywords* : mixed layer, entrainment law, diurnal stratification, wind-induced current

### 1. はじめに

停滞水域では日射による表層の加熱と風などによる混合で温度躍層が形成され、流れや水質の変化に大きな影響を及ぼす。そこで温度躍層の特性に関する研究が工学・理学の分野で多数行われてきた。中でも、風などの外乱によって躍層が深部に移動する過程、いわゆる連行現象の解明がその中心的課題となっている<sup>1)</sup>。

著者らは、茨城県霞ヶ浦において、一日単位で形成される弱い温度躍層（日成層）の観測を行い<sup>2),3)</sup>、浅い富栄養湖の流れや水質の変化を論ずるうえで日成層の連行過程の解明が重要であると報告した。また、その際、塩水くさびの連行則と類似の形式を仮定してシミュレーションを試みた<sup>2)</sup>。

ところで、連行という言葉は、さまざまな密度流現象に共通して使われる。しかし、もともとの現象が異なれば、連行則が同型の式で記述されるという保証はない。次節に述べるように、風による温度躍層の連行現象でも、湖のスケールや成層の強さおよび風の吹き方によって、異なる連行形態が生じ得る。したがって、文献<sup>2)</sup>におい

て、他の現象の連行則と同形の式をそのまま使用したのはやや早計であったと思われる。仮に一般的な連行則の形式が存在するとしても、それは個別の現象ごとの検討結果の総合として見出されるものであろう。そこで本研究では、風による日成層の連行現象を明らかにする基礎段階として、いわゆる DIM 型の連行則について理論的に考察した。

### 2. 本研究の方針

#### (1) TEM と DIM

風によって生じる連行現象について、従来2つの概念モデルが提案されている<sup>4)</sup>。1つは、水面近傍で生成された乱れが下方に伝わって連行を引き起こすとするもので、TEM (Turbulent Erosion Model) とよばれる。もう1つは、吹送流のせん断不安定に起因する乱れが連行を引き起こすとするもので、DIM (Dynamic Instability Model) とよばれる。もちろん両者を折衷したモデル<sup>5),6)</sup>もあるが、混合機構に関する概念の分類という意味では以上の2つである。

この2つの概念モデルは、どちらが正しくどちらが誤りというのではなく、状況によってどちらかが支配的になると考えられている。Kranenburg は、風洞水槽において、水面のセットアップが生じる“通常の”実験<sup>7)</sup>と、特別な工夫をしてセットアップの生じない実験<sup>8)</sup>を行

\* 正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科  
(〒980 仙台市荒巻字青葉)

\*\* 正会員 工博 東京工業大学助手 工学部土木工学科  
(〒152 目黒区大岡山 2-12-1)

い、前者では TEM 型の連行が生じ後者では DIM 型の連行が生じること、および DIM 型の連行速度が TEM 型のそれに比べて格段に大きいことを示した。Spigel and Imberger<sup>9)</sup>は、湖の混合形態を分類し、いわゆる Wedder burn 数<sup>10)</sup>のオーダーが 1 以下の場合に DIM 型の連行の卓越することを示唆している。Wedderburn 数は、DIM 型の連行によって躍層が湖底に達するまでの時間と密度界面のセットアップが完了するに要する時間の比に相当する無次元数であり、次式のように表わされる。

$$W_1 = \frac{\epsilon g H}{U_*^2} \cdot \frac{H}{L} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\epsilon = \Delta\rho/\rho_0$ ：相対密度差、 $\Delta\rho$ ：上層と下層の密度差、 $\rho_0$ ：下層の密度、 $g$ ：重力加速度、 $U_*$ ：水面の摩擦速度、 $L$ ：湖の水平スケール、 $H$ ：湖の鉛直スケール。

式(1)は、風が一定に吹き続ける場合の混合区分を表わすのだが、風の継続時間が有限であるときには、界面のセットアップに要する時間と風の継続時間  $T$  の比によって判断できる。

$$W_2 = \frac{T}{L/(\sqrt{\epsilon g H})} \dots\dots\dots (2)$$

$\min(W_1, W_2) < 1$  のときには DIM 型の混合が卓越し、 $\min(W_1, W_2) > 1$  のときには TEM 型の混合も生じる。日成層が発達する日は風は比較的弱く、混合を生じる風の継続時間はせいぜい半日である。そこで  $T=12$  時間とし、他の量に観測結果の代表値を代入すると、 $W_1$  は 0.1、 $W_2$  は 0.4 程度となる。したがって、日成層の混合過程では DIM 型の連行が卓越していると判断される。

気象条件によって TEM 型の連行の生じる可能性は否定できないが、その場合でも、TEM 型の連行に先立って DIM 型の連行が生じるし、また DIM 型の連行速度は TEM 型のそれに比べて大きいので、いずれにせよ日成層の混合を取り扱ううえで DIM 型の連行を考察することが重要である。以上の理由から、著者らは DIM 型の連行現象について理論的に考察した。

(2) DIM 型の連行則

海洋では事実上セットアップが生じないから、海洋の混合層の連行は DIM 型と考えられる。ただしそれが確認されたのは比較的最近である。Pollard *et al.*<sup>11)</sup>は、海洋の混合層を速度も密度も均質な層として単純にモデル化し、その運動と連行を調べた(このモデルは Slub モデルとよばれる)。その結果、混合層の平均リチャードソン数  $Ri[U_m]$  が常に一定の値をとると仮定すると実際の現象を良く説明できるとした (Pollard らは  $Ri[U_m]=1$  と考えた)。

$$Ri[U_m] = \frac{\epsilon g h}{U_m^2} = \text{const.} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $h$ ：混合層厚、 $U_m$ ：混合層の平均流速である。

式(3)を混合層全体の運動量保存則と連立すると、外部変数である摩擦速度  $U_*$  を用いて次の連行則が得られる。

$$E[U_*] \sim Ri[U_*]^{-1/2} = \left(\frac{\epsilon g h}{U_*^2}\right)^{-1/2} \dots\dots\dots (4)$$

