

曲げおよびねじりを受けるクラックを有する帯板の 混合境界値問題の解析

A MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF A STRIP WITH A CRACK UNDER THE CONCENTRATED BENDING AND TORSIONAL MOMENTS

長谷部宣男*・三輪昌弘**・中村卓次***

By Norio HASEBE, Masahiro MIWA and Takuji NAKAMURA

The mixed boundary value problem of the thin plate is analyzed for a strip under concentrated bending and torsion. The strip has a part of the boundary where the displacement is constrained, and a crack initiating from an end of the constrained part. A rational mapping function which maps the strip with a crack into a unit circle and the complex stress functions for the deflection are used. The first derivative of the complex stress function is obtained in a closed form without integral term. The stress distributions before and after crack initiation, and the stress intensity factors of the thin plate for the bending and torsional modes are obtained from short to long cracks. The stress intensity factors are compared with those of other strips which are different in the constrained degree of the strip edge, and the effect of Poisson's ratio is studied.

Keywords: thin plate bending, mixed boundary, mapping function, crack, strip

1. まえがき

古典理論による薄板の曲げの問題は、多く解析されている。しかし、その混合境界値問題、さらにはクラックと連成した問題の解析は多くないようである¹⁾。外力境界値問題としてのクラックの問題に注目しても、平面弾性のクラックの問題ほどには解析されていない²⁾⁻⁴⁾。有理写像関数を用いた薄板の混合境界値問題の一般解法は文献1)で報告した。写像関数を導入することによって任意の形状の解析が可能になり、さらに、写像関数として有理関数を用いることにより、積分方程式を解くことなく、閉じた解が得られる。したがって、有理写像関数の表わす形状に対して厳密解が得られる。本論文で用いる分数式の和の有理写像関数は、帯板の形状のように数学的に対数特異を有する関数に対しても精度よく作られ⁵⁾⁻⁸⁾、比較的任意の形状の写像関数を作ることができる。応力拡大係数を求めるクラックの問題にも適用できる^{1), 6), 7), 9), 10)}。平面弾性混合境界値問題として、面内の

引張りや偶力が作用した帯板の変位拘束端の片側からクラックが発生した場合⁹⁾および両側から発生した場合¹¹⁾の解析は行われているが、この種の形状の薄板の混合境界値問題の解析解は多くないようである。本論文で解析する帯板の縁が拘束された形状は、たとえば、面外曲げやねじりを受けるI形断面のフランジを変位拘束部分と考え、フランジのあるところとないところの境の部分に注目し、さらに、変位拘束端の応力集中によってクラックが発生した状態などのモデルに相当している。荷重として集中曲げやねじりモーメントを考える。このとき複素応力関数中の荷重項はPlemelj関数を含む積分形で与えられる。しかし、この積分は容易ではないが本論文に示すように、この荷重項の1次導関数が得られる。したがって、複素応力関数の1次導関数が積分項を含まない形で得られる。これによって、応力成分は数値積分をすることなく容易に計算される。短いクラックから長いクラックまで応力拡大係数を精度よく得るために、写像の対応点を変えた2種類の写像関数が用いられる。

2. 写像関数

Fig. 1に示すクラックを有する帯状領域を、単位円内に等角写像する関数は、Schwarz-Christoffelの変換公式を用いて表わすことができる。この関数は無理関数で

* 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

** 正会員 工修 東海旅客鉄道 (〒450 名古屋市中村区名駅1丁目)

*** 正会員 工修 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科

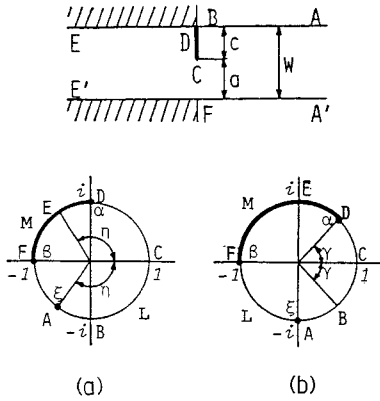


Fig.1 Strip region with a crack and associated unit circles.

