

# 水路床勾配が漸変する開水路流れ場の解析

## AN ANALYTICAL STUDY ON A FLOW FIELD IN AN OPEN CHANNEL WITH GRADUALLY VARIED BED SLOPE

古川恵太\*・市村知也\*\*・関根正人\*\*\*・吉川秀夫\*\*\*\*

By Keita FURUKAWA, Tomoya ICHIMURA, Masato SEKINE and Hideo KIKKAWA

The flow in an open channel with the non-uniformly sloping bed represents the complicated flow pattern, and the feature of the flows are made clear by the experiments. The following 3 types of flows can be observed: I) the super-critical flow, II) the sub-critical flow, and III) the transitional flow with the undular jump. A distinct inner turbulent boundary layer can be observed for each type of flow.

It is important to analyze the flow pattern in the case II) practically. The velocity distribution near the bed follows the  $1/n$ -th power law even in such cases. The bed shear stress can be estimated by turbulent boundary layer equation, and the distribution of vorticity along the stream bed can be estimated by using the power law of velocity distribution.

Consequently, the numerical simulation model based on the above facts is proposed by using the rotational form of Navier-Stokes equation.

**Keywords:** non-uniform channel bed slope, velocity distribution, vorticity, dispersion of eddies

### 1. はじめに

ダム、せき等による堆砂、河道改修工事などのために、河床勾配の変化が生じるとき、その近傍における流れおよび底面せん断力を的確に推定することは、河川の保全を考えるうえで重要なことである。しかし、従来の研究においては、流れの境界条件の決定が困難であるために、漸変する河床勾配を取り扱ったものが少ないが、その代表的な例としては、Coles<sup>1)</sup>のように、後流の影響を考慮して相似則を利用し、流速分布形を決定する半理論的な検討や、境界条件を壁法則により規定し、 $x$ - $\epsilon$ モデルなどの乱流モデルを用いた数値シミュレーションによる検討等がある<sup>2)</sup>。前者に関しては、境界条件が Wake-function に組み込まれるために、汎用性に関して問題があると思われる、後者は壁法則などにより境界条件が明確に定義されているが、流れ内部の計算において既知量として与えなければならない定数に、十分検討されていない

いものが含まれたり、計算そのものの複雑さが、計算領域の変化を安易に取り込めないといった問題がある。本研究では、これらの問題点を解決するために、2つの異なる勾配をもった水路床が滑らかに接合されている二次元水路における流れを例にとり、実験を通して境界条件について底面せん断力より検討を加え、それを考慮に入れた数値シミュレーションにより、流れ場を精度良く確定する方法を提案する。

### 2. 実験概要

実験水路は、長さ 5 m、幅 15 cm のアクリル製長方形断面開水路を用い、河床形状を緩勾配から急勾配へと滑らかに変化する形状でモデル化したものである。実験および解析のための座標は、水路上流端を始点として、流れ方向に  $x$  軸をとり、鉛直上向きに  $y$  軸を設定した(図-1)。ゆえに、流れ方向縦断面内の渦度  $\omega$  を、 $y$  方向

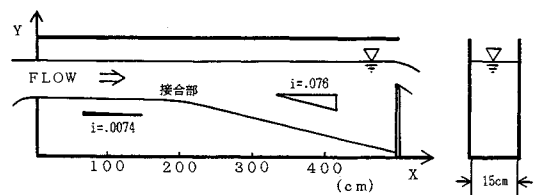


図-1 水路概形

\* 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所  
(〒239 横須賀市長瀬 3-1-1)

\*\* 早稲田大学大学院 理工学研究科  
(〒160 新宿区大久保 3-4-1)

\*\*\* 正会員 工博 早稲田大学助手 理工学部土木工学科  
(同上)

\*\*\*\* 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科  
(同上)

表—1 実験条件

RUN	流量 (l/sec)	Fr数 (at x=190cm)	Re数 ( $\times 10^4$ )	流況	流速測定法*	底面	せき上げ
1	4.00	1.04	2.66	射流	Pt	粗面	なし
2	2.64	1.42	1.16		P		
3	4.02	1.06	2.68				
4	6.17	1.18	4.11				
5	1.65	0.18	1.12	常流		滑—粗 滑面 粗面	あり
6	1.85	0.11	1.24				
7	2.37	0.20	1.58				
8	4.92	0.41	3.28		L		
9	8.33	0.57	5.55				
10	3.38	0.28	2.25				
11	3.63	0.23	2.42		L, H, P		
12	3.63	0.23	2.42		L, H		
13	2.34	0.13	1.56		P		
14	2.57	0.51	1.71				
15	4.07	0.18	2.71				
16	4.88	0.65	3.25				
17	8.43	0.49	5.62				
18	7.68	0.71	5.12				
19	2.64	0.93	1.76	Undular jump			
20	5.00	0.99	3.33				
21	7.36	1.06	4.91				