これが DIM 型の連行則である。ここに、 $E[U_*]=W_e/U_*$ ：連行係数、 $W_e$ ：連行速度である。ちなみに TEM 型の連行則は次式で表わされる。

$$E[U_*] \sim Ri[U_*]^{-1} \dots\dots\dots (5)$$

Price *et al.*<sup>4)</sup>は Pollard *et al.* のモデルを拡張したモデル<sup>5)</sup>を用いてメキシコ湾における混合層のデータを検討し、現地の現象をシミュレートできることおよび  $Ri[U_m]=0.6\sim 0.7^{12)}$ であることを示した。しかし DIM 型の連行に関する代表的実験である Kato and Phillips<sup>13)</sup>や Kantha *et al.*<sup>14)</sup>の円形水路での実験結果は必ずしも式(3)の関数形を支持していなかった。Price<sup>15)</sup>は、実験水路の側壁摩擦に原因があるとして両者の実験データを補正し、式(4)の関係が実験においても成立していることおよび  $Ri[U_m]$  の値は 0.5~1.1 であることを示した。しかし、Scranton and Lindberg<sup>16)</sup>は Kantha *et al.* とほぼ同スケールの円形水路において密度および流速分布測定を含めた詳細な実験を行い、Kantha *et al.* と異なった結果を得た。Scranton and Lindberg によれば、円形水路では諸量が半径方向に変化し、また二次流が発生して現象が三次元的となるため、データ整理および活用にあたってはよほど注意してかからなければならない。Kranenburg<sup>9)</sup>は風洞水槽下流端に特殊なバルブを設置して、上層流のみを循環させる実験を行っている。この実験は直線水路であるため 2 次流が発生せず、また幅が十分広いため側壁の影響が少ない。その結果は式(4)の関係を明確に示している。なお  $Ri[U_m]$  の値については論文中には示されていない。

さて、 $Ri[U_m]$  がおおむね一定値をとる理由として、いくつかの説がある。最初にこの関係を提出した Pollard *et al.*<sup>9)</sup>は、混合層が marginally stable、すなわち何らかの限界状態にある、と推測している。また Niller and Krauss<sup>17)</sup>は、風によって混合層に加えられるエネルギーが一定の率でポテンシャルエネルギーに転換されると仮定して  $Ri[U_m]=\text{const.}$  の関係を導いている。一方 Kundu<sup>18)</sup>は、連行が界面のせん断不安定で生じると仮定すれば  $Ri[U_m]$  というマクロな量よりは界面の局所リチャードソン数  $J$  に意味をもたせるのが適当であると述べている。すなわち

$$J = \frac{g d\rho/dz}{\rho_0 (du/dz)^2} \Big|_{\text{界面}} = \text{const.} \dots\dots\dots (6)$$

そして、もし混合層内の密度分布と速度分布がおのおの相似関数に従うのであれば  $Ri[U_m]=\text{const.}$  となる

ことを示している。

$Ri[U_m]$  の一定性がどの程度一般的に成立するかということは十分わかっていない。しかし、海洋における観測結果でも<sup>12)</sup>、これを模擬した実験の結果でも<sup>15)</sup>、 $Ri[U_m]$  は狭い範囲に入っている。一方、たとえば塩水くさびのような重力の流れ方向成分が外力となる密度流の実験では、流入条件をコントロールすることにより、 $Ri[U_m]$  の値を広い範囲で変えることが可能である。だから、 $Ri[U_m]$  が厳密に一定でないにしても、ある範囲の値しか現われないということは、DIM 型の連行現象の著しい特徴と考えてよいと思われる。このことは次節に述べるように、DIM 型の混合機構を考察するうえでの1つの手がかりになると考えられる。

### (3) 本研究の目的と方針

本研究は DIM 型の連行則を導出することを目的としている。しかし連行現象は一種の乱流現象であるから、運動方程式を演繹的に解き進めて解を得ることはできない。何らかの仮説を導入する必要がある。仮説というと何かあいまいなもの、あるいは理論の弱点といった印象を与えるが、しかし、どのような乱流モデルも何らかの仮説を含んでいるわけで、それを避けて通ることはできない。そこで次のように積極的に考えよう。現象の機構について物理的意味のあるような仮説をたててみて、それから導かれる結果が観測事実をうまく説明できたならば、その現象の機構が明らかにされた、または明らかにされた可能性が高い、と考えるのである。

$Ri[U_m]$  が 1 に近い値をとるということが、DIM 型の連行現象の著しい特徴であると考えられる。そして、これについて前節に述べた 3 つの解釈がある。そこで本研究では、それらに関する 3 つの言葉を Keyword として、“DIM 型の連行の機構としてどのような仮説をたてるのが適当か”という点を推論する。Keyword の第 1 は「相似性」、第 2 は「エネルギーバランス」、第 3 は「限界状態」である。「相似性」を取り上げたのは、解析しやすいということもあるが、それだけではなく、次のような積極的な理由がある。まず著者らが行った日成層の観測結果では、流速分布および密度分布の相似性がおおむね成立している。相似性が現われるということは、そのような機構が内在しているからである。したがって逆に、相似性が成立する背景を考え混合の機構を推論しようというのである。また「限界状態」を取り上げたのは、 $Ri[U_m]$  の一定性、特にその値が 1 の近くにあるということが何か 1 つの限界状態の成立を連想させるからである。最後に、「エネルギーバランス」を推論の Keyword とするのは、今までの研究結果の踏襲である。DIM にしても TEM にしても、その基本的な形式は、外部より加えられた仕事により発生する乱れエネルギーの一部がポ

テンシャルエネルギーに転換されるとして導ける（ただし従来の研究における転換率の評価は必ずしも適切ではない）。

以下の解析は、水域が無限に広く、風速が一定で、総浮力が保存され、下層の密度分布が一様の場合について行う。また現象は鉛直一次的であるとする。というのは、 $Ri[U_m]$  の一定性とか相似性とかエネルギーバランスとかいう考え方は暗黙のうちに self-preserving な状態を仮定しており、上記の条件が整わなければ、完全に self-preserving な状態は出現しないと考えられるのである。このような条件を設定することが以下の解析の価値を損なうことはないと思う。本研究の目的は現象の基本的な機構を推論することであって、外部条件の変化による影響はその後の話だからである。

以下の解析は、連行現象に関する通説(あるいは俗説)に反する点を 1 つ含んでいる。誤解を生じないように、あらかじめ説明しておきたい。学会の質疑応答などを聞いていると、連行が界面における混合によって生じる、と考えている人が意外に多い。これは現象の一面しかとらえていない。単に二層流体の界面でせん断不安定が生じて混合するのであれば、界面がほやけるだけであるから“連行”ではない。混合した流体塊がどちらか片側の層(混合層)の中に混入して初めて連行されたことになるのである。そのためには、その層全体にわたって混合のためのエネルギーソースが必要である。そのエネルギーソースは混合層内部のせん断流であると考えられる。理由は以下のとおりである。もしそのエネルギーソースが界面のせん断不安定だけであるなら、界面を挟んで上下対象の混合になってしまうであろう。また、もしエネルギーソースが水面で加えられた攪乱だとしたら、DIM 型の連行ではなく、TEM 型の連行になってしまうからである。したがって、DIM 型の連行現象は、界面でのせん断によって生じるのではなく、混合層全体のせん断によって生じるのである。

