

多変量一次元 AR モデルの逐次同定法

IDENTIFICATION OF AN AUTOREGRESSIVE MODEL FOR MULTIVARIATE ONE-DIMENSIONAL NONSTATIONARY GAUSSIAN RANDOM PROCESSES

星谷 勝*・丸山 收**

By Masaru HOSHIYA and Osamu MARUYAMA

Identification problems on coefficient matrices of an autoregressive model for multivariate and one-dimensional nonstationary Gaussian random processes are investigated, by applying the Kalman filter incorporated with a weighted global iteration.

The major contributions of the paper are the use of Kalman filter for estimating time varying model parameters and the development of an effective method in terms of computer time.

The results indicate that the coefficients of this recursive equation are identified extremely well at the stage of their stable convergency to optimal ones.

Keywords : Kalman filter, EK-WGI procedure, autoregressive model, non-stationary random process, system identification, artificial earthquake

1. はじめに

地震動時系列の研究において、自己回帰(Autoregressive; AR)モデルや自己回帰移動平均(Autoregressive and Moving Average; ARMA)モデルは、それらの係数行列が決定されると漸化的にサンプル波形を作成できるので、従来の調和関数型モデルによるよりも効率的であることから地震動シミュレーションに用いられるようになってきている。

研究には2つの方向がある。1つは、相互相関関数または相互スペクトル密度関数を地震動現象の特性として規定し、その性質を満たすサンプル波形を精度良くシミュレートしようとするものである。最近の研究には、Samaras, Shinozuka, Tsurui¹⁾によるARMAモデルを基本とした相関を有する多変量一次元定常過程のシミュレーション法やDeodatisとShinozuka²⁾による多変量一次元のAR非定常過程のシミュレーション法がある。Nagamuraら³⁾は上記の研究と基本的には同様の定式化であるが、それらを多次元に拡張したモデルを示している。また、地震動伝播のアレー観測データの相関特性を満たす地震動のシミュレーションの研究において、Ho-

shiyaら⁴⁾⁻⁶⁾は多変量一次元のAR非定常過程を用いている。

あと1つは、観測された地震動記録をもとにして、その確率過程をARまたはARMAモデルで表現しようとするものである。

Nauら⁷⁾は、ARMAモデルに対してKalman Filterを用いて同定を試みている。高橋ら⁸⁾は、アレー観測で得られた複数地点の記録から波動の反射、透過などの現象を推定することを試み、ARモデルによる波動伝播特性を検討している。

さて、前者の方法においては、目標として相互相関関数を規定しているが、これをどのように表現するかということは、後者の方法における物理現象をモデルを用いて同定することと等価である。いったん、同定されれば、このモデルを用いて、必要な波形はシミュレートされる。

さて上記2つの方向における時間領域モデルの研究は、いずれもGerschら⁹⁾の2段階最小二乗法の同定手法を源流として発展させたものである。

本研究は、地震動加速度記録を確率過程現象のサンプル実現波形とみなして、その現象をARモデルで同定する手法を誘導し、地震動特性の解明などに有効なることを示すものであり、前述した2つの研究の流れのうち、後者の方向に属するものである。用いた手法は、ARモデルを状態方程式と観測方程式へと定式化したうえで

* 正会員 Ph.D. 武蔵工業大学教授 土木工学科
(〒158 世田谷区玉堤 1-28-1)

** 正会員 工博 武蔵工業大学講師 土木工学科(同上)

Kalman Filter を用いる逐次型最小二乗法による同定法であり、Kalman Filter を用いる点では Nau ら⁷⁾の方法と同様であるが、2段階最小二乗法によらず、1度のデータ処理でシステムの同定を行えるように定式化している。具体的には、区間定常性を導入し、区間ごとの Kalman Filter による逐次処理により、AR モデルの係数行列および入力ノイズの分散係数行列を同定する。したがって時間方向に対する1度のデータ処理で、定常、非定常を問わず確率過程のモデル化が行えるようになっている。そして、数値解析例により本手法の有効性を検証している。本研究は適合型処理のため少なくとも従来の手法と同等もしくはそれ以上の精度の解が期待でき、かつ簡易な手法となっている。

なお、本研究の動機は Shinozuka ら^{1)~3)}の方法に触発され、相互スペクトル密度関数または相互相関関数と条件とする代わりに、観測波形を得た場合のモデル同定法の開発およびシミュレーションを行ったものである。