\* H: 熱線流速計, L: レーザードップラー流速計, P: プロペラ流速計, Pt: ビトープ管

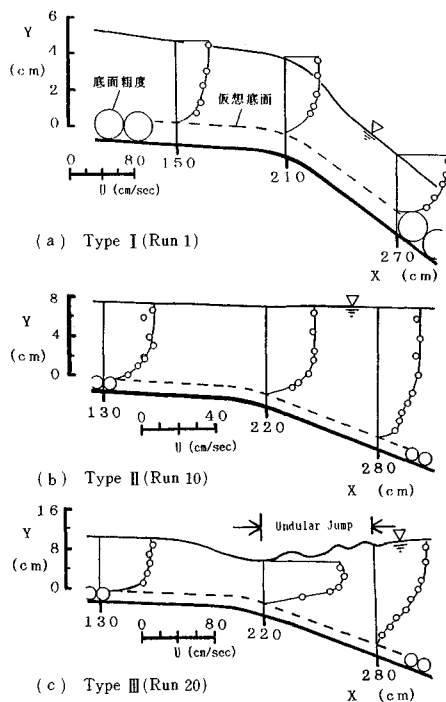
流速  $v$  および  $x$  方向流速  $u$  を用いて,

$$\omega = dv/dx - du/dy \dots\dots\dots (1)$$

と定義し、左回りが正となる。水路床は、 $x < 190$  cm の上流部において 100 分の 1 の勾配、 $x > 220$  cm の下流部において 10 分の 1 の勾配に設定して、その間 30 cm に接合部を設け、滑らかに接合させた。水路床はベニヤ板をペンキ仕上げた滑面であり、また、流れの底面からの影響を調べるために、水路床に粗度として径 1.6 cm のビー玉を密に敷き詰めた場合の実験を行った。水理条件は、表—1 に示すとおりであり、流れが全体にわたって射流状態となっている RUN 1~4, 流れが全体的に常流となっている RUN 5~18, そして、両者の遷移的な流れである RUN 19~21 の 21 ケースを設定した。各 RUN は、流量および下流端せき上げ高によって調整された。ただし、下流端せきからの越流により生じる縮流は、測定断面の流速分布に影響を与えないことを確認している。流速の測定にはビトープ管、径 3 mm の小型プロペラ流速計、一次元レーザードップラー流速計、二次元ホットフィルム流速計を適時選択して用いた。すなわち、流れ場の概要（主流速分布）のみを知るためにはビトープ管、プロペラ流速計を用いて計測を行い、特に常流状態で流れるケースの一部については流速、流向について詳細な計測を行うためレーザ流速計、ホットフィルム流速計を用いた。なお二次元ホットフィルム流速計では  $x$  方向流速  $u$  と  $y$  方向流速  $v$  とを同時に測定した。

### 3. 流れ場の概要

まず、流れ場の概要をとらえるため、形状係数を用いて流れ場の特徴を調べ、次に流速分布および渦度分布に



図—2 代表的流速分布

ついて検討した。

#### (1) 形状係数

発生する流れの水面形・流速分布について、代表例を図—2 に示す。フルード数の変化により、射流状態で流下する流れ (I) と、常流状態で流下する流れ (II), および跳水を伴う遷移状態の流れ (III) の 3 タイプに分類される。これらの変化は、圧力勾配に強く支配されて

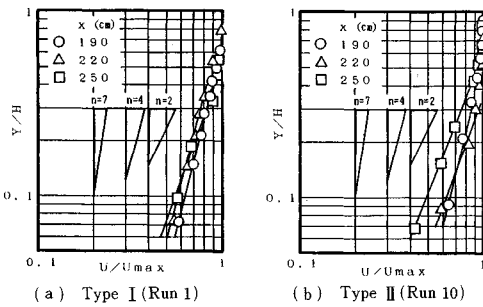


図-3 無次元流速分布

いると考えられるため、この圧力勾配を指標として、流れの特性を明らかにする。また、タイプ（Ⅰ・Ⅱ）の代表的な流れの流速分布を、水深および最大流速で無次元化し、両対数グラフで示すと、図-3 のようにほぼ直線状となり、流速分布のベキ乗則による近似が有効であることを示唆している。なお、図中に、ベキ乗則による流速分布の傾きを示してあるが、この実験結果では底面近傍の流速分布は、ベキ乗数  $n=2\sim4$  とした場合の傾きに一致している。この性質は、特に、水路床勾配変化点以降に顕著に現われている。後章で検討する渦度を媒介としたシミュレーションを行う際、境界条件としてベキ乗則を用いるが、渦度は流速勾配によって決定されるので、このことはベキ乗数の選定を行う際に注意すべき点であることを示唆している。

次に流速分布に関する特性と、圧力勾配の定性的変化の特性を表わす量として、式（2）で定義される形状係数  $H_{12}$  および式（3）で定義される修正形状係数  $H$  を導入する<sup>3)</sup>。

$$H_{12} = \delta_i / \delta_j \dots \dots \dots (2)$$

ただし、 $\delta_i = \int_0^h \left(1 - \frac{u}{u_h}\right) dy$

$$\delta_2 = \int_0^h \frac{u}{u_h} \left(1 - \frac{u}{u_h}\right) dy$$

$$\delta_3 = \int_0^h \frac{u}{U_h} \left\{1 - \left(\frac{u}{u_h}\right)^2\right\} dy$$

ここに、 $h$ : 水深、 $U_h$ : 水面流速

$$\frac{dH}{H} = \frac{dH_{32}}{h_2} = \frac{dH_{23}}{h_3} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $h_2 = -(H_{12} - 1)H_{23}$ 、 $h_3 = (H_{12} - 1)H_{23}$