解析の結果をどのように検証するかは難しい問題である。まず海洋の現地観測データは、連行速度のオーダーを検証する程度にしか役立たない。また実験データの中で十分信頼できるものは比較的少ない。よく引用されるのは Kato and Phillips および Kantha *et al.* の円形水路の実験データであるが、先に述べたように側壁や 2 次流の問題がある。また Kranenburg の実験はかなり信頼性が高いが、流れ方向に一様な現象とはなっていないので次節に述べる解析結果とは比較はできない (Kranenburg の実験に対応した解析を行うことも可能である。紙面の都合で本報では割愛し、別の機会に述べたいと考えている)。そこで本論文では、著者らが霞ヶ浦で得た日成層の現地観測データと比較して検証する。しかし霞ヶ浦

は広いとはいっても有限であるし、また日成層は日射によって総浮力が変わるので、先に述べた理想的な条件は必ずしも満足されない。そこで気象条件との対応から上記の条件がおおむね成立すると思われるデータを抽出して比較する。

3. 理論的考察

(1) DIM 型の連行則

a) 密度分布, 速度分布の相似性

成層化した広い水域に風が作用すると、密度界面の上の部分(混合層)が風下に流れる。混合層の流速分布は図-1(a)に示すように変曲点をもった分布になると考えられる。ただし変曲点の位置はかなり水面に近接しており(数mの風で1~2cm)、風波が発達しない小型の水路実験では観測されるが<sup>19)</sup>、大型の水路では観測しにくくなる<sup>2)</sup>。現地では風波が発達するので計測はほとんど困難である。変曲点より上の層では、風による直接的なせん断の影響が卓越し、変曲点より下の層では界面の存在によって生じるせん断の影響が卓越していると考えられる。なお小型の水路実験によれば、変曲点より上の水面近傍では平板上の乱流境界層と同様に壁法則が成り立つことが知られている<sup>20)</sup>。TEMではこの領域で生産された乱れの一部が下方に拡散し、混合を引き起こすと考える。一方DIMは変曲点より下のせん断層で生産される乱れによって混合が生じると考える。一般的には両者は併存するであろうが、上記のように乱れの機構が本質的に異なるのであるから、両者の影響力の割合が変化するのは相似性は期待できない。そこで、ここでは圧倒的にDIMが支配する状態を仮定する。すなわち、変曲点より上層は混合層厚に比べきわめて薄く、そこから拡散される乱れは混合にはいささい寄与しないとす。混合は変曲点より下のせん断層において生産される乱れのみによって生じ、また応力の伝達もその乱れによると考える。つまりself-preservingな状態を仮定する。そこで変曲点より下の層についての相似則を考え、速度分布形を図-1(a)の点線のようにイメージして次のような相似関数を仮定する。

$$u = \Delta U f(\eta), \quad \eta = z/h \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\Delta U$ : 下層の流体とともに移動する系からみて混合層の速度分布を点線のように外捜したときの水面流速、 $z$ : 水面から鉛直下向きにとられた座標、である。

密度分布は次の相似関数を仮定する(図-1(b))。

$$\rho = \rho_0 - \Delta \rho_s G(\eta), \quad \eta = z/h \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $\Delta \rho_s$ : 水面と下層の密度差である。

b) エネルギーバランスの相似性

現象の相似性を仮定するという事は、単に密度分布や速度分布の形を相似と考えるにとどまらない。相似形

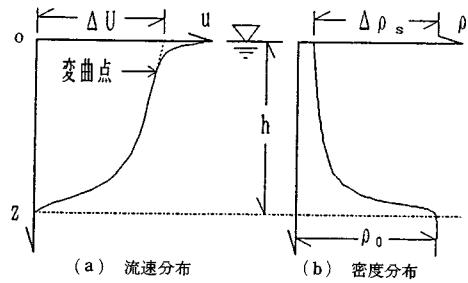


図-1 流速および密度の相似分布

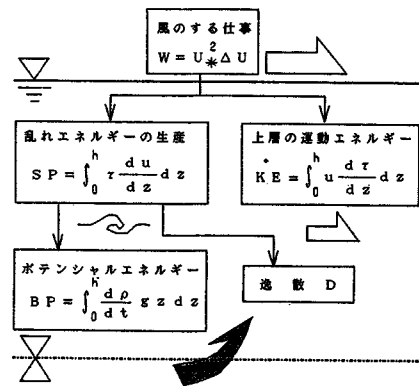


図-2 混合におけるエネルギーの流れ

の分布が現われるということは、その分布形を生み出さるもろもろの作用のバランスの不変性を暗示している。この点をエネルギーバランスについて考えてみよう(図-2)。

流速分布の変曲点より上の厚さはきわめて薄いと考えるので、その層内でのせん断力はおおむね一定とみなせる。また図-1(a)に示すように変曲点での流速はほぼ $\Delta U$ に等しいので、変曲点より下部の流体に加ええられる仕事率( $W$ )は $U_*^2 \Delta U$ と近似できる。この $W$ は、混合層の平均運動エネルギー( $KE$ )の増大と、乱れエネルギーの生産( $SP$ )に使われる。乱れエネルギーは、上下の混合を通してポテンシャルエネルギーの増大( $BP$ )を生じ、残りは仕事に供されない乱れとなり、いずれ逸散( $D$ )する。相似分布を仮定する以上、これらのエネルギー授受の比も一定と考えるべきである。そこでせん断乱れエネルギーのうち一定の割合がポテンシャルエネルギーに転換されると仮定し、その比率を $C$ とおく、式(7)、式(8)を用いて混合層全体のせん断による乱れエネルギーの生産率( $SP$ )とポテンシャルエネルギーの増加率( $BP$ )を求める。

まず水深 $z$ より上部の層の運動量のつり合い条件式は次のように書ける。

$$U_*^2 - \frac{\tau}{\rho_0} = \int_0^z \frac{\partial u}{\partial t} dz \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\tau$ は水深  $z$  におけるせん断力である。上式に式(7)を代入すると、

$$\frac{\tau}{\rho_0} = U_*^2 - (h \dot{\Delta} U) \int_0^\eta f(\eta) d\eta + \Delta U \dot{h} \eta f(\eta) \dots\dots\dots (10)$$