2. 理 論

m -variate, one-dimensional の AR モデルは式(1)で与えられる。

$$\sum_{i=1}^p A_i Y(k-i) = B_o X(k) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $A_o = I$ (単位行列) とすれば、

$$Y(k) = - \sum_{i=1}^p A_i Y(k-i) + B_o X(k) \dots\dots\dots (2)$$

式(2)を要素で示すと式(3)となる。

$$\begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \\ \vdots \\ Y_m(k) \end{bmatrix} = - \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} a_{11}(i) & a_{12}(i) & \dots & a_{1m}(i) \\ a_{21}(i) & a_{22}(i) & \dots & a_{2m}(i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(i) & a_{m2}(i) & \dots & a_{mm}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(k-i) \\ Y_2(k-i) \\ \vdots \\ Y_m(k-i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_m(k) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $X(k) = [X_1(k) X_2(k) \dots X_m(k)]^T$ で $(m \times 1)$ ベクトル、その要素： $X_i(k)$ は互いに独立で、平均値： $E[X_i(k)] = 0$ 、分散： $E[X_i(k)X_i(k)] = 1$ である。

次に、式(2)の A_i, B_o をカルマンフィルターを用いて同定する方法を導く。 $J_i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ；第 i 要素を 1 とする列ベクトル： $(m \times 1)$ とすると、式(2)は、式(4)のようになる。

$$Y(k) = - \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} J_i^T A_i Y(k-i) \\ J_i^T A_i Y(k-i) \\ \vdots \\ J_i^T A_i Y(k-i) \end{bmatrix} + B_o X(k) \dots\dots\dots (4)$$

ところで、 $J_i^T A_i Y(k-i)$ は 1×1 のスカラー量であるから、 $(J_i^T A_i Y(k-i))^T = J_i^T A_i Y(k-i)$ である。ゆえに式(4)は、次のようになる。

$$Y(k) = - \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} Y^T(k-i) A_i^T J_1 \\ Y^T(k-i) A_i^T J_2 \\ \vdots \\ Y^T(k-i) A_i^T J_m \end{bmatrix} + B_o X(k) \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $a_{ii} = A_i^T J_i = [a_{ii}(i) \ a_{i2}(i) \ \dots \ a_{im}(i)]^T$ とおくと、

$$\begin{bmatrix} Y^T(k-i) \\ Y^T(k-i) \\ \vdots \\ O \end{bmatrix}_{(m \times 1)} = - \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} Y^T(k-i) & O \\ Y^T(k-i) & O \\ \vdots & \vdots \\ O & Y^T(k-i) \end{bmatrix}_{(m \times (m \times m))} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}_{((m \times m) \times 1)} + B_o X(k) \dots\dots\dots (6)$$

また文献 1) を参照して式(2)において右辺から $X^T(k)$ を乗じて、両辺の期待値をとれば次式を得る。

$$E[Y(k)X^T(k)] = - \sum_{i=1}^p A_i E[Y(k-i)X^T(k)] + B_o E[X(k)X^T(k)] \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $E[Y(k-i)X^T(k)] = 0$ ； $i > 0$ 、 $E[X(k)X^T(k)] = I$ である。したがって式(7)は、次のようになる。

$$B_o = E[Y(k)X^T(k)] \dots\dots\dots (8)$$

さらに、式(2)において右辺から $Y^T(k)$ を乗じて両辺の期待値をとれば次式を得る。

$$E[Y(k)Y^T(k)] = - \sum_{i=1}^p A_i E[Y(k-i)Y^T(k)] + B_o E[X(k)Y^T(k)] \dots\dots\dots (9)$$

$[Y(k)X^T(k)]^T = X(k)Y^T(k)$ であるから式(8)の転置行列を式(9)に代入して、式(10)が得られる。

$$B_o B_o^T = \sum_{i=1}^p A_i E[Y(k-i)Y^T(k)] \dots\dots\dots (10)$$

ここで式(3)より、 B_o は下三角行列であるから、 B_o^T は上三角行列となる。したがって、コレスキー分解等の手法を用いれば式(10)より B_o を求めることができる。

3. カルマンフィルターへの定式化

ここで用いるカルマンフィルターおよび EK-WGI 法に関する詳細な説明は参考文献 10), 11), 12) に委ねることとするが、これを適用するためには問題ごとに最も合理的な状態方程式および観測方程式の定式化を行うこ