平板境界層に関する J.C. Rotta らの考察によれば<sup>4)</sup>、 $H=1$  では圧力勾配なしの流れ、 $H>1$  では圧力勾配が負の加速流、 $0.723 < H < 1$  では圧力勾配が正の減速流が生じ、さらに、 $H < 0.723$  では圧力勾配が大きくなり剥離を伴った流れと分類される。まず、図-4 に本実験データによる  $H_{32}$  と  $H_{12}$  の関係を示す。図中破線は Rotta による実験的考察に

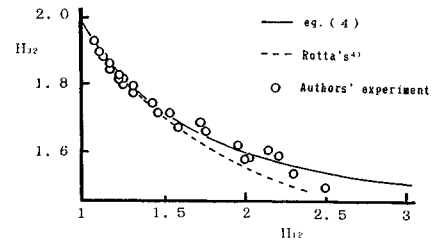


図-4 形状係数

よる解を示している。また、流速分布にベキ乗則を仮定すると  $H_{32}$  と  $H_{12}$  の関係として式（4）を導くことができ、これを実線で示してある。

$$H_{12} = H_{32} / (3H_{32} - 4) \dots \dots \dots (4)$$

本実験のデータはベキ乗則を仮定した実線によく一致しており、この場合のような非一様勾配開水路に発生する流れが、平板上の乱流境界層の流れと同等とはいえないまでも、似た性質をもった流れとして位置づけられることが示され、また、流速分布のベキ乗則による近似が有効であることが知られる。そこで、流速分布にベキ乗則を仮定して、式（3）を解くと、式（5）のように修正形状係数が求まる（Appendix 参照）<sup>5)</sup>。

$$H = 0.5 H_{23} \sqrt{\frac{H_{23}}{H_{23} - 0.5}} \dots \dots \dots (5)$$

式（5）によって  $H$  を求め、 $H_{12}$  との関係を示したものが図-5 である。図中  $0.723 < H < 0.761$  に剥離の表示があるが、これは Rotta, Walz らの考察により剥離が起こり得る値の範囲を示したものである。また、修正形状係数  $H$  に関する Rotta による考察は平板上境界層におけるものであり、式（5）はベキ乗則を仮定した場合のものである。しかし、図-4 の形状係数  $H_{12}$  と  $H_{32}$  の関係図において、Rotta の解とベキ乗則を仮定した式（4）とはそれほどずれがないことから、修正形状係数  $H$  においても両者の差異は小さいと考えられる。この図に示されるように、 $H < 0.9$  の範囲ではプロットが散らばり、 $H > 0.9$  の範囲では、一意の関係があるとしてよい。ここで  $H < 0.9$  の範囲に入る流れは、フルード数が 0.5 より小さい下流部の流れに顕著な性質であるが、レイノルズ数による場合分けはできない。一方、 $H$

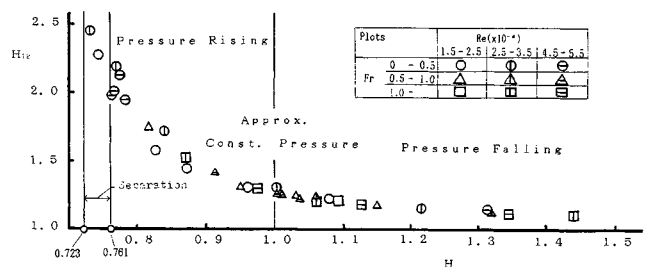


図-5 修正形状係数

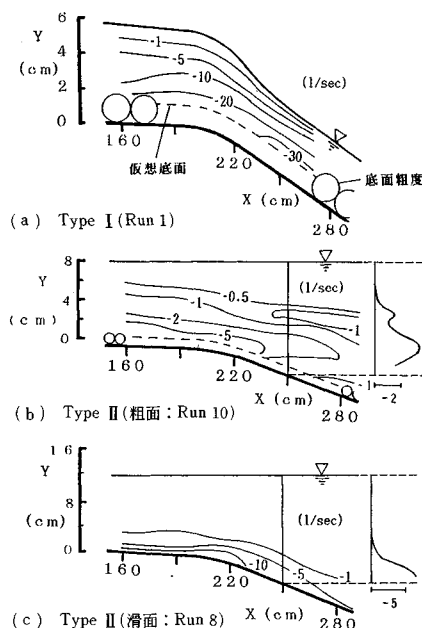
>0.9の範囲に入る流れはフルード数の大きい上流部の流れに対応しているが、この場合もフルード数とレイノルズ数との間に明確な関係を見出すことはできない。また、 $H < 0.9$ の範囲で、フルード数0.5以下の流れに対応するプロットが散らばる原因として、式(2)における積分範囲の問題が挙げられる。ここでは、水路床から水面までを積分範囲にとっているが、下流部においては、勾配変化点付近から新たな内部境界層が発達しているため、この領域では2つの境界層にまたがって積分してしまうことになっている。特に、内部境界層外部の、上流部からの移流による流れが影響を及ぼしていると考えられる。実際に、実測の流速分布からおよその内部境界層厚を見積り、積分範囲を水路床から内部境界層外縁までとすれば、下流部においてもプロットのばらつきはなくなる。以上をまとめると、非一様勾配開水路における流れの特異性は、小さなフルード数をもつ流れの下流部に発生し、そのほかの場合は、乱流境界層としての特徴をもち、ベキ乗則により流速分布を近似することが有意である流れとなっていると考えられる。次節では、この特異性を示す流れの様相を渦度の分布の面から検討する。