ここに“ $\cdot$ ”は時間微分を表わし、[ $\dot{\quad}$ ]は[ ]内の量の時間微分を表わす。 $\eta=1$ では $\tau=0$ 、 $f(1)=0$ であるから次式が成立する。

$$(h \dot{\Delta} U) = U_*^2 / \int_0^1 f(\eta) d\eta = U_*^2 / \beta \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\beta$ ：運動量補正係数。式(11)を式(10)に代入して次式を得る。

$$\frac{\tau}{\rho_0} = U_*^2 - \frac{U_*^2}{\beta} \int_0^\eta f(\eta) d\eta + \Delta U \dot{h} \eta f(\eta) \dots\dots\dots (12)$$

したがって、混合層全体のせん断による乱れエネルギーの生成率( $SP$ )は次のように表わされる。

$$\frac{SP}{\rho_0} = - \int_0^h \frac{\tau}{\rho_0} \frac{du}{dz} dz = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) U_*^2 \Delta U + \frac{\alpha}{2} \Delta U^2 \dot{h} \dots\dots\dots (13)$$

ここに  $\alpha = \int_0^1 f^2(\eta) d\eta$ ：運動エネルギー補正係数。一方、水深  $z$  における重量フラックスは次のようになる。

$$\int_0^z \frac{\partial \rho}{\partial t} g dz = \Delta \rho_s g h \eta G(\eta) \dots\dots\dots (14)$$

$$(BP)/\rho_0 = \zeta \epsilon_s g h \dot{h} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $\zeta = \int_0^1 \eta G(\eta) d\eta$ ：ポテンシャルエネルギー補正係数、 $\epsilon_s = \Delta \rho_s / \rho_0$ である。ここで  $(BP) = C \cdot (SP)$  とおき変形すると連行速度  $W_e$  が求められる。

$$W_e = \dot{h} = \frac{2C \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) U_*^2 \Delta U}{2\zeta - C\alpha \frac{\Delta U^2}{\epsilon_s g h}} \dots\dots\dots (16)$$

c)  $Ri[\Delta U]$  の一定性と DIM の見掛けの連行則  
混合層の運動エネルギーの時間変化率は次のように書ける。

$$\frac{KE}{\rho_0} = \frac{1}{2} \int_0^h \frac{\partial u^2}{\partial t} dz = \frac{\alpha}{\beta} U_*^2 \Delta U - \alpha \Delta U^2 \dot{h} \dots\dots\dots (17)$$

したがってエネルギーバランスの相似を仮定すると次式を得る。

$$\frac{KE}{BP} = \frac{\alpha}{\beta \zeta} \cdot \frac{U_*^2 \Delta U}{\epsilon_s g h \dot{h}} = \frac{\alpha}{\zeta} \cdot \frac{\Delta U^2}{\epsilon_s g h}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta \zeta} \cdot \frac{2\zeta - C\alpha Ri[\Delta U]}{2C(1-\alpha/\beta)} = \frac{\alpha}{\zeta Ri[\Delta U]} = \text{const.} \dots\dots\dots (18)$$

上式で  $Ri[\Delta U]$  以外は定数だから、 $Ri[\Delta U]$  も一定値となる。一方、質量が保存されれば  $\epsilon_s g h = \text{const.}$  だから、 $Ri[\Delta U] = \text{const.}$  は  $\Delta U = \text{const.}$  を意味する。そこで式(11)は次式となる。

$$\dot{h} = \frac{1}{\beta} \frac{U_*^2}{\Delta U} \dots\dots\dots (11)'$$

式(11)'と式(14)を等値して  $Ri[\Delta U]$  を求めると次式となる。

$$Ri[\Delta U] = \frac{C}{\zeta} \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) = \text{const.} \dots\dots\dots (19)$$

また、式(19)を用いて式(16)を簡略化すると次式となる。

$$E[U_*] = \frac{1}{\beta} Ri[\Delta U]^{1/2} \cdot Ri[U_*]^{-1/2} \dots\dots\dots (20)$$

上式は Price<sup>15)</sup>の提案している式と一致している。

このようにエネルギーバランスの相似性を仮定することにより、DIM 型の連行則を導くことができる。

(2) 密度分布および流速分布の相似関数

a) 限界状態—最大効率の混合

上に示した諸式は多くの定数を含んでいる。これらを決定するにはさらに混合の内部機構に立ち入らねばならない。

まず、せん断乱れエネルギーがポテンシャルエネルギーに変換される率  $C$  の一定性の意味を考えよう。密度分布の存在しない系では ( $SP$ ) は全量 ( $D$ ) に移行するのだから、 $C$  はゼロでも良さそうである。しかし  $C$  が 1 をとることはなさそうに思える。つまり、生成されたせん断乱れが 1% の無駄もなく質量輸送の仕事に使われ、全く痕跡を残さずに消えるというのは考えにくい。とすれば  $C$  には“上限”がある。 $C$  はゼロからある上限値  $C_0$  の間で変化できる。しかし変化してしまったのでは相似性は現われない。そこで相似性が確立した状態は、 $C$  が上限値  $C_0$  をとった状態、つまり、最大効率でポテンシャルエネルギーが増加する状態と仮定してみよう。

次に最大効率の意味について考える。タンクに取められた塩水と淡水を一樣に混ぜる場合、グリッドなどを挿入して機械的にかき混ぜるよりも、タンクを 1 回転させて中の流体を密度不安定な状態にしてやる方が簡単であろう。

そこで次のように推論する。最大効率の混合は、おそらく流体の密度不安定を最大限に利用した混合であり、DIM 型の連行現象はそのような混合形態をとっている。そのために、DIM 型の連行の速度は、上方からの機械的攪乱による TEM 型の連行の速度に比べて格段に大きいのではないか。

そこで図-3 (a)→(b)のように、タンクを転倒させて流体を180°回転する状況を考える。(b)の状態のポテンシャルエネルギーは、(a)の状態を基準にすると $2(\rho_1 - \rho_2)A\delta$ である。ここに $A$ はおのおのの流体の単位厚さ当たりの体積、 $\delta$ はおのおのの流体の重心から分割線に降ろした垂線の長さである。したがって、(b)の状態を出現させるには、少なくとも $2(\rho_1 - \rho_2)A\delta$ の仕事をする必要がある。さて、(b)の状態は完全に不安定であるから、流体塊は細かく砕けて(c)のように混合してしまうであろう。混合後のポテンシャルエネルギーは(a)の状態を基準にすると $(\rho_1 - \rho_2)A\delta$ であるから、当初なした仕事が最終的にポテンシャルエネルギーに転換される率の最大値 $C_0$ はちょうど1/2である。あとの1/2は細かく砕けた流体要素の運動エネルギー、つまりずっと高周波の乱れエネルギーとなる。言葉を換えれば、乱れのカスケードプロセスにスキップが生じるのである。