あるため、この式から分数式の和の形の有理写像関数を作る。しかし、この有理写像関数で表わされる形状は、クラック先端で小さな丸味を有する。クラックが非常に短いときには、クラック長に比してクラック先端の丸味が十分小さくないとクラックとみなしにくく、応力拡大係数を精度よく求めることはできない。また、クラックが十分長くなり帯板の幅に近いときにも正確な形状を表わしている必要がある。このため本論文では、Fig.1 (a), (b) に示すように、 z 平面と ζ 平面の対応する点を変えた2つの写像関数を用いることにする。Fig.1(a) に示す写像関数は

$$z = \omega(\zeta) = K_1 \int \frac{\zeta - 1}{(\zeta^2 + 1)^{0.5} (\zeta - e^{-i\gamma}) (\zeta - e^{i\gamma})} d\zeta \quad \dots\dots\dots (1)$$

Fig.1(b) のそれは

$$z = \omega(\zeta) = K_2 \int \frac{\zeta - 1}{(\zeta^2 + 1)^{0.5} (\zeta - e^{-i\gamma})^{0.5} (\zeta - e^{i\gamma})^{0.5}} d\zeta \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表わされる。式(1),(2)中の η , および γ はクラックの長さに関するパラメーターで、同一のクラック長に対して $\eta + \gamma = \pi$ の関係がある。式(2)において、 $\gamma = 0$ とすると、クラックのない帯状の形状となる。式(1),(2)の係数 K_1, K_2 は帯板の幅がそれぞれ W になるように定められる。式(1)や(2)より分数式の和の形の有理写像関数を作る。式(2)の場合について、その概略は文献8)に、また、他の形状について、一般的方法が文献6), 9)に述べてあるので、ここでは、その要点のみを述べる。式(2)の被積分関数を収束の遅い項と速い項に分解すると

$$z/K_2 = \frac{A}{2} \int \frac{d\zeta}{1 - i\zeta} + \frac{A}{2} \int \frac{d\zeta}{1 + i\zeta} + \int \frac{C}{(e^{-i\gamma} - \zeta)^{0.5}} d\zeta + \int \frac{D}{(e^{i\gamma} - \zeta)^{0.5}} d\zeta$$

$$+ \int \left\{ \frac{1 - \zeta}{(1 + \zeta^2)(e^{-i\gamma} - \zeta)^{0.5}(e^{i\gamma} - \zeta)^{0.5}} - \frac{A}{1 + \zeta^2} - \frac{C}{(e^{-i\gamma} - \zeta)^{0.5}} - \frac{D}{(e^{i\gamma} - \zeta)^{0.5}} \right\} d\zeta \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。式(3)右辺第1項から第4項までが収束の遅い項で、第5項の積分項は収束の速い項である。A, C, Dは分解したときの係数で容易に求められる。式(3)のそれぞれの項に対して、分数式の和の形の関数を作る。最終的に

$$\int \frac{d\zeta}{1 - i\zeta} = i \ln(1 - i\zeta) = -i \sum_{j=1}^M \left(\frac{C_j}{1 - i\beta_j \zeta} - C_j \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\int \frac{d\zeta}{(e^{-i\gamma} - \zeta)^{0.5}} = -2 e^{-0.5i\gamma} (1 - e^{i\gamma} \zeta)^{0.5} = -2 e^{-0.5i\gamma} \left[1 + \sum_{j=1}^M \left(\frac{-F_j}{1 - e^{i\gamma} \alpha_j \zeta} + F_j \right) \right] \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{式(3)の最終積分項} = \sum_{j=1}^m \frac{G_j \gamma_j \zeta}{1 - \gamma_j \zeta} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。式(3)の第2, 4項は、それぞれ式(4), (5)の i の代わりに $-i$ を代入して得られる。式(4), (5), (6)の作り方は文献5), 9), 7)に述べてあるので、ここでは省略する。最終的に式(3)は次式で表わされる。

$$z = \frac{-iA}{2} \sum_{j=1}^M \left(\frac{C_j}{1 - i\beta_j \zeta} - C_j \right) + \frac{iA}{2} \sum_{j=1}^M \left(\frac{C_j}{1 + i\beta_j \zeta} - C_j \right) - 2C e^{-0.5i\gamma} \left[1 + \sum_{j=1}^M \left(\frac{-F_j}{1 - e^{i\gamma} \alpha_j \zeta} + F_j \right) \right] - 2D e^{0.5i\gamma} \left[1 + \sum_{j=1}^M \left(\frac{-F_j}{1 - e^{-i\gamma} \alpha_j \zeta} + F_j \right) \right] + \sum_{j=1}^m \frac{G_j \gamma_j \zeta}{1 - \gamma_j \zeta} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)を整理すると、次式の形に表わされる。