## (2) 渦度分布

渦度の定義は、式(1)で示したとおりであるが、測定方法としては、これを離散化した次式を用いる。

$$\omega_{x=n,y=m} = \frac{v_{n+1,m} - v_{n-1,m}}{2\Delta x} - \frac{u_{n,m+1} - u_{n,m-1}}{2\Delta y} \dots\dots (6)$$

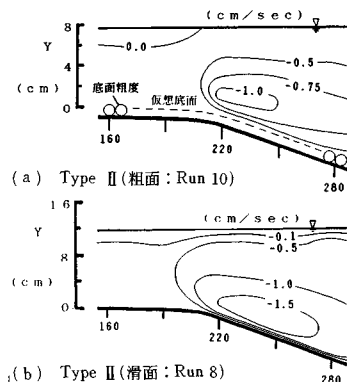
これは、測定面積 $4\Delta x\Delta y$ 内の平均量として渦度を定義しているので、渦度の $x, y$ 方向の変化が一次式で近



図—6 代表的渦度分布

似できない領域では $\Delta x, \Delta y$ の大きさに注意が必要である。測定に際しては、 $u$ 成分の渦度への寄与が大きい点を考慮して、 $y$ 方向の測定ステップを小さくし、式(6)の第2項をより正確に評価するように注意した。タイプ(I・II)の流れ場全体の渦度分布を図—6に示す。図—6(a)は、タイプ(I)の全域射流の流れに、図—6(b), (c)は、タイプ(II)の全域常流の流れにそれぞれ対応している。ただし、図—6(a), (b)は、底面粗度としてビー玉が密に敷き詰められており、図—6(c)は、底面粗度を付けない滑面で実験を行ったケースの結果である。図—6(a), (c)では、底面せん断力によって底面近傍に高渦度域がみられ、特に勾配の接合部では、高渦度域が上方に膨らんでいることより、境界の変化を強く受けるせん断流を誘起し、流れの内部にその影響を及ぼしていることがわかる。図—6(b)においては、基本的にはほかの2ケースと変わらないと考えられるが、下流部( $x=250$  cm以降)において、底面近傍以外に上方にも高渦度域が存在することに特徴がある。この高渦度域は底面近傍から水面に向かう組織的な運動の存在が起源と考えられ<sup>6)</sup>、これによって境界条件の変化が引き起こす流れ場への影響がさらに拡大され、特に、平均流速場により沈降・拡散を推定した場合の物質拡散の状態が、乱れによる沈降速度の変化や上昇流による巻き上げ等によって変化することが予想される。図—6(c)においては底面粗度をもたないために、常流であるにもかかわらず、図—6(b)のような下流部における高渦度域の拡大は顕著でない。このことは高渦度域の拡大が底面からの影響を強く受けていることを支持するものである。

また、これらは鉛直流速分布からも考察することができる。図—7にタイプ(II)の鉛直流速( $v$ )の分布を示す。図—7(a)は粗面の場合の分布であり図—7(b)は滑面の場合の分布である。図から、滑面の場合にみられる水路床勾配変化部近傍の下降流が粗面の場合には緩



図—7 鉛直流速分布

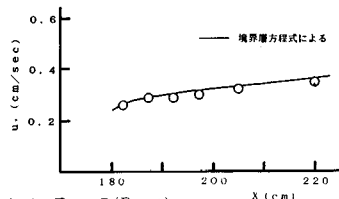
和されていることがわかる。したがって滑面の場合には強い下降流によって高渦度部が底面近傍に押さえられ、一方粗面の場合には下降流が弱いために流れが境界の拡大に追従できず、下部において2つの高渦度部が存在する渦度分布になったと考えられる。

#### 4. 底面境界条件

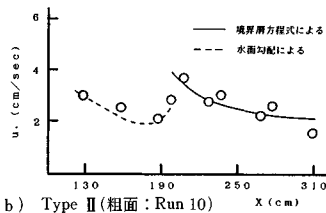
流れが定常であるならば、その流れは境界条件によって一意に決定されていると考えられる。特に、乱流境界層においては、底面の境界条件を正確に判定することは流れの再現のためにも重要である。まず、物理的意味のはっきりしている底面せん断力について考察し、数値シミュレーションのためにその結果を用いて底面渦度の検討を行う。