ところで、二層界面に生じる $K-H$ 不安定は、図-3 (d)のように、横に並んだタンクの列を一斉に回転させるのと同じような効果を生む。図-4はPatnaik *et al.*<sup>21)</sup>が行った $K-H$ 不安定の数値計算の結果である。実線が乱れの生成率(SP)の時間変化、破線がポテンシャルエネルギー増加率(BP)の時間変化を示している。両者を時間的に積分した量を比較すると、後者は前者の大体1/2になっていることがわかる。したがって $C_0=1/2$ という高い効率の混合は決して非現実的なものではない。

b) 局所的エネルギー相似の仮説

さて、実際の混合層では密度が連続的に変わっており、混合は随所で生じている。そこで最大効率の混合が混合層のすべての部分で生じていると仮定する。この仮定には首をかしげる人がいるかもしれない。通常の乱流境界層には乱れの生成の過剰な領域と逸散の過剰な領域があって、その間に乱れの輸送が生じている。全体として最大効率を達成するには「輸送」が不可欠だとも考えられる。しかし、輸送はそれ自体で何らかのロスを生起するものである。だから局所的な最大効率の達成の積分として全体の最大効率の達成があるとすれば、それが一番効率的なのである。

そういうわけで、やや強引だが、せん断乱れエネルギーからポテンシャルエネルギーへの転換率 $C$ が混合層のすべての部分で一定値 $C_0=1/2$ をとると仮定する。これを「局所的エネルギー相似の仮説」とよぶことにする。

局所的エネルギー相似の仮説は次のように定式化される。まず水深 $z$ におけるせん断乱れエネルギーの生成率( $SP[z]$ )は、式(7)から次のように求まる。

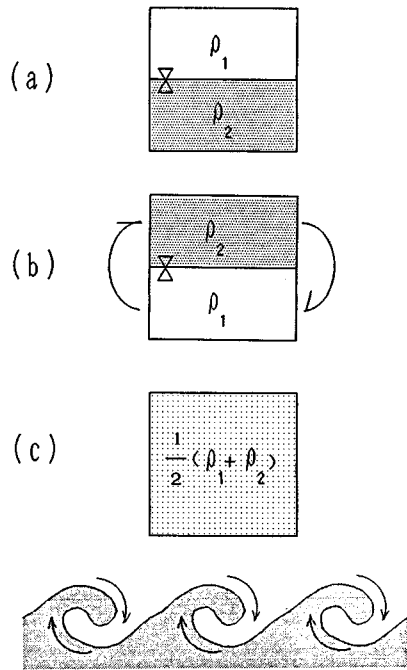


図-3 最大効率の混合の概念モデル

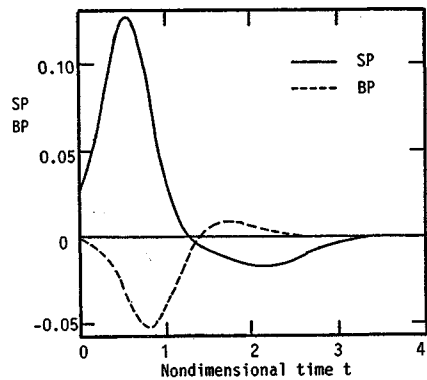


図-4  $K-H$ 不安定におけるエネルギー収支 (Patnaik *et al.*<sup>21)</sup>)

$$\begin{aligned} \frac{SP[z]}{\rho_0} &= -\frac{\tau}{\rho_0} \frac{du}{dz} \\ &= -\frac{\Delta U}{h} \left\{ U_*^2 - \frac{U_*^2}{\beta} \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \Delta U \dot{\eta} f(\eta) \right\} f'(\eta) \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

ここに“ $\dot{\eta}$ ”は $\eta$ に関する微分を表わす。また、水深 $z$ におけるポテンシャルエネルギーの増加率( $BP[z]$ ) (すなわち重量フラックス)は式(8)から次のように求まる。

$$\frac{BP[z]}{\rho_0} = \int_0^z \frac{\partial \rho}{\partial t} g dz = \epsilon g \dot{\eta} G(\eta) \dots \dots \dots (22)$$

$BP[z]=C_0 \cdot SP[z]$  とおき、式(16)を  $\dot{h}$  に代入すると次式を得る。

$$\left\{ \beta - \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta + \eta f(\eta) \right\} f'(\eta) = -\frac{1}{\zeta} \left( \beta - \frac{1}{2} \alpha \right) \eta G(\eta) \dots\dots\dots (23)$$

さて、式(23)は2つの未知関数  $f(\eta)$  と  $G(\eta)$  を含んでいるので、両方を求めるには、もう1つ別の関係式を必要とする。そこで、よく行われるように、質量輸送と運動量輸送の相似性を仮定する。渦拡散係数  $K_p$  と渦動粘性係数  $K_m$  の比  $K_p/K_m$  は乱れの構造によって異なり空間的に分布をもつとも考えられるが、ここで対象とする現象でどうなっているかは明確ではない。しかし、温排水など多少類似性のある現象の実験データから、少なくとも層平均的な値の範囲を類推することは許されるであろう。たとえば文献22)によれば、層平均的な  $K_p/K_m$  の値は1かそれよりやや大きい値をとる。そこで、ここでは  $K_p/K_m$  の値を混合層全体で一定値におき、その値については観測データとの比較で考えることにする。

$$\frac{K_p}{K_m} = \frac{F_p \frac{d\rho}{dz}}{\left( \frac{\tau}{\rho_0} \right) \frac{du}{dz}} = \text{const.} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 $F_p$ : 密度フラックスである。一方、局所的エネルギー相似の仮説によると、

$$gF_p = BP[z] = C_0 \cdot \tau \frac{du}{dz} \dots\dots\dots (25)$$

したがって、局所リチャードソン数  $Ri$  は次のようになる。

$$Ri = \frac{gdp/dz}{\rho_0(du/dz)^2} = C_0 \frac{K_m}{K_p} \dots\dots\dots (26)$$

