

トラス構造物の応力近似式に関する一考察

A STUDY ON STRESS APPROXIMATIONS OF TRUSS STRUCTURES

杉本博之*

By Hiroyuki SUGIMOTO

Several stress approximation formulas of truss structures are investigated analytically. Several approximation formulas of the stress of i -th member are shown analytically and compared with each other in the following four special cases, (1) statically determinate structures, (2) only the sectional area of i -th member is variable, (3) the sectional areas of the members except for the i -th member are variables, and (4) the sectional area of i -th member approached to zero. It is concluded that the approximation formulas with respect to reciprocal variables, especially the force approximation with respect to reciprocal variables, are superior to the others for the stress approximations of the truss optimization.

Keywords : force approximation, reciprocal variable, truss optimization

1. ま え が き

何らかのシステムの設計を数理計画法で行う場合、かなりの回数のシステムの解析を必要とする。構造システムの最適化の場合、対象とする構造物の解析にはかなりの計算時間がかかるのが一般であるので、最適設計を得るための計算時間の大部分は、構造解析に占められる。そのため、構造解析の回数が少ないことが、効率的な構造最適設計法の条件の1つになる。

近似の概念を応用する構造最適設計法は、その条件を満足する最適設計法の1つである。そこでも、近似最適化問題の最適化には、双対法、GRG¹⁾等の数理計画法が用いられるが、その最適化の過程で厳密な構造解析は要求されない。厳密な構造解析は、近似最適化問題の作成にのみ用いられ、最適化の過程では、その近似問題の解析のみが要求される。そのため、厳密な構造解析の回数は、かなり減少することになる。また、近似問題は、関数の線形近似を基本にして作成されるので、その解析のための計算時間は、厳密な構造解析を含む原問題の解析に比べてはるかに少ない。

著者は、近似問題の作成において、双対法に代表され

る優れた数理計画法を用いるための定式化のみでなく、できるだけ原問題に近い近似問題を作成し、それを何らかの数理計画法で解くというアプローチもあることを示した²⁾。また、骨組構造物の応力近似式について、従来から用いられている、応力を順変数あるいは逆変数に関して線形近似する応力近似式、およびVanderplaatsら³⁾の部材内力を順変数に関して線形近似する応力近似式のほかに、部材内力を逆変数に関して線形近似する応力近似式等、種々の応力近似式のあることを示し、トラス構造物と一般の骨組構造物において、数値計算により各応力近似式の優劣を論じた⁴⁾。

数値計算の結果、一般に逆変数に関する近似式が、順変数に関する近似式より優れている等の事項が得られた。その後、トラス構造物の4種類の応力近似式、つまり、応力を順変数に関して線形近似する応力近似式、応力を逆変数に関して線形近似する応力近似式、軸力を順変数に関して線形近似する応力近似式、および軸力を逆変数に関して線形近似する応力近似式の性質と優劣について、理論的な考察を加えたので、ここに報告するものである。

2. トラス構造物の最適設計

部材断面積を設計変数とするトラス構造物の最適設計

* 正会員 工博 室蘭工業大学助教授 工学部土木工学科
(〒050 室蘭市水元町 27-1)

問題を簡単に書くと、次のようになる。

目的関数： $O(A) \rightarrow \min$ (1)

制約条件：

応力： $g_i^s(A) = \sigma_i(A) - \sigma_a \leq 0 \quad (i=1 \sim n)$ (2)

変位： $g_j^d(A) = \delta_j(A) - \delta_a \leq 0 \quad (j=1 \sim m)$ (3)

上下限： $A_i^l \leq A_i \leq A_i^u \quad (i=1 \sim n)$ (4)

設計変数： $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

ここで、 O は目的関数、 g_i^s は応力に関する制約条件式、 g_j^d は変位に関する制約条件式、 σ_i は i 部材の応力度、 σ_a は許容応力度、 δ_j は節点変位、 δ_a は許容変位量、 A_i は i 部材の断面積、 A_i^u 、 A_i^l は i 部材の断面積の上下限界である。 n は部材数、 m は拘束される変位の数である。