##### (1) 底面せん断力

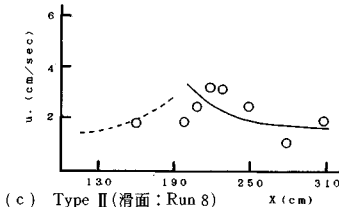
3.(1)の考察により、流れがおよそ内部乱流境界層をもつ流れとして特徴付けられることを利用し、勾配接合部近傍から下部での底面せん断力の変化を、境界層方程式をもとに推定する。著者らは、圧力勾配の項をピエゾ水頭で評価し、内部境界層厚 $\delta$ 、底面せん断力 $\tau_0$ に対して満足すべき結果を与えているので<sup>7)</sup>、本論文でも、この結果を用いて、底面せん断力 $\tau_0$ の評価を行う。図—8に、流速分布に対数則およびベキ乗則を仮定して得られた摩擦速度 $u_*$  ( $=(\tau_0/\rho)^{1/2}$ ) (プロット)と境界層の計算により求めた結果(実線)とを示す。また、接合部より上流においては、流れは水面勾配 $i$ を近似的



(a) Type I (Run 1)



(b) Type II (粗面: Run 10)



(c) Type II (滑面: Run 8)

図—8 底面せん断力

にもつ等流と仮定して得られた摩擦速度 $u_*$ を破線により示した。図—8より、底面せん断力の変化の傾向として、タイプ(I)の流れは接合部より下流で底面せん断力の増加を示し、タイプ(II)の流れでは、接合部でピークをもつ分布形を示している。2つの分布形の違いの原因としては、まず第一に圧力勾配の変化が挙げられる。また、第二の要因として、境界層外縁の流速の変化の違いが指摘できる。タイプ(I)の流れに生じる底面せん断力の増加は、圧力勾配が負であることから、平板境界層をもつ流れとのアナロジーにより、加速流が生じていることが予想され、これが第一の要因である。第二の要因に対する説明としては、境界層外縁では、境界層の発達とともに加速する流れが生じていることにより、やはり、底面せん断力の増加が促されている。一方、タイプ(II)の流れに存在する底面せん断力のピークは、内部境界層の発達に伴う現象とみることができる。すなわち、平板上で境界層が発達する場合と同様に、境界層の開始点でピーク値をとったものとして説明される。

##### (2) 底面渦度

議論を二次元に限るとすれば、流れ場において循環は保存され、この場の内部において渦度が生成されることはない。図—6(b)における高渦度域は、境界からの渦度の移流・拡散により発生していると考えられるので、境界における渦度について検討する。水面では、渦度のないことが予想され、実測値もそのことを支持している。しかし、底面では実測値から直接渦度を読み取ることが困難であるので、以下のような取扱いをした。Navier-Stokes 方程式の $x$ 方向(流れ方向)に対する式を底面から水面まで積分すると、式(7)が得られる。

$$\varepsilon\omega_0 = \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) dy - \int_0^h v\omega dy \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $q^2 = u^2 + v^2$ 。

拡散係数 $\varepsilon$ が未知であるが、ここで拡散係数が水深のみに比例すると仮定して式(8)に示すモデル化を行う。

$$\varepsilon_x = A \cdot h_x / h_{190} \quad \dots\dots\dots (8)$$

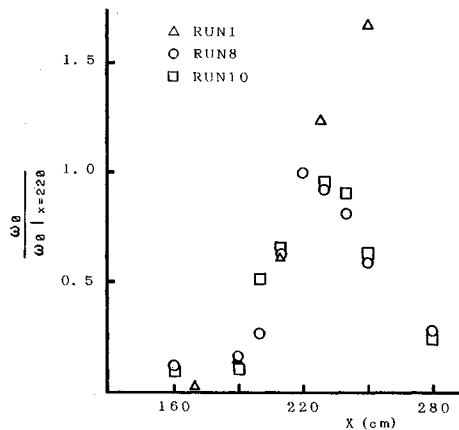
ここに、 $\varepsilon_x$ :  $x$ における拡散係数

$$A = 4 \text{ cm}^2/\text{s}$$

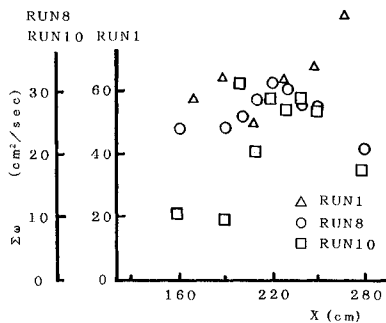
$h_x$ :  $x$ における水深

$h_{190}$ :  $x=190 \text{ cm}$ における水深

また流速 $u, v$ 、渦度 $\omega$ に実験値を用いれば式(7)によって底面渦度を求めることができる。これを $x=190 \text{ cm}$ における底面渦度により無次元化して示したものが図—9である。この分布は接合部付近で最大値をとっており、図—8におけるタイプ(II)の底面せん断力分布によく対応している。また、ある断面において、各メッシュの渦度にメッシュの面積を乗じ、それらをすべて加



図—9 底面渦度



図—10 循環

えることによって、その断面を囲む有限面積内の循環を求めることができる。これを図—10に示すが、この循環の分布が、図—9の底面渦度分布と同様に接合部付近で最大値をとる形状となることから、断面内の循環が底面渦度に強く支配されていることがわかる。しかし、これは厳密な議論ではなく、特に渦度の形成・消失に関する三次元的な機構に立ち入って検討していないので、渦度の総和としての循環が減少することを説明できない。図—10は、底面渦度を境界条件として採用することが可能であることを、流れの代表量としての循環を一例として示している。本節では、底面渦度の分布が底面せん断力の分布に対応していること、その渦度が流れ場を支配していることを確認し、次章の渦度方程式による数値計算への準備として、境界条件としての渦度分布を概観するにとどめる。