とが必要である。

同定すべき特性値を要素に含んだ状態方程式と観測量に関する観測方程式が導かれれば、EK-WGI 法のアルゴリズムにより自動的に最適推定値を求めることができる。

本研究では、係数行列 A_i および B_o の同定に際し、両者の同定を漸行的に行うように定式化している。また、状態方程式および観測方程式は定常状態を前提として定式化するが、区間定常性を仮定することによりパラメータの時間変動にも対応できるようになっている。

(1) A_i の同定

$$\begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \\ \vdots \\ Y_m(k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Y^T(k-1) & \mathbf{0} & Y^T(k-2) & \mathbf{0} \\ & Y^T(k-1) & & Y^T(k-2) \\ & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & Y^T(k-1) & \mathbf{0} & Y^T(k-2) \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} Y^T(k-p) & \mathbf{0} \\ & Y^T(k-p) \\ & \vdots \\ \mathbf{0} & Y^T(k-p) \end{bmatrix} Z(k) + \varepsilon(k) \quad (12)$$

ただし、 $Y(k) = [Y_1(k) \ Y_2(k) \ \cdots \ Y_m(k)]^T$,
 $Y(k-i) = [Y_1(k-i) \ Y_2(k-i) \ \cdots \ Y_m(k-i)]^T$
 $a_{ii} = [a_{i1}(i) \ a_{i2}(i) \ \cdots \ a_{im}(i)]^T$,
 $\varepsilon(k) = [\varepsilon_1(k) \ \varepsilon_2(k), \ \cdots \ \varepsilon_m(k)]^T$,

$\varepsilon_i(k)$ は互いに独立な平均 0, カルマンフィルターの観測方程式に用いる分散任意のホワイトノイズである。

(2) B_o の同定

式(10)より、 $C = \sum_{i=0}^p A_i E[Y(k-i)Y^T(k)]$ とおく。

ここで、行列 C を要素で示すと次のようになる。

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix} \quad (13)$$

次に行列 C を上三角行列と下三角行列の積に分解すると、下三角行列は次に示す係数行列 \bar{B}_o となる。

$$\bar{B}_o = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & & & \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b}_{m1} & \bar{b}_{m2} & \cdots & \bar{b}_{mm} \end{bmatrix} \quad (14)$$

また、 $C = A_0 E[Y(k)Y^T(k)] + A_1 E[Y(k-1)Y^T(k)] + A_2 E[Y(k-2)Y^T(k)] + \cdots + A_p E[Y(k-p)Y^T(k)]$ である。ここでは、 $E[Y(k-i)Y^T(k)]$ の値は観測量を用いて式(15)より算出することとする。

$$E[Y(k-i)Y^T(k)] \approx (1/2r+1) \sum_{s=k-r}^{k+r} [Y(s-i)Y^T(s)] \quad (15)$$

以上より、係数行列 B_o の同定のための観測データを作成すれば、観測方程式は、 $i = 1 \sim m, j = 1 \sim i$ に対し

係数行列 A_i の定常性より、random walk モデルを用いて、状態方程式を次式で与える。

$$Z(k) = [a_{11} \ a_{21} \ \cdots \ a_{m1} \mid a_{12} \ a_{22} \ \cdots \ a_{m2} \mid \cdots \cdots \mid a_{1p} \ a_{2p} \ \cdots \ a_{mp}]^T; \text{ at } k \\ = [a_{11} \ a_{21} \ \cdots \ a_{m1} \mid a_{12} \ a_{22} \ \cdots \ a_{m2} \mid \cdots \cdots \mid a_{1p} \ a_{2p} \ \cdots \ a_{mp}]^T + \delta(k-1); \text{ at } k-1 \quad (11)$$

ここで、 $\delta(k)$; $(m \times m \times p) \times 1$ ベクトル、互いに独立、平均値 0, カルマンフィルターの状態方程式に用いるガウス白色雑音である。観測方程式は、式(6)に基づいて次のように定式化する。