トラス構造物の最適設計問題は、実際はもっと複雑であるが、ここでは、説明に必要な最小限の数式のみを示した。

最適設計の過程では、式 (1)~(3) の値を求める必要がある。 δ_a は一般に定数であり、 σ_a は部材断面積の関数だとしても、その計算は容易であるが、応力 σ_i と変位 δ_j を求めるのに構造解析が必要となる。それを近似式の計算で置き換えることになるが、 δ_j と σ_i のうち、 δ_j は一般に逆変数に関する線形近似が良いといわれている。一方、 σ_i については種々の近似式が考えられるので、それらについて以下で検討を加えることにする。

3. 応力近似式の理論的考察

(1) 変位法による軸力および応力の計算

後述の応力近似式のために、変位法による軸力および応力の計算について、ここで簡単に説明しておく。

変位法により節点変位 U が計算されたとすると、部材 i の軸力 F_i および応力 σ_i は次式で計算される。

$F_i = A_i d_i u_i$ (5)

$\sigma_i = F_i / A_i$ (6)

$= d_i u_i$ (7)

ここで、 d_i は i 部材の両端の節点座標のみに関するマトリックス、 u_i は i 部材の両端の節点変位のベクトルで、それぞれ次式である。

$d_i = \frac{E}{l_i} [-\cos \alpha_i \quad \sin \alpha_i \quad \cos \alpha_i \quad -\sin \alpha_i]$ (8)

$u_i = \{u_i^l \quad v_i^l \quad u_i^r \quad v_i^r\}$ (9)

ここで、 E は弾性係数、 l_i は i 部材の部材長、 α_i は Fig. 1 に示すように i 部材の傾き角、 u_i^l 、 v_i^l は i 部材左節点の水平および垂直変位、 u_i^r 、 v_i^r は i 部材右節点の水平および垂直変位で、それぞれ Fig. 2 に示されている。

(2) 各応力近似式の記号の定義

以降の記述を簡潔にするために、以下のように各応力近似式を定義する。

$\sigma_i^{s/p}$ ：応力を順変数に関して線形近似する応力近似式

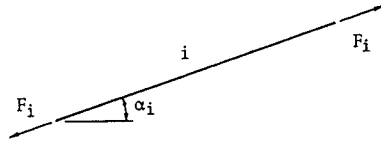


Fig. 1 Axial force of i -th member.

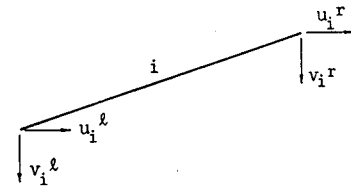


Fig. 2 Displacements of i -th member.

$\sigma_i^{s/r}$ ：応力を逆変数に関して線形近似する応力近似式

$\sigma_i^{f/p}$ ：軸力を順変数に関して線形近似する応力近似式

$\sigma_i^{f/r}$ ：軸力を逆変数に関して線形近似する応力近似式

ここで、順変数とは部材断面積そのものであり、逆変数 ξ_i は部材断面積の逆数で次式である。

$\xi_i = \frac{1}{A_i}$ (10)

ある関数 ϕ の、順変数に関する微係数と逆変数に関する微係数との間には次の関係がある。

$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \phi}{\partial A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \xi_i} = -A_i^2 \frac{\partial \phi}{\partial A_i}$ (11)

(3) 各応力近似式の誘導

各応力近似式は、次のように定義される。

$\sigma_i^{s/p} = \sigma_i^0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0)$ (12)

$\sigma_i^{s/r} = \sigma_i^0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \xi_j} \right)^0 (\xi_j - \xi_j^0)$ (13)

$\sigma_i^{f/p} = \frac{1}{A_i} \left\{ F_i^0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0) \right\}$ (14)

$\sigma_i^{f/r} = \frac{1}{A_i} \left\{ F_i^0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi_j} \right)^0 (\xi_j - \xi_j^0) \right\}$ (15)