## 5. 数値シミュレーション

前章までの考察で、流れの概況およびそれを支配していると思われる境界条件についての知見を得た。特にタイプ(Ⅱ)で現われるような渦度分布は、非一様勾配開水路における流れの特異性を示していると考えられる。接合部からの影響が高渦度部の拡大にみられるように、

ほぼ水深スケールで下流部へ及んでいる点に着目すると、接合部が滑らかな変化をしているにもかかわらず、粗度急変流や段落ち流れのように流れに影響を与えていることがわかる。この流れの支配要因としての影響を再現することができれば、流れ全体の再現が可能であると考え、数値シミュレーションを試みる。数値シミュレーションを行うにあたり、時間平均の流速成分の分布を再現することを目標にする。

### (1) 支配方程式

数値シミュレーションのために、流れ場をモデル化した方程式系を導入する。計算を能率的に行うためにも、方程式系の選択、その取扱いは重要である。特に考慮した点を以下に列挙する。

- ① 乱流である流れを再現できること。
- ② 式形・パラメーター等が単純であること。
- ③ 境界条件を的確に取り込めること。

①は、乱流境界層を含む流れを再現するのであるが、時間的に平均化された流れの解を得ることを目標にしているので、②にも関連するが、乱流モデルを構築して行う解析や、非定常解析を行うということではない。②に関しては、複雑なモデル化をしないという意味のほかに、式の離散化・プログラムを容易にするという意味をもつ。境界形状が複雑になるとき、このことは重要な意味があると考えられる。③に関しては、方程式の離散化の方法とも関係あるが、逆にいえば決定可能な確からしい境界条件から計算を始めるためにも、十分に考慮されるべき点である。以上のような点を考慮し、運動方程式としては、渦度  $\omega$  で表示された定常二次元の Navier-Stokes 方程式、連続式として流れ関数  $\phi$  を導入した  $\omega$ - $\phi$  方程式系を採用した(式(9・a, b))。ただし、このモデルでは、循環の消失過程を含まず、全体としては循環の保存場としての解を得ることになる。

$$U \cdot \nabla \omega = -\nu \Delta \omega \quad (9 \cdot a)$$

$$\Delta \phi = -\omega \quad (9 \cdot b)$$

ただし、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla$$

$$U = (u, v)$$

$$u = \partial \phi / \partial y$$

$$v = -\partial \phi / \partial x$$

### (2) 境界条件

計算領域は上流端を  $x=0$  cm、下流端を  $x=310$  cm とし、水面と底面で囲まれた範囲で、流れ方向に 24 点、鉛直方向に約 30 点で直交メッシュに分割した。ただし、粗度のある底面では、粗度頂から 0.4 cm 下方に仮想底面を想定し、計算上の底面としている。境界条件としては、流れ関数・底面渦度・上下流端流速を与えた(表—2)。底面渦度に関して、若干の説明を補足する。流れ場

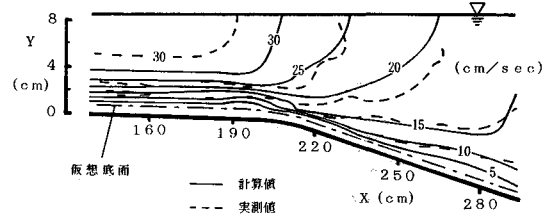
表—2 計算条件

流れ開数	・水面 : 流量に対応する値
	・底面 : 0
上下流端流速	・上下流端 : 流速に対応する値
	・ベキ乗則を仮定した流速分布 $U = U_{\max}(Y/H)^{1/n}$
底面過渡	・せん断力に対応する値 (本文参照)
拡散係数	・水深に比例した値 ( $x = 190 \text{ cm}$ において $\varepsilon = 4 \text{ cm}^2/\text{sec}$ )

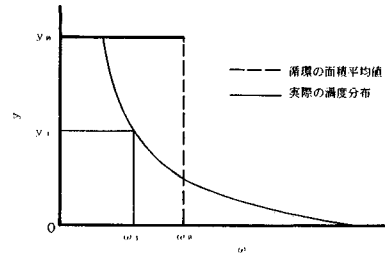
内部が循環の保存場となっているので、上流端で与えた過渡分布のもっている過渡を除けば、底面過渡が唯一の過渡供給源となり、流れの決定に大きな支配力をもつと考えられる。すでに著者らは、図—9で示した底面過渡分布を既知量として底面境界条件に与え、本研究と同様の $\omega$ - $\psi$ 方程式系による数値計算を行っているが<sup>8)</sup>、ここでは、4.(1)で示した境界層方程式から決定される底面せん断力を用いて、底面過渡分布を陰に与えた。まず、境界層方程式を解くことによって底面せん断力が求められ、同時に境界層厚・境界層上限流速が与えられるので、ベキ乗則を用いて境界層内の流速分布が仮定できる。次に、最下メッシュ内の循環を、この流速分布より求め、その面積平均値を底面過渡として、底面上の計算点に境界条件として与える。この方法では、上記のように境界層を過渡によって近似表現しているので、これから計算される流速の再現性はよく、底面過渡を陽に与えるときの物理的意味の曖昧さを回避できる。ただし、境界層方程式を解くルーチンが必要となるため、全体の計算量は増加する。境界層内部の過渡の水深方向変化が一次式で近似できないため、メッシュ内の循環の平均値を直接与えると不都合が生じるために、次節で示すような修正が必要となる。拡散係数は乱れの場に応じて局所的に変化する値をもつと考えられるが、本計算では先に用いた式(8)で示すように、乱流拡散のスケールが水深によってのみ規定されると仮定し、一断面内では水深に比例する一定値を与えるモデル化を行い、計算を簡略化した。また、この値の妥当性については後に検討する。