て、
 $\bar{b}_{ij}(k) = b_{ij}(k) + \varepsilon_{ij}(k) \quad (16)$

状態方程式は、

$$b_{ij}(k+1) = b_{ij}(k) + \delta_{ij}(k) \quad (17)$$

以上、式(11)および(12)、式(16)および(17)を EK-WGI 法のアルゴリズム¹⁰⁻¹²⁾に組み込むことにより、それぞれ係数行列 A_i および B_o の要素を同定することができる。なお、式(16)、(17)の代わりに式(10)を直接分解して \bar{B}_o を求めることができるが、実観測波形のように一般にノイズを含む観測量の場合には、ここで示したシーケンシャルな最適化処理により安定した解を求めることができる。すなわち \bar{B}_o からフィルタリングによりノイズ成分を除去し、 \bar{B}_o を求める。ここでは示さないが、予備計算でこの事実を確認している。

さて、上記の定式化は定常過程に対するものである。非定常過程に対しては、図-1に示すように区間定常性を仮定することにより同定が可能となる。すなわち、時刻 T を中心に、 $k = 1 \sim 2r+1$ のデータを処理して係数行列 A_i を同定する。その結果を時刻 T における係数行

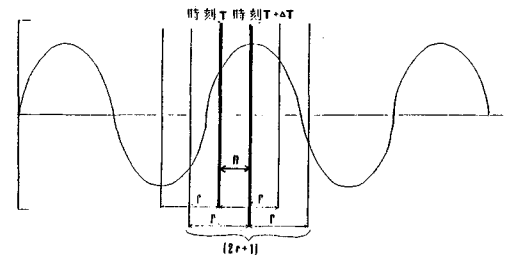


図-1 区間定常の仮定

列 A_i の同定結果とする (\hat{A}_i ; at T).

さらに \hat{A}_i を用いて、定常の場合と同様にして \hat{B}_0 ; at T を同定する。ここで、 $2r+1$ 個のデータによる係数行列の同定結果が効率よく真値に収束するために EK-WGI 法(10), (11), (12)を用いる。

次に一定間隔 ΔT ($n\Delta t = \Delta T, n \geq 1$) 移動して、 \hat{A}_i および \hat{B}_0 ; at $(T+\Delta T)$ を同定する。また、区間 $T \sim T+\Delta T$ の間については直線補間を行うことで計算時間の効率化を計る。

4. 試算例

ここでは、本研究で提案する手法の有効性を数値計算例を用いて示す。なお同定に際し、以下に示すすべての計算例において EK-WGI 法のグローバルな繰り返し回数は 5 回、カルマンフィルターに対する各パラメーターの初期値を 0.0、初期の推定誤差共分散値を 1.0 とし、 $\delta(k)$ の共分散値の要素は 0.0 としている。また $\epsilon(k)$ の共分散値の対角要素は 0.001 とし、その他の要素は 0.0 としている。さらに、区間定常性については $r=40, n=10$ としている。

(1) 同定手法の精度の検証

はじめに、本研究で定式化した同定手法の精度と安定性を検証するために、観測データは、既知の諸元を有する、uni-variate, one-dimensional AR (2) モデルの式(18)を用いてシミュレーションにより 3000 個作成した(図-2)。このように既知のモデルに対する同定を行い、その結果を既知の真値と比較することで本手法の妥当性を検証できる。

$$Y_i(k) = -0.9 * Y_i(k-1) - 0.4 * Y_i(k-2) + 10 * X_i(k) \dots\dots\dots (18)$$

図-3 に各パラメーターの同定結果を示す。図-3 において破線はパラメーターの真の値を示し、実線は本手法によるパラメーターの同定結果を示している。図-3 より同定された各パラメーターは、既知の定常 AR モデルにおける真値と非常に良い対応を示していることがわかる。