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(7)の場合、 $n = 52 + m$ となる。 m の値は、本論文の場合、 $m = 10 \sim 18$ の値が用いられる。式(1)の場合も全く同様にして式(8)の形に作られる。式(1)をもとにして作った写像関数の式(8)の表わすクラック先端の曲率半径 ρ は、クラックの長さが $0.01 \leq C/W \leq 0.8$ で、 $\rho/W = 10^{-9} \sim 10^{-12}$ となる。また、式(2)をもとにして作った写像関数の式(8)の表わすクラック先端の曲率半径 ρ は、 $0.2 \leq C/W \leq 0.95$ で $\rho/W = 10^{-8} \sim 10^{-10}$ となり十分小さい。したがって、クラックの短い場合には、式(1)に基づいた式(8)を、クラックの長い場合には、式(2)に基づいた式(8)を用いることにより、短いクラックから長いクラックまでの応力拡大係数を精度よく求めることができる。また式(8)

は、有理関数のため、帯板の長さは有限長になる。

3. 解析方法

式(8)の形の有理写像関数を用いて、外力境界(Lとよぶ)と変位境界(Mとよぶ)が、それぞれ1か所ある場合の薄板の曲げの混合境界値問題の一般解は、文献1)に報告した。したがって、ここではまずその一般解の式を示し、さらに本論文で扱う集中曲げモーメントやねじりモーメントの場合の荷重項を導く。

単位円内で正則な、たわみに関する複素関数を、 $\phi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ とすると、 $\phi(\zeta)$ の一般解は

$$\phi(\zeta) = H(\zeta) + \frac{\chi(\zeta)}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \dots\dots\dots (9)$$

$$H(\zeta) = -\frac{M(\zeta)}{\kappa} + \frac{(\kappa+1)\chi(\zeta)}{2\pi i \kappa} \int_M \frac{M(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma \dots\dots\dots (10)$$

$$M(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L+M} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \dots\dots\dots (11)$$

$$f(\sigma) = \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} & \text{on } M \\ \frac{1}{D(1-\nu)} \int [m(s) + i \int p(s) ds] dz & \text{on } L \end{cases} \dots\dots\dots (12)$$

と表わされる。ここに、 $\chi(\zeta)$ はPlemelj関数で

$$\chi(\zeta) = (\zeta - \alpha)^{-\lambda} (\zeta - \beta)^{\lambda}, \quad \lambda = 0.5 - i \frac{\ln \kappa}{2\pi},$$

α, β は、LとMの境界の座標を表わす(Fig.1参照)。

$$\bar{A}_k = \phi'(\zeta_k), \quad \zeta_k \equiv 1/\bar{\zeta}_k, \quad B_k = E_k/\omega'(\zeta_k) \dots\dots\dots (13)$$

$\kappa = (3+\nu)/(1-\nu)$, ν : ポアソン比, w : たわみ, D : 曲げ剛さ,

σ は単位円上の ζ を表わす。 $m(s), p(s)$ は、境界上の単位長さ当たりの曲げモーメントおよび置換せん断力である。 s は任意点を起点として、境界に沿う長さを示す。

また、 $\phi(\zeta)$ は境界上で自由境界が存在する場合には、解析接続より

$$\phi(\zeta) = \kappa \bar{\phi}(1/\bar{\zeta}) - \frac{\bar{\omega}(1/\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta) \dots\dots\dots (14)$$

と与えられる。

本論文では、Fig.1(a), (b)に示すように、 $\zeta = \xi$ の点で集中曲げモーメント M_0 やねじりモーメント T_0 が作用し、境界の一部が固定された場合を考える。この場合、式(12)の $f(\sigma)$ は

$$f(\sigma) = \begin{cases} \frac{iM_0 + T_0}{D(1-\nu)} & \text{on } \overline{ABCD} \\ = 0 & \text{on } \overline{DEF} \\ = 0 & \text{on } \overline{FA} \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

となる。この $f(\sigma)$ を式(11)、さらに式(10)に代入すると

$$H(\zeta) = \frac{-M_0 + iT_0}{2\pi \kappa D(1-\nu)} \ln \frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \xi} + \frac{(\kappa+1)\chi(\zeta)}{2\pi i \kappa} \int_{\alpha}^{\xi} \frac{(M_0 - iT_0)}{2\pi D(1-\nu)} \cdot \frac{\ln[(\sigma - \alpha)/(\sigma - \xi)]}{\chi(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma \dots\dots\dots (16)$$

となる。式(16)の積分は難しい。しかし、その1次導関数 $H'(\zeta)$ は、付録の方法で、積分を含まない形で求められる。したがって、式(9)より $\phi'(\zeta)$ が求められ、式(14)の $\phi(\zeta)$ とともに、曲げモーメントやねじりモーメント、せん断力などの応力成分は容易に計算できる。