### (3) 計算結果

全体の計算は、大きく分けて、底面せん断力を求めるルーチン①と、流れ場内部を計算するルーチン②から構成される。ルーチン①においては、流れ場をポテンシャル流れ・せん断流・内部境界層の流れに区分し、流れを強く支配する項以外を省略して、内部境界層内の流速分布に対するベキ乗数 $n$ 、および境界面上の流速など、流れの概要を仮定することにより、内部境界層の境界条件(境界層厚 $\delta$ 、底面摩擦速度 $u_*$ 、境界層上限流速 $u_0$ )を求め、境界層方程式を解くが、このとき境界条件として必要な内部境界層上限せん断力 $\tau_0$ を合理的に決定する方法がない。しかし、仮に $\tau_0=0$ とおけばこの方程式



図—11 計算結果(主流速)



図—12 最下メッシュ内過渡概念図

を解くことができ、このような条件でルーチン①のみを実行した場合においても、流れの概要を流れ場全域にわたって示すことができる<sup>9)</sup>。しかし、ルーチン①は境界層の外側の流れ場について多くの仮定を含むために、ルーチン②によって流れ場を統一された支配方程式で解き、全体の流れ場を決定する必要がある。さらに、実際の計算においては、ルーチン②によって計算された流速分布における $\tau_0$ を用いて、ルーチン①を再度実行し、より厳密な境界条件を算出する必要がある。ルーチン①とルーチン②を交互に実行することになる。ただし今回の計算においては、 $\tau_0=0$ と置いて解いたルーチン①による計算結果が、実際の流れ場をかなりよく再現していたので、ルーチン①とルーチン②を単独に実行し、流速場のよい再現結果を得ることができた。タイプ(Ⅱ)のRUN 10を代表例として計算したものを実測値とともに図—11に示す。

本計算で最も留意した点は、底面過渡の見積もりである。図—12において $y=0$ を底面、 $y=y_0$ を最下メッシュの高さとする、メッシュ内の循環の面積平均値 $\omega_0$ は、破線で示されるようにメッシュ内で一様に分布している。一方、流速をベキ乗則によって仮定した場合の過渡分布は、非線形性が強く、実線で示されるような分布になっている。ここで、計算上で必要とされる点を $y_1$ とすると $y_1$ における実際の過渡と循環の平均値との値は必ずしも一致しない。いま、 $y_1$ における実際の過渡を $\omega_1$ とすると、循環の平均値との比 $\omega_0/\omega_1$ は、仮定した流速分布のベキ乗数 $n$ に強く依存する値となる。仮に、 $y_1=y_0/2$ とすると、 $\omega_0/\omega_1$ の値は $n=7, 4, 2$ の場合それぞれ3.9, 2.4, 1.4となる。また、今回の数値計算では最下メッシュの形状は三角形となっているため、 $y_1=$

2  $y_0/3$  と考えれば  $n=4$  のとき  $\omega_0/\omega_1=3.0$  となる。以上の考察より、実際に境界条件として与える底面渦度は  $\omega_0/3$  程度が妥当であると考えられ、この値を中心に、さまざまな値を用いて計算を行ったが、著者らの実験では  $\omega_0/4$  が適当であった。また、渦度分布の非線形性は、底面近傍において極端に強いが、それ以外の部分で境界条件（渦度）を与える場合には、このような低減を行う必要はなく、該当するメッシュの循環の平均値をそのまま与えて解を得ることができる。実際、本ケースの場合最下メッシュの1つ上の部分で境界条件を与え、計算を行ったが、十分な精度で流速分布を計算することができた。なお、式（8）で与えた拡散係数の値については、さらに合理的な決定方法について研究する必要がある。しかし今回の計算の場合には、拡散係数として同オーダーの値を与えるのであれば、流れ場に対してそれほど影響を及ぼすものではなく、仮に流れ場全域に一定値（たとえば  $\epsilon=4\text{ cm}^2/\text{s}$ ）を与えた場合でも、計算結果にはほとんど影響が現われなかった。本流れ場においては、渦度の移送方程式における移流項と拡散項のオーダーの比は、およそ10:1（あるいはそれ以上）であり、移流項が支配的であることがわかる。したがって拡散係数についてはその影響がより明確に現われる流れ場を用いて調べる必要があると考えている。本計算の意義は、境界条件のみで、漸変する流れ場全体を再現できることを示す点にあり、特に今回のケースのように緩慢な境界形状の変化を含む場合でも、境界条件を正しく見積もることによって、複雑なモデルを用いることなく、数値シミュレーションで流れ場を再現できることが示された。