ここで、上付きの (0) は、現在の変数の値、あるいは現在の変数に対応するそれぞれの値を意味する。

式 (11)~(15) に、式 (5)、(7)、(10) および (11) を代入して整理する。 i 部材の応力に対しては、 i 部材に関する変数と、そのほかの部材に関する変数とは寄与の程度が違うと考えられるので、 A_i に関する項と A_j ($j=1 \sim n, j \neq i$) に関する項は別にして整理した。

$\sigma_i^{s/p} = d_i \left\{ u_i^0 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_i} \right)^0 (A_i - A_i^0) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0) \right\}$ (16)

$= d_i u_i^0$ (17)

$$\sigma_i^{S/R} = d_i \left\{ u_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_i} \right)^0 (A_i - A_i^0) + \sum_{j=1}^n \frac{A_j^0}{A_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0) \right\} \dots\dots\dots(18)$$

$$= d_i u_i^R \dots\dots\dots(19)$$

$$\sigma_i^{F/D} = d_i \left\{ u_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_i} \right)^0 (A_i - A_i^0) + \sum_{j=1}^n \frac{A_j^0}{A_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0) \right\} \dots\dots\dots(20)$$

$$\sigma_i^{F/R} = \frac{A_i^0}{A_i} d_i \left\{ \left(2 - \frac{A_i^0}{A_i} \right) u_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_i} \right)^0 (A_i - A_i^0) + \sum_{j=1}^n \frac{A_j^0}{A_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0) \right\} \dots\dots\dots(21)$$

ここで、 u_i^D , u_i^R は、変位の順変数および逆変数に関する線形近似式で、次式である。

$$u_i^D = u_i^0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0) \dots\dots\dots(22)$$

$$u_i^R = u_i^0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \right)^0 (\xi_j - \xi_j^0) \dots\dots\dots(23)$$

式 (17), (19) より、 $\sigma_i^{S/D}$ は変位の順変数に関する線形近似を基本にした応力近似式であり、 $\sigma_i^{S/R}$ は変位の逆変数に関する線形近似を基本にした応力近似式であることがわかる。変位の近似式としては、 u_i^D より u_i^R の方が優れている⁵⁾ ことより、 $\sigma_i^{S/R}$ が $\sigma_i^{S/D}$ より優れているのは明らかである。

このほか、 $\sigma_i^{S/D}$ が線形関数であるのに対し、 $\sigma_i^{S/R}$, $\sigma_i^{F/R}$ が非線形関数、 $\sigma_i^{F/D}$ は A_i に関して非線形関数、 A_j ($j=1 \sim n, j \neq i$) に関しては線形関数である。部材断面面積に関して、応力が線形ということは考えられないので、非線形関数の質にもよるが、この点からも $\sigma_i^{S/D}$ が他の近似式に勝つことは難しいと考えられる。

これだけでは、各応力近似式の特性は明確にならないので、次の特別な場合 4 ケースについて検討を加える。

(4) 特別な場合の応力近似式

a) 静定構造の場合

まず最初に、対象とする構造物が静定の場合を考える。このとき、

$$\frac{\partial F_i}{\partial A_j} = \frac{\partial F_i}{\partial \xi_j} = 0 \quad (j=1 \sim n) \dots\dots\dots(24)$$

となるので、各応力近似式は次のようになる。

$$\sigma_i^{S/D} = \sigma_i^0 + \frac{\partial(F_i/A_i)^0}{\partial A_i} (A_i - A_i^0) = \sigma_i^0 \left(2 - \frac{A_i^0}{A_i} \right) \dots\dots\dots(25)$$

$$\sigma_i^{S/R} = \sigma_i^0 + \frac{\partial(F_i/A_i)^0}{\partial \xi_i} (\xi_i - \xi_i^0) = \frac{\sigma_i^0 A_i^0}{A_i} = \frac{F_i^0}{A_i} \dots\dots\dots(26)$$

$$\sigma_i^{F/D} = \frac{F_i^0}{A_i} \dots\dots\dots(27)$$

$$\sigma_i^{F/R} = \frac{F_i^0}{A_i} \dots\dots\dots(28)$$

静定構造の場合の応力は、

$$\sigma_i = \frac{F_i^0}{A_i} \dots\dots\dots(29)$$

であるので、この場合、 $\sigma_i^{S/R}$, $\sigma_i^{F/D}$ および $\sigma_i^{F/R}$ は、厳密な応力と一致することになる。