式(26)に式(7)と式(8)を代入し、式(19)の関係をを用いると次式を得る。

$$\frac{\{f'(\eta)\}^2}{G'(\eta)} = -\frac{1}{\zeta} \left( \beta - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{K_p}{K_m} \dots\dots\dots (27)$$

d) 速度分布関数、密度分布関数の解析解

式(23)と式(27)を連立して、次の境界条件のもとで解けば、混合層内の速度分布関数  $f(\eta)$  と密度分布関数  $G(\eta)$  を求められる。

$$f(0) = G(0) = 1$$

$$f(1) = G(1) = 0 \dots\dots\dots (28)$$

$K_p/K_m$  が1の場合には次のような解析解が得られる。

$$\left. \begin{aligned} f(\eta) &= 1 - \eta^2 \\ G(\eta) &= 1 - \eta^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

これから連行則(式(16))に含まれる定数が次のように求められる。

$$\beta = \frac{2}{3}, \alpha = \frac{8}{15}, \zeta = \frac{3}{10} \dots\dots\dots (30)$$

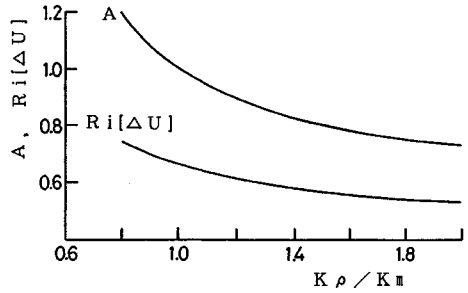


図-5  $K_p/K_m$  と  $A$  および  $Ri[\Delta U]$  の関係

これらを式(19)に代入し、 $C=C_0=1/2$  とすると次の関係を得る。

$$Ri[\Delta U] = \frac{2}{3} \dots\dots\dots (32)$$

さらに式(16)に代入すると、次の連行則が得られる。

$$W_e = \dot{h} = \frac{U_*^2 \Delta U}{\epsilon_s g h} \text{ または } E[\Delta U] = Ri[U_*]^{-1} \dots\dots\dots (33)$$

なお、 $K_p/K_m \neq 1$  の場合は、式(23)と式(27)を数値積分して次式の係数  $A$  を  $K_p/K_m$  の関数として図-5のように求めることができる。

$$E[\Delta U] = A Ri[U_*]^{-1} \dots\dots\dots (34)$$

上式を式(16)に代入すると式(4)が得られる。

#### 4. 霞ヶ浦のデータとの比較

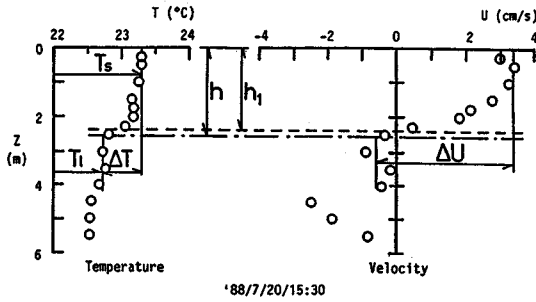
3. で述べた理論は相似条件の成立する範囲に限られている。そこで、連行則の検討に用いるデータの選択や整理方法を3. で述べたモデルに合わせ<sup>\*)</sup>、またその後の観測データも追加した。データの抽出条件は次のとおりである。

- ① 風向・風速が一定していること
- ② 熱量がおおむね保存されていること
- ③  $\Delta U$  がおおむね一定であること (相似条件が満たされれば  $\Delta U = \text{一定}$ )
- ④ 風が吹き出す以前に前の風や他の要因によって流れが生じていないこと (相似条件が満たされるためには現象がその場の風に完全に対応していなくては

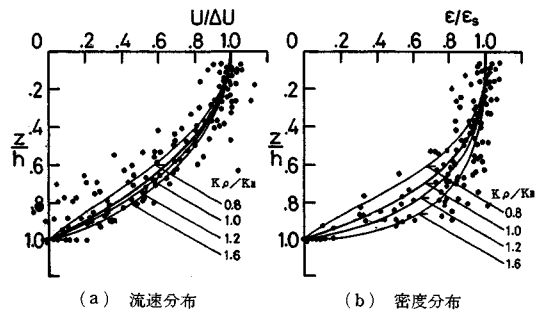
\*) 文献2)との定義の違いは以下のとおりである。

	文献2)	本論文
相対流速差	平均せん断面内の流速差	風方向の相対流速差
相対密度差	下層平均密度に対する上層相対密度の平均値	躍層直下と水面の密度差
混合層厚	$h_1$ (図-6 参照)	$h$

文献2) No. I のデータは19:30以後風速が減少すると同時に風向が変化したため、18:30までと19:30以後に分割した。文献2) No. IV のデータは風向に対し上層流速がほぼ直角方向に向いていたため本論文では削除した。



図一六 諸量の定義



図一七 流速および密度の相似分布

表一 連行則の比較に用いた諸量の値

No.	Date	Time	$U_*$ (cm/s)	$\epsilon_s g h$ ( $\text{cm}^2/\text{s}^2$ )	$We$ ( $\text{cm}/\text{s}$ ) $\times 10^2$	$\Delta \dot{U}$ ( $\text{cm}/\text{s}$ )	$E$ [ $\Delta U$ ] $\times 10^2$	$E$ [ $U_*$ ] $\times 10^2$	$Ri$ [ $\Delta U$ ]	$Ri$ [ $U_*$ ] $\times 10^{-2}$
I	'88/7/20	14:00-15:30	0.420	29.3	3.47	4.25	8.16	8.26	1.62	1.66
II	'87/7/29	17:30-18:30	0.455	88.0	2.50	9.80	2.55	5.49	0.916	4.25
III	7/29	19:30-21:30	0.219	90.7	0.819	14.2	0.577	3.74	0.450	18.9
IV	8/24	13:30-15:30	0.577	73.6	2.80	6.40	4.37	4.85	1.00	2.21
V	8/26	17:30-18:30	0.504	94.7	2.50	13.7	1.82	5.52	0.505	3.73
VI	8/27	14:30-16:00	1.00	112.0	4.72	10.8	4.37	4.72	0.960	1.12

ならない)

なお解析では下層の密度分布が一様として式を誘導しているが、現地では常に日射の多少の透過と過去の温度躍層によって多少安定な密度勾配が形成されている(たとえば図一六のように)。この点については現地データは解析の条件を必ずしも満足していない。

図一六に各量の定義を1988年7月20日15:30のデータを例に示した(相対密度差  $\epsilon_s$  は図中  $T_s$ ,  $T_i$  から算出した)。そのほかのデータについては表一にまとめた。