クラック発生後のD付近は(Fig.1)、隅角部の角度90°で、一辺固定、一辺自由の場合の応力のorderの振舞いをする¹³⁾。本論文の場合は、Plemelj関数と写像関数によって、その応力の振舞いが表わされ、応力関数の中に、90°の場合のorderが陽には現われていない。

4. 応力分布

曲げモーメントやねじりモーメントの分布列を、Fig.2~5に示す。 M_r, M_θ は、それぞれ境界の法線および接線方向の曲げモーメントを、また、 $M_{r\theta}$ はねじりモーメントを表わす。したがって、図中のたとえば $y=0, -1.0$ 上の M_θ は M_x に、 $M_{r\theta}$ は M_{xy} に、クラック面の M_θ は M_y にあたる。応力分布は、 $\nu=0.25$ で、それぞれの図の、上にクラック発生前、下に発生後($C/W=0.4$)の分布を示す。また、固定部分M上の曲げモーメント等の成分の間には $M_{r\theta}=0, M_\theta/M_r = \nu$ の関係がある¹⁾。

Fig.2, 3は、帯板の先端に集中曲げモーメント M_0 が作用した場合である。クラック発生前、変位拘束端のL側に大きな $M_\theta (=M_x)$ の集中があり、クラック発生の可能性が、また、M側に $M_r (=M_y)$ の集中がみられ、拘束部に剥離発生の可能性がある。変位拘束部の、曲げモーメント分布に及ぼす影響範囲を図から知ることができる。

Fig.4, 5には、帯板の先端に集中ねじりモーメントが作用した場合の応力分布を示す。

クラックや剥離発生の可能性、変位拘束部の影響等を知ることができる。

5. 応力拡大係数

曲げおよびねじりのモードに関する応力拡大係数を求める。クラック先端付近の曲げモーメントやねじりモーメントは次式で表わされる^{9), 14)}。

$$m_x + m_y = \frac{2}{\sqrt{2} r} \left(k_B \cos \frac{\theta}{2} - k_S \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$m_y - m_x + 2 i m_{xy} = \frac{1}{2(1+\nu)\sqrt{2} r} \{ (7+\nu) k_B$$

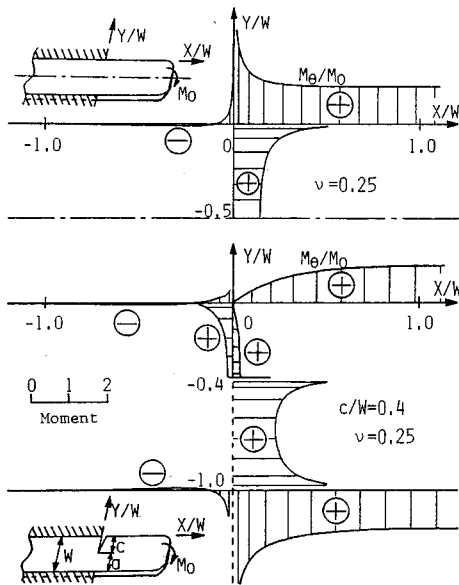


Fig. 2 Stress distribution (M_θ) before and after crack initiation under a concentrated bending moment.

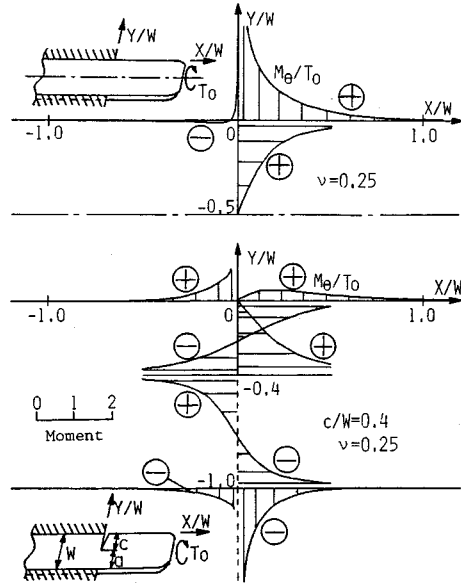


Fig. 4 Stress distribution (M_θ) before and after crack initiation under a concentrated torsional moment.