## 6. おわりに

本論文では、非一様勾配開水路における流れについて、実験と数値シミュレーションから検討してきた。以下に本論文で得られた主な結論を列挙する。

（1）滑らかな底面の勾配変化においても、流れ場全体の特徴は、乱流境界層をもつ流れとして区分される。

（2）境界条件としての底面せん断力は、適当な仮定を用いることによって、境界層方程式より解くことが可能であり、流速分布にベキ乗則を用いることは有意である。

（3）底面せん断力を底面渦度に置き換えることによって、渦度方程式を用いた数値シミュレーションによって流れの解析を行うことが可能となり、この方法による平均流速の再現性は良好である。

（4）境界条件として与える底面渦度は、最下メッシュ内の循環の面積平均値を、渦度分布の非線形性を考慮して修正することによって適切に決定することができる。

終わりに、本論文をまとめるにあたって、早稲田大学流体実験室の方々に実験・解析等、協力して頂いたことを記してお礼申し上げます。また、本研究は科学研究費補助金（奨励研究 A、課題 #63750538、研究代表者 関根正人）の補助を受けてなされました。

## Appendix

式（3）を  $H_{32}$  に関して積分することにより次式のように変形する。

$$H = \exp \left[ \int_{(H_{32})_{\infty}}^{H_{32}} \frac{dH_{32}}{(H_{12}-1)H_{32}} \right] \dots\dots\dots (10)$$

ここで積分の下限値  $(H_{32})_{\infty}$  は圧力勾配がない場合の流れの平均値である。式（10）に式（4）を代入することにより次式を得る。

$$H = \exp \left[ \int_{(H_{32})_{\infty}}^{H_{32}} \frac{3 H_{32} - 4}{4 H_{32} - 2 H_{32}^2} dH_{32} \right] \dots\dots\dots (11)$$

式（11）の積分を実行することにより、次式のように整理することができる。

$$H = \frac{(H_{32})_{\infty}}{H_{32}} \left( \frac{2 - (H_{32})_{\infty}}{2 - H_{32}} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (12)$$

$H_{32}=1/H_{23}$  の関係を用いて式（12）を書き直すと次式を得る。

$$H = \alpha \cdot H_{23} \sqrt{\frac{H_{23}}{H_{23} - \beta}} \dots\dots\dots (13\cdot a)$$

$$\alpha = (H_{32})_{\infty} \sqrt{1 - 0.5(H_{32})_{\infty}} \dots\dots\dots (13\cdot b)$$

$$\beta = 0.5 \dots\dots\dots (13\cdot c)$$

ここで係数  $\alpha$  を求めるために  $(H_{32})_{\infty}$  の値について考察する。

式（2）より

$$(H_{32})_{\infty} = \frac{\delta_3}{\delta_2} \bigg|_{\partial p / \partial x = 0} \dots\dots\dots (14)$$

であり、 $\delta_2$ ,  $\delta_3$  はベキ乗則を適用することによりそれぞれ次のように表わすことができる。

$$\delta_2 = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \delta \dots\dots\dots (15)$$

$$\delta_3 = \frac{2n}{(n+1)(n+3)} \delta \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $\delta$  は境界層厚。

式（14）に式（15）、（16）を代入することにより  $(H_{32})_{\infty}$  として次式を得る。

$$(H_{32})_{\infty} = \frac{2(n+2)}{n+3} \dots\dots\dots (17)$$

式（17）においてベキ乗数  $n$  が2~10の範囲のとき  $(H_{32})_{\infty}$  の値は1.6~1.85となり、このとき式（13・b）の  $\alpha$  はほぼ0.7~0.5の値をとることになる。本論文においては、式（5）は  $H$  の定性的な傾向を調べるために用いたものであり、代表値として  $\alpha=0.5$  を用いている。

なお、E. Truckenbrodt<sup>3)</sup> の論文においては、 $\alpha=$



0.5442 であり、かつ式 (13・c) の定数  $\beta=0.5049$  となっているが、これらは実験値による考察によってそれぞれ変更されたものである。

#### 参 考 文 献

- 1) Coles, D. : The Law of the Wake in the Turburent Boundary Layer, J. F. M., Vol. 1, pp.191~226, 1965.
- 2) Ben J. Alfrink and Leo C. van Rijn : Two-Equation Turburence Model for Flow in Trenches, J. Hyd. Eng., ASCE, Vol.109, No.7, pp.941~958, 1983.
- 3) Truckenbrodt, E. : Neuere Erkenntnisse uber die Berechnung von Stromungsgrenzschichten mittels einfacher Quadraturformeln, Teil I, Ingenieur-Archiv 43, pp.9~25, 1973.
- 4) Schlichting, H. : Boundary Layer Theory (seventh english edition), McGraw-Hill, pp.671~677, 1978.
- 5) 3) に同じ.
- 6) 古川・市村・岡本・吉川 : 貯水池流入部における流れの二次元特性について, 第32回水理講演会論文集, pp.281~286, 1988.
- 7) 古川・萩原・吉川・関根 : 非一様勾配開水路における境界層の発達に関する研究, 第31回水理講演会論文集, pp.407~412, 1987.
- 8), 9) 7) に同じ.

(1989. 3. 22・受付)