図一七は流速および密度の鉛直分布を無次元表示したものである。図中にはいくつかの  $K_\rho/K_m$  の値に対する流速、密度の理論分布が示されている。 $K_\rho/K_m$  の変化に対する理論分布の変化をみると、密度分布はかなり変化するが、流速分布はさほど変化していない。実測値と比較すると、 $K_\rho/K_m$  が1.2~1.6程度で密度分布は実測値とよく一致している。

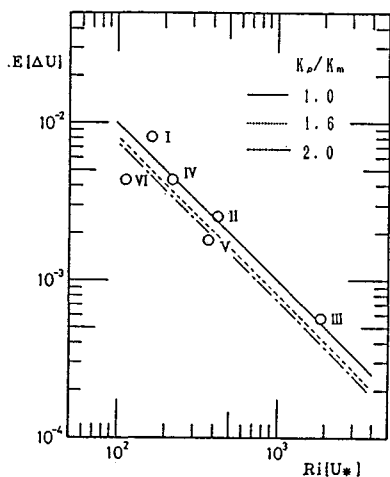
図一八は本理論で得られた連行係数とリチャードソン数の関係を示している。図一八(a)は  $E[\Delta U] \sim Ri[U_*]$  の関係について、理論で得られた本質的な連行則(式(34))と観測データを比較したものである。図一五からもわかるように  $K_\rho/K_m$  が2となっても式(34)のAの値は1の場合の8割程度であり、さほど変化しない。したがって、 $K_\rho/K_m$  の値が1から多少ずれたとしても連行速

度にさほど影響しないことがわかる。つまり  $K_\rho/K_m$  の値を決めることは、連行則のすべての係数を確定するために必要ではあるが、その値自体は結果にさほど影響を及ぼさないということになる。

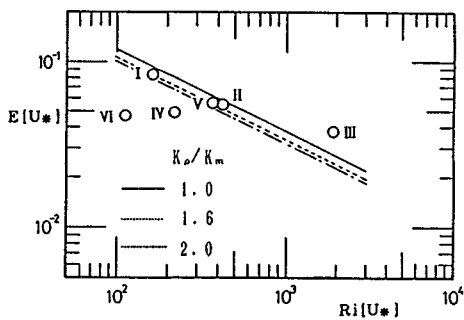
このことは次のように解釈される。DIMの連行では混合層内のせん断による乱れによって混合が生じる。乱れエネルギーの生産率は  $\tau \times du/dz$  であるが、 $\tau$  は  $U_*^2$  のオーダーであり、 $du/dz$  は  $\Delta U/h$  のオーダーであるから、その総量は  $U_* \Delta U$  および  $h$  の大きさでおおむね決まってしまう。つまり乱れエネルギーの生産率は、混合層内の分布形の変化によって若干は変化するものの、総量としてはあまり動きようがない量なのである。このことは逆に“局所エネルギー相似の仮説”がDIMの連行において本質的に重要な機構であることを示している。

なお、図一八(b)には摩擦速度のみを用いて整理した連行則、(c)には  $E[\Delta U] \sim Ri[\Delta U]$  の関係が示されている。文献2)において著者らは、側壁摩擦や2次流の影響の補正を行っていない円形水路の実験データと本データと同じ座標上で比較して、相方を平均的に通過する線、すなわち  $E[\Delta U] \sim Ri[\Delta U]^{-1}$  という連行則を示唆した。しかし現地データのみをみると、 $E[\Delta U] \sim Ri[\Delta U]^{-n}$  という傾向はみられず、むしろ右上がりの傾向を示している。図一八(c)の図中の縦線は  $K_\rho/K_m$  の値に対応する  $Ri[\Delta U]$  の値を示している。

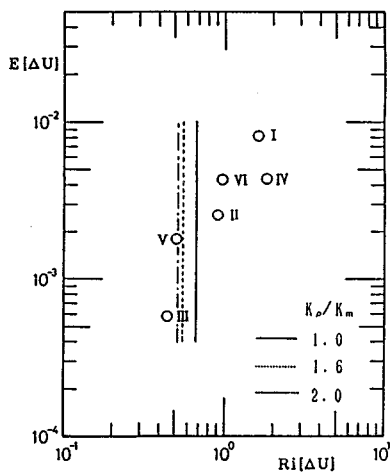




(a)  $E[\Delta U]$  と  $Ri[U_*]$  の関係



(b)  $E[U_*]$  と  $Ri[U_*]$  の関係



(c)  $E[\Delta U]$  と  $Ri[\Delta U]$  の関係

図-8 霞ヶ浦観測データによる  $E$  と  $Ri$  の関係

観測データと計算結果が図-8 (a)では良く一致し、図-8 (b)と(c)で一致なくなる理由は次のように考えられる。図-8 (a)の関係はせん断乱れエネルギーの生産率とポテンシャルエネルギーの増分の比が一定とい

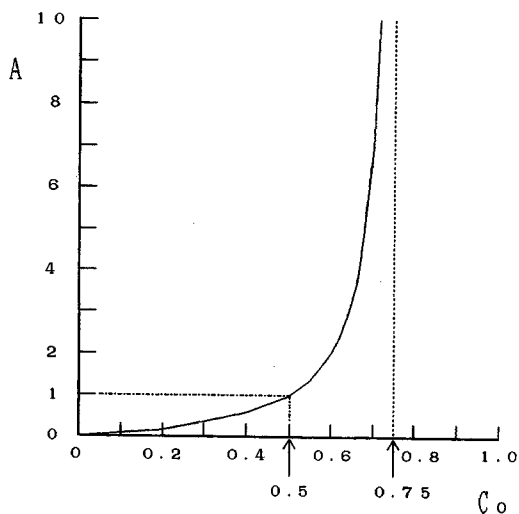


図-9  $C_0$  と連行則係数  $A$  の関係

う仮説から導かれるので、その条件が成立していれば、合うことになる。ところが、図-8 (c)の  $Ri[\Delta U]$  の一定性については、式(19)の導き方からわかるように、さらに下層の流速が時間的に不変だとする仮定をさらにおいて得られる。この条件は海洋や実験水路ではおおむね成立すると考えられる。しかし湖では、過去の日射履歴によって下層に多少の密度の不均一性が(図-6)あり、しかも水深が浅いので、風が作用すると下層が流動する。したがって、下層流速の一定性は現実にはあまり成り立っていない。なお図-8 (b)の関係は図-8 (c)の関係をを用いて得られる。このことから、図-8 (b)および(c)の関係は、図-8 (a)の関係に比べて、さらに理想的な状況下でないと達成できないと考えられる。