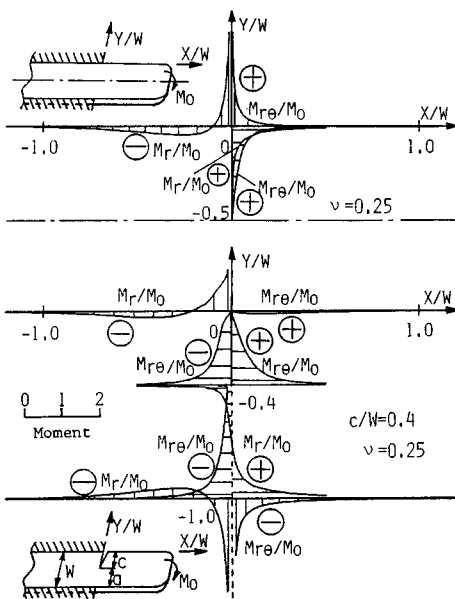


Fig. 3 Stress distribution (M_r, M_{re}) before and after crack initiation under a concentrated bending moment.

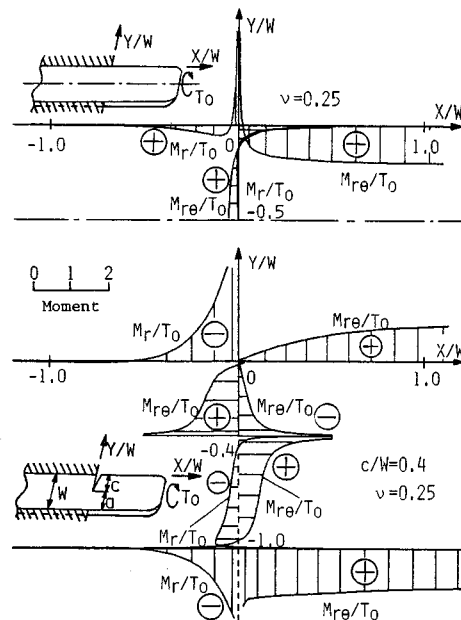


Fig. 5 Stress distribution (M_r, M_{re}) before and after crack initiation under a concentrated torsional moment.

$$+ i(5+3\nu)k_s]e^{-\frac{\delta}{2}} \\ + (1-\nu)(k_B - ik_s)e^{-\frac{5\delta}{2}}$$

ここに、 r はクラック先端からの距離、 θ はクラックの方向から測った角度である。 k_B, k_s が曲げおよびねじりに関する応力拡大係数である。これらは、応力関数 $\phi(\xi)$ から次式によって計算される。

$$k_B - ik_s = -2D(1+\nu)e^{-i\theta/2}\phi'(\xi_0)/\sqrt{\omega'(\xi_0)}$$

ここに、 δ はクラックと x 軸のなす角、 ξ_0 はクラック先端に対応する単位円上の座標で、今の場合 $\delta = -\pi/2$ 、 $\xi_0 = 1$ である。本論文では、次式で定義される無次元化した応力拡大係数 F_B, F_s を用いる。

$$F_B + iF_S = (k_B + ik_S) \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{\sqrt{a}}{\left[\frac{M_0}{T_0} \right]} \dots (17)$$

ここに、 a はリガメントの長さを表わす (Fig. 1 参照).

Fig. 6 には、集中曲げモーメントが作用した場合の本論文のクラック (Case 1), 半無限板と帯板の接合部に発生したクラック¹⁰⁾ (Case 2), 帯板に発生したクラック⁷⁾ (Case 3) の F_B , F_S を, Table 1 には Case 1 の F_B , F_S を示す. Fig. 6 より, 帯板の側面の拘束の違いに

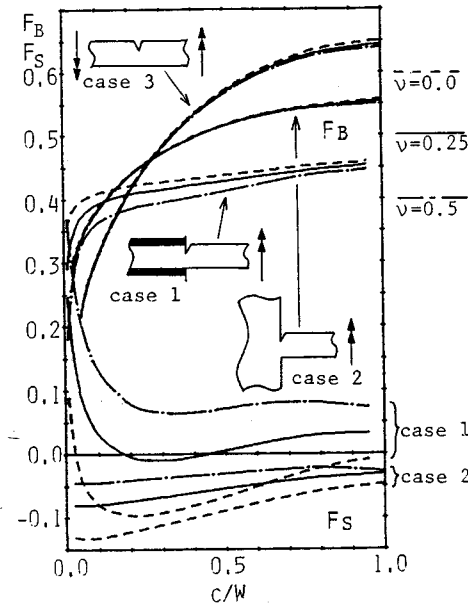


Fig. 6 Nondimensional stress intensity factors under a concentrated bending moment.