b) $A_j = A_j^0$ ($j=1 \sim n, j \neq i$) の場合

これは、 i 部材の部材断面面積のみを変数とし、その他の部材断面面積は初期の状態に固定した場合である。

このとき、各応力近似式は次のようになる。

$$\sigma_i^{S/D} = d_i \left\{ u_i^0 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_i} \right)^0 (A_i - A_i^0) \right\} \dots\dots\dots(30)$$

$$\sigma_i^{S/R} = d_i \left\{ u_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_i} \right)^0 (A_i - A_i^0) \right\} \dots\dots\dots(31)$$

$$\sigma_i^{F/D} = d_i \left\{ u_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_i} \right)^0 (A_i - A_i^0) \right\} \dots\dots\dots(32)$$

$$\sigma_i^{F/R} = \frac{A_i^0}{A_i} d_i \left\{ \left(2 - \frac{A_i^0}{A_i} \right) u_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_i} \right)^0 (A_i - A_i^0) \right\} \dots\dots\dots(33)$$

上式のように、この場合 $\sigma_i^{S/R}$ と $\sigma_i^{F/D}$ は等しく、

$$\sigma_i^{F/D} = \sigma_i^{S/R} \dots\dots\dots(34)$$

となる。

c) $A_i = A_i^0$ の場合

これは、 i 部材の部材断面面積のみを初期の状態に固定し、他の部材の部材断面面積を変数とした場合である。

このとき、各応力近似式は次のようになる。

$$\sigma_i^{S/D} = d_i \left\{ u_i^0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0) \right\} \dots\dots\dots(35)$$

$$\sigma_i^{S/R} = d_i \left\{ u_i^0 + \sum_{j=1}^n \frac{A_j^0}{A_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0) \right\} \dots\dots\dots(36)$$

$$\sigma_i^{F/D} = d_i \left\{ u_i^0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0) \right\} \dots\dots\dots(37)$$

$$\sigma_i^{F/R} = d_i \left\{ u_i^0 + \sum_{j=1}^n \frac{A_j^0}{A_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0) \right\} \dots\dots\dots(38)$$

上式のように、この場合 $\sigma_i^{S/D}$ と $\sigma_i^{F/D}$, $\sigma_i^{S/R}$ と $\sigma_i^{F/R}$ は等しく、

$$\sigma_i^{F/D} = \sigma_i^{S/D}, \quad \sigma_i^{F/R} = \sigma_i^{S/R} \dots\dots\dots(39)$$

となる。

d) $A_i \rightarrow \infty$ の場合

荷重係数が一定であれば、 i 部材の部材断面面積を無限に大きくしても、その軸力は有限値であるから、応力は 0 に漸近するはずである。応力近似式もこの性質をもっていることが好ましいが、 $A_i \rightarrow \infty$ の場合、各応力近似式は次のようになる。

$$\sigma_i^{S/D} \rightarrow \text{sign} \left[d_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_i} \right)^0 \right] \cdot \infty \dots\dots\dots(40)$$

$$\sigma_i^{S/R} \rightarrow d_i \left\{ u_i^0 + A_i^0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_i} \right)^0 + \sum_{j=1}^n \frac{A_j^0}{A_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_j} \right)^0 (A_j - A_j^0) \right\} \dots\dots\dots(41)$$

$$\sigma_i^{S/D} \rightarrow d_i \left\{ u_i^0 + A_i^0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial A_i} \right)^0 \right\} \dots \dots \dots (42)$$

$$\sigma_i^{F/R} \rightarrow 0 \dots \dots \dots (43)$$

ここで、 $\text{sign}[\cdot]$ は $[\]$ 内の符号を意味する。

上式のように、 $A_i \rightarrow \infty$ として0に漸近する応力近似式は、 $\sigma_i^{F/R}$ のみである。

(5) 考 察

(3)の考察および前節のa)より、 $\sigma_i^{S/D}$ が他より劣るのは明らかである。 $\sigma_i^{S/D}$ は最も簡単な形をしてはいるが、有効な範囲は限られており、最適設計に用いる場合は、ムープリミットの設定が不可欠と考えられる。数値計画法のうち、逐次線形計画法は $\sigma_i^{S/D}$ を用いる方法であるが、収束を保証するためにムープリミットは必ず用いられる。