#### 4. おわりに

##### (1) 混合モデルの意味について

本論文の数式展開は図-3に示した概念モデルより出発している。そのモデルは“最大効率の混合”が生じているだろうという仮説に基づいている。なぜ最大効率でなければならないかという点は証明できない。ただそう考えると現象全体をうまく説明できるのである。

効率係数  $C_0$  の値 (1/2) がそれほど非現実的でないことを示すために、Patnaik *et al.* が行った  $K-H$  不安定の数値計算結果を引用した。これは  $C_0=1/2$  という高い効率の混合があり得ることを確かめるために示したもので、風による躍層の混合が  $K-H$  不安定によっているというのでは決してない。2. で述べたように、混合層では全体で混合が生じているのである。図-9は理論式で  $C_0$  の値の変化に伴う連行則係数  $A$  (式(34)) の変化を示したものである。このように  $C_0$  の値が1/2からはずれ

ると、連行速度は大きく変化してしまう。図-8(a)に示したように、ここで求めた連行則と現地観測結果はよく一致していたから、逆にいうと、現地の現象では  $C_0$  の値がかなり正確に  $1/2$  となっているのである。このことは次に述べるエネルギー輸送機構という点では混合層中の混合と  $K-H$  不安定がよく似ていることを示している。

密度の均一な流体の乱れは、非線形効果によって徐々に碎かれて細くなる。細くなると粘性の作用によって乱れエネルギーは熱エネルギーに変わってゆく。いわゆるカスケードプロセスである。密度が均一でない流体では混合によってポテンシャルエネルギーが増大するが、それはカスケードプロセスを“減殺”することで可能となる。最大効率の混合が生じるということは、混合に役立つような周波数帯について、カスケードプロセスを“抹殺”するということである。ただし、このことは、ある周波数帯の乱れが全くなくなるといっているのではない。また周波数間のフラックスが全くなくなるのでもない。周波数間のフラックスの生じる機構が異なるということである。もちろん、このことも直接的には検証されていない。しかしそれから導かれる結果が実験や現地観測の事実と矛盾がないという意味で、このモデル化はやはり正当だと考えてよいと思う。

## (2) 本論文の結論

DIM 型の連行現象の機構について以下の事項が推論および結論される。

1) 混合層内のせん断流によって生成される乱れは、通常のカスケードプロセスを経ずに、図-3に象徴される比較的大規模な混合の機構を経て、混合の残滓物である小規模の乱れになると推測される。

2) 混合機構が上記のように乱れの高周波移行と一体化するために、効率の良い混合が可能になり、エネルギーバランスの相似性が保持されるものと推測される。

3) 以上のような仮説から理論的に導かれる結果は、霞ヶ浦の現地データとよく一致した。このことから、日成層の混合は、基本的には DIM 型の連行によると推測される。

## 参 考 文 献

- 1) 玉井信行：連行概念の統一化と連行係数の評価法，土木学会論文集，第 381 号/II-7，pp. 1~11，1987.
- 2) 田中昌宏・石川忠晴：日成層形成時の吹送流の特性について，土木学会論文集，No. 405/II-11，pp. 63~72，1989.
- 3) 石川忠晴・田中昌宏・小関昌信：浅い湖の日成層が水質に及ぼす影響，土木学会論文集，No. 411/II-12，pp. 247~254，1989.
- 4) Price, J.F., Mooers, C.N.K. and Leer, J.C.V.: Obser-

vation and simulation of storm-induced mixed-layer deepening, J. Phys. Oceanogr., Vol. 8, pp. 582~599, 1978.

- 5) Niiler, P.P.: Deepening of the wind-mixed layer, J. Mar. Res., Vol. 33, pp. 405~422, 1975.
- 6) Spigel, R.H., Imberger, J. and Rayner, K.N.: Modeling the diurnal mixed layer, Limnol. Oceanogr., Vol. 31, pp. 533~556, 1986.
- 7) Kranenburg, C.: Mixed-layer deepening in lakes after wind setup, J. Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 111, No. 9, pp. 1279~1297, 1985.
- 8) Kranenburg, C.: Wind-induced entrainment in a stably stratified fluid, J.F.M., Vol. 145, pp. 253~273, 1984.
- 9) Spigel, R.H. and Imberger, J.: The classification of mixed-layer dynamics in lakes of small to medium size, J. Phys. Oceanogr., Vol. 10, pp. 1104~1121, 1980.
- 10) Imberger, J. and Hamblin, P.F.: Dynamics of Lakes, reservoirs, and cooling ponds, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 14, pp. 153~187, 1982.
- 11) Pollard, R.T., Rhines, P.B. and Thompson, R.O.: The deepening of the wind mixed layer, Geophys. Fluid Dynam., Vol. 3, pp. 381~404, 1973.
- 12) Price, J.F.: Observations of a rain-formed mixed layer, J. Phys. Oceanogr., Vol. 9, pp. 643~649, 1979.
- 13) Kato, H. and Phillips, O.M.: On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid, J.F.M., Vol. 37, pp. 643~665, 1969.
- 14) Kantha, L.H., Phillips, O.M. and Azad, R.S.: On turbulent entrainment at a stable density interface, J.F.M., Vol. 79, pp. 753~768, 1977.
- 15) Price, J.F.: On the scaling of stress-driven entrainment experiments, J.F.M., Vol. 90, pp. 509~529, 1979.
- 16) Scranton, D.R. and Lindberg, W.R.: An experimental study of entraining, stress-driven, stratified flow in an annulus, Phys. Fluids, Vol. 26, pp. 1198~1205, 1983.
- 17) Niller, P.P. and Kraus, E.B.: One-dimensional Models of the upper ocean, Modelling and prediction of the upper layers of the ocean (E.B. Kraus), pp. 143~172, Pergamon Press, 1977.
- 18) Kundu, P.K.: Self-similarity in stress-driven entrainment experiments, J. Geophys. Res., Vol. 86, No. C3, pp. 1979~1988, 1981.
- 19) 鶴谷広一・中野 晋・一戸秀久：吹送流の混合と乱れ特性，第 31 回海岸工学講演会論文集，pp. 655~659，1984.
- 20) Sherman, F.S., Imberger, J. and Corcos, G.M.: Turbulence and mixing in stably stratified waters, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 10, pp. 267~288, 1978.
- 21) Patnaik, P.C., Sherman, F.S. and Corcos, G.M.: A numerical simulation of Kelvin-Helmholtz waves of finite amplitude, J.F.M., Vol. 73, pp. 215~240, 1976.
- 22) 椿東一郎・小松利光：2次元表面密度噴流における流れの特性と連行現象，土木学会論文報告集，No. 273. pp. 69~81, 1978. (1989.6.16.受付)