よって、クラックがどんな影響を受けるかを知ることができる. Case 1 は, Case 2, 3 に比べポアソン比 ν の影響をよく受けていることがわかる. C/W が小さいとき, F_B の大きさは, 大きい方から Case 1 > Case 2 > Case 3 の順にあり, C/W が大きくなると, その大きさの順は逆になる. この理由は, C/W が小さいときは, 変位拘束部や接合部の応力集中の影響が大きく, 拘束条件が強いほど F_B 値が大きいのと思われる. 逆に, C/W が大きくなると, クラックが開きやすい条件の方が F_B 値が大きくなり, F_B の大きさの順が逆になるものと思われる.

Fig. 7, Table 2 には、集中ねじりモーメントが作用した場合の F_B , F_S 値を示す.

6. 結 語

集中曲げおよびねじりモーメントが作用する場合の荷重項 $H(\zeta)$ の 1 次導関数が求められたので, 複素応力関数の 1 次導関数 $\phi(\zeta)$ が, 積分を含まない閉じた形で求められた. したがって, 曲げモーメント等の応力成分は容易に計算される. これらの応力成分は, 式 (8) の表わす形状に対して厳密解である. 式 (1), (2) から作った式 (8) の写像関数を用いたことにより, 短いクラックから長いクラックまでの応力拡大係数が精度よく求められた. Fig. 6, 7 より, ポアソン比の応力拡大係数に及ぼす影響, 帯緑の変位拘束の度合いが応力拡大係数に及ぼす影響を知ることができた. Plemelj 関数のパラメーター α, β を変えることによって, 拘束部分の位置を変えることができる. また写像関数を変えることによって, たとえば帯板にクラックが斜めに生じた場合の解析もできる.

Table 1 Nondimensional stress intensity factors under a concentrated bending moment.

c/W	F_B			F_S		
	$\nu=0.0$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$	$\nu=0.0$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$
0.010	0.356	0.290	0.181	0.088	0.246	0.369
0.025	0.382	0.341	0.271	0.007	0.152	0.279
0.050	0.397	0.371	0.324	-0.044	0.085	0.202
0.100	0.409	0.392	0.362	-0.081	0.030	0.131
0.200	0.421	0.408	0.385	-0.097	-0.005	0.078
0.300	0.427	0.415	0.395	-0.092	-0.010	0.065
0.400	0.432	0.422	0.403	-0.081	-0.005	0.065
0.500	0.438	0.428	0.412	-0.067	0.005	0.071
0.600	0.443	0.435	0.422	-0.051	0.015	0.078
0.700	0.449	0.441	0.432	-0.035	0.024	0.081
0.800	0.454	0.477	0.440	-0.022	0.030	0.080
0.900	0.457	0.451	0.444	-0.012	0.032	0.075
0.095	0.460	0.454	0.447	-0.009	0.032	0.073

付 録

式 (16) の積分項の変形を行う。Fig. 8 を参照して線分 ξ, α, β ($= -1$, 今の場合) を囲む次の周回積分を考える。

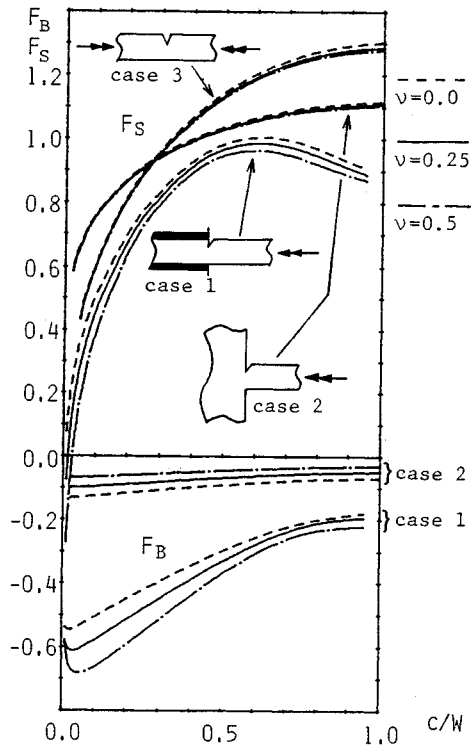


Fig. 7 Nondimensional stress intensity factors under a concentrated torsional moment.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi}^{\alpha} []^+ \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} []^+ \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta}^{\alpha} []^- \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\xi} []^- \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} \\ & = \frac{1}{2\pi i} \oint [] \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} \dots\dots\dots (A.1) \end{aligned}$$