前節のb), c)より、 $\sigma_i^{F/D}$ の特徴が明らかになる。つまり、 $\sigma_i^{F/D}$ は*i*部材の部材断面積 A_i に関しては $\sigma_i^{S/R}$ と、その他の部材断面積 A_j ($j=1 \sim n, j \neq i$)に関しては $\sigma_i^{S/D}$ と同一関数となる。 $\sigma_i^{S/D}$ と $\sigma_i^{S/R}$ の近似の程度の差は明らかであるので、これは*n*次元の空間において、初期の状態からの方向により近似の程度に差があることを示している。近似の概念を応用する最適設計においては、多くの近似関数から形成される設計空間内部を、計算された方向に最適解を探索する過程を繰り返すが、方向により近似関数の精度が異なるのは好ましくない。

Vanderplaatsら⁶⁾は、三次元連続体を含む種々の構造物の最適設計に、要素内力を順変数に関して線形近似する応力近似式を用いて成功しているが、トラス構造物に関してはあてはまらないと考えられる。

$\sigma_i^{F/R}$ は、前節のc)より、 A_j ($j=1 \sim n, j \neq i$)に関しては $\sigma_i^{S/R}$ と同一関数であるが、 A_i に関する式(33)を数式の構成の上から式(31)と比較し優劣を論ずることは困難である。しかし、前節d)の結果、および数値計算の結果⁴⁾を参考にすると、近似の概念を用いるトラス構造物の最適設計には $\sigma_i^{F/R}$ が最も適していると考えられる。

4. あとがき

近似の概念を用いるトラス構造物の最適設計におい

て、考えられる4種類の応力近似式の特徴、優劣について理論的考察を加えた。

本文中で定義した記号を用いて、得られた事項を簡条書きにすると、以下ようになる。

(1) $\sigma_i^{S/D}$ は、ただ単に線形近似式であるという理由のみからでなく、静定構造の場合厳密な応力と一致せず、構造最適設計に用いる応力近似式としては不適当であることが示された。

(2) $\sigma_i^{F/D}$ は設計空間内の探索する方向により、近似の程度が異なることが示された。トラス構造物の最適設計に関しては不適当と考えられる。

(3) $\sigma_i^{S/R}$ と $\sigma_i^{F/R}$ については、着目部材の断面積を無限に大きくした場合に、応力が0に漸近する特性は $\sigma_i^{F/R}$ のみが有しており、トラス構造物の最適設計には $\sigma_i^{F/R}$ の方が適当であると考えられる。

なお今後、これらの公式を実際の最適設計に応用し優劣を比較検討する予定である。

本研究に関しては、アメリカ合衆国NASAの三浦宏一博士、およびカリフォルニア州立大学のVanderplaats教授のご助言があったことを付記し、謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) 山田善一編：構造工学シリーズ1 構造システムの最適化—理論と応用—, 土木学会, 1988.
- 2) 杉本博之：構造最適設計の数値計画法からの脱皮, 構造工学論文集, Vol. 35 A, pp. 339~345, 1989.
- 3) Vanderplaats, G. N. and Salajegheh, E. : A New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis, AIAA J., Vol. 27, No. 3, pp. 352~358, 1989.
- 4) 杉本博之・山村和人：骨組構造物の最適設計における応力近似モデルについて, 構造工学論文集, Vol. 35 A, pp. 347~359, 1989.
- 5) Vanderplaats, G. N. : Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, McGraw-Hill, pp. 262~263, 1984.
- 6) Kodiyalam, S. and Vanderplaats, G. N. : Shape Optimization of 3D Continuum Structures via Force Approximation Techniques, AIAA J., (will be presented), (1989. 7. 26・受付)