[] は $\frac{1}{\chi(\sigma)} \ln \frac{\sigma-a}{\sigma-\xi}$ を表わし、肩の+, -は、境界上で領域+, -側から近づいたときの値を示す。式 (A.1) の右辺の項は、留数計算より

$$\text{右辺} = \frac{1}{\chi(\sigma)} \ln \frac{\xi-a}{\xi-\xi} \dots\dots\dots (A.2)$$

また,

$$\left[\ln \frac{\sigma-a}{\sigma-\xi} \right]^- = \left[\ln \frac{\sigma-a}{\sigma-\xi} \right]^+ - 2\pi i \quad \text{on } \widehat{\xi\alpha} \dots\dots (A.3)$$

$$\chi^-(\sigma) = \chi^+(\sigma) e^{-2\pi i \lambda} = -\frac{\chi^+(\sigma)}{\chi} \quad \text{on } \widehat{\alpha\beta} \dots\dots (A.4)$$

を用いて、式 (A.1) の左辺を+の側の積分に変換し、整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \ln \frac{\sigma-a}{\sigma-\xi} \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\xi)} \\ & = \frac{1}{1+\chi} \left[\frac{1}{\chi(\xi)} \ln \frac{\xi-a}{\xi-\xi} - \int_{\xi}^{\alpha} \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\xi)} \right] \dots\dots (A.5) \end{aligned}$$

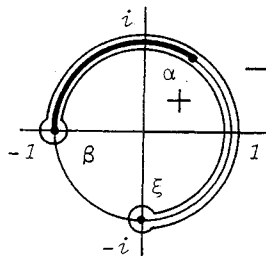


Fig. 8 Contour integral.

Table 2 Nondimensional stress intensity factors under a concentrated torsional moment.

c/W	F_B			F_S		
	$\nu=0.0$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$	$\nu=0.0$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$
0.010	-0.539	-0.580	-0.587	0.078	-0.074	-0.272
0.025	-0.547	-0.610	-0.663	0.230	0.121	-0.030
0.050	-0.537	-0.609	-0.683	0.359	0.282	0.172
0.100	-0.508	-0.581	-0.665	0.512	0.463	0.393
0.200	-0.452	-0.517	-0.595	0.705	0.680	0.644
0.300	-0.397	-0.452	-0.518	0.837	0.820	0.797
0.400	-0.346	-0.390	-0.442	0.929	0.914	0.895
0.500	-0.299	-0.332	-0.371	0.984	0.968	0.948
0.600	-0.258	-0.281	-0.309	1.005	0.986	0.963
0.700	-0.225	-0.240	-0.263	0.995	0.974	0.948
0.800	-0.201	-0.212	-0.235	0.965	0.943	0.916
0.900	-0.186	-0.198	-0.224	0.925	0.905	0.883
0.950	-0.180	-0.195	-0.222	0.905	0.887	0.870

上式を式 (16) に代入すると

$$H(\zeta) = -\frac{(M_0 - iT_0)\chi(\zeta)}{2\pi\kappa D(1-\nu)} \int_a^\alpha \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} \dots\dots\dots (A\cdot6)$$

となる。

次に、式 (A・6) の1次導関数を求める。まず、一般の積分範囲として、次式を考える。

$$F(\zeta) = \chi(\zeta) \int_a^b \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} \dots\dots\dots (A\cdot7)$$

次式の $y(\zeta)$ を導入する。

$$y(\zeta) = \frac{(\zeta-a)(\zeta-\beta)}{\chi(\zeta)} \dots\dots\dots (A\cdot8)$$

ここで、次の微分を考える。

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\frac{1}{\frac{y(\sigma)}{\sigma-\zeta}} \right] = \left[\frac{1}{\frac{y(\sigma)}{\sigma-\zeta}} \right]' - \frac{1}{(\sigma-\zeta)^2} \dots\dots\dots (A\cdot9)$$

上式に $d\sigma$ を乗じ、 a から b まで積分すると、

式 (A・9) 左辺

$$= \left[\frac{1}{\frac{y(\sigma)}{\sigma-\zeta}} \right]_a^b = \frac{1}{\frac{y(b)}{b-\zeta}} - \frac{1}{\frac{y(a)}{a-\zeta}} \equiv g_1(\zeta) \dots\dots\dots (A\cdot10)$$

式 (A・9) 右辺

$$= |\beta + \lambda(\alpha - \beta) - \zeta| f(\zeta) - (\zeta - \alpha)(\zeta - \beta) f'(\zeta) \dots\dots\dots (A\cdot11)$$

ここで、

$$f(\zeta) = \int_a^b \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)}, \quad f'(\zeta) = \int_a^b \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)^2} \dots\dots\dots (A\cdot12)$$

とおいている。式 (A・10, 11) より、

$$f'(\zeta) + S(\zeta)f(\zeta) + T(\zeta) = 0 \dots\dots\dots (A\cdot13)$$

の微分方程式となる。ここで、

$$S(\zeta) = \frac{1-\lambda}{\zeta-\alpha} + \frac{\lambda}{\zeta-\beta} \dots\dots\dots (A\cdot14)$$

$$T(\zeta) = \frac{g_1(\zeta)}{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)} \dots\dots\dots (A\cdot15)$$

である。

式 (A・13) の一般解は、

$$\exp \left[\int S(\zeta) d\zeta \right] f(\zeta) + \int T(\zeta) \exp \left[\int S(\zeta) d\zeta \right] d\zeta = \text{Const} \dots\dots\dots (A\cdot16)$$

となり、また、上式中の \exp の項は、式 (A・14) を用いて、

$$\exp \left[\int S(\zeta) d\zeta \right] = C_1 \chi(\zeta) \dots\dots\dots (A\cdot17)$$

となる。 C_1 は定数である。しかし、式 (A・16) の左辺第2項の積分は求められないが、式 (A・16) に式 (A・17) を代入し、1階微分すると、

$$\frac{d}{d\zeta} [C_1 \chi(\zeta) f(\zeta)] + C_1 T(\zeta) \chi(\zeta) = 0 \dots\dots\dots (A\cdot18)$$

さらに、式 (A・7, 12) より上式は

$$F'(\zeta) = -T(\zeta)\chi(\zeta) = -y(\zeta)g_1(\zeta) \dots\dots\dots (A\cdot19)$$

と求まる。 $a = \xi$, $b = \alpha$ のとき、式 (A・19) は

$$F'(\zeta) = \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\xi)} \frac{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}{(\xi-\zeta)(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}$$

となる。したがって、式 (A・6) の1階微分 $H'(\zeta)$ が求められた。

参 考 文 献

- 1) Hasebe, N. : Mixed boundary value problem of plate with crack, ASCE, J. of Engng. Mech., Vol.110, No.1, pp.37~48, 1984.
- 2) Tada, H. : The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Reserch Corporation, Pennsylvania, 1973.
- 3) Sih, G.C. : Handbook of Stress Intensity Factors, Lehigh University, Pennsylvania, 1973.
- 4) Murakami, Y. *et al.* : Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press, Oxford, 1987.
- 5) Hasebe, N. : Bending of strip with semi-elliptic notches or cracks, ASCE, J. of Engng. Mech., Vol.104, No.6, pp.1433~1450, 1978.
- 6) Hasebe, N. and Takemura, M. : Cracks occuring at a joint of a strip and a semi-infinite plate under out of plane load, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.29, Univ. Tokyo Press, 1981.
- 7) Hasebe, N., Matuura, S. and Kondo, N. : Stress analysis of a strip with a step and a crack, Engineering Fracture Mechanics, Vol.20, No.3, pp.447 ~ 462, 1984.
- 8) Hasebe, N. and Miura, M. : Stress analysis of crack at an end of partly embedded strip, Proc. of Japan Society of Civil Engineers Structural Eng. / Earthquake Eng., Vol.2, pp.345s~352s, 1985.
- 9) Hasebe, N. and Inohara, S. : Stress analysis of a semi-infinite plate with an oblique edge crack, Ingenieur Archiv, Vol.48, pp.129~141, 1980.
- 10) Hasebe, N., Miwa, M. and Nakamura, T. : Stress analysis of a crack at a juncture of a strip and a half-plane, Engineering Fracture Mechanics, pp.225~236, 1989.
- 11) 長谷部宣男・三浦雅彦 : 埋め込まれた板の埋め込み端の両側から発生したクラック, 日本機械学会論文集, 第47巻, 第423号, pp.1129~1136, 1981.
- 12) Savin, G.N. : Stress concentration around holes, Chap. VI, Pergamon Press, 1961.
- 13) Williams, M.L. : Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corner of plate bending, 1st U.S. National Congress Applied Mechanics, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, Y.N., pp.325~329, 1952.
- 14) Ishida, N. : Plates and Shells with cracks, ed. G.C. Sih, Chap.1, Noordhoff, Amsterdam, 1977.