なお、この試算例は各区間ごとに EK-WGI 法のグローバルな繰り返しを用いて計算している。しかしなが

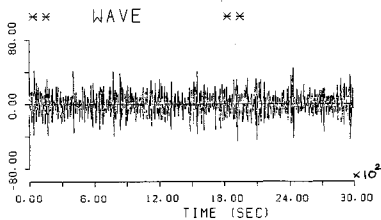


図-2 観測データ

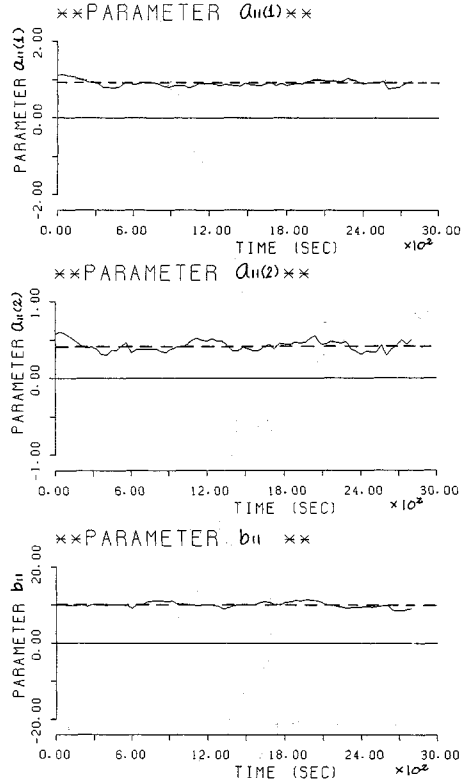


図-3 同定結果

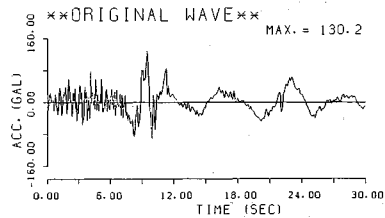


図-4 観測波形 (新潟地震の記録より)

ら、定常のため、図-3 の同定結果は時間軸方向での変動はみられない。

(2) 実観測記録への適用

次に、本手法を実観測記録に適用することを試みる。ここでは、1 変量および 2 変量の実観測確率過程を対象としている。

まず、1 変量確率過程の AR モデルによる同定を行う。サンプル観測波形は時間刻み $\Delta t=0.04$ (s)、継続時間 30 (s) である(図-4)。サンプル観測波形を uni-variate, one-dimensional AR (3) モデルにモデル化してパラメーターの同定を行う。

次に各パラメーターの同定結果を図-5 に示す。図-5 において係数 \hat{B}_0 の同定結果はサンプル波形の包絡

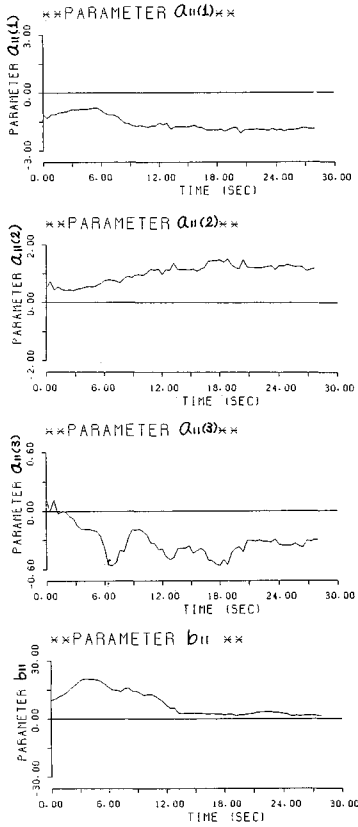


図-5 同定結果

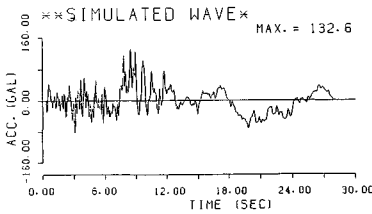


図-6 サンプル波形

線的な時間変動を良く表現していると思われる。また、同定結果から非定常スペクトルを算出することで、容易に周波数成分の時間的変動を調べることも可能である。さらに同定結果の精度を検証するために、同定結果を用

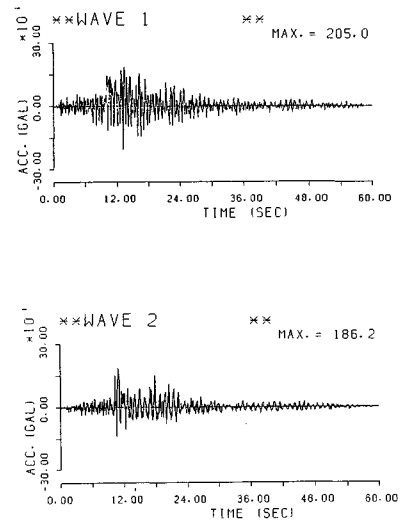


図-7 観測波形 (日本海中部地震の記録より)

いてシミュレートしたサンプル波形を図-6に示す。図-6より、シミュレートしたサンプル波形が観測波形と良い対応を示していることがわかる。したがって、同定されたパラメータの精度は良いものと思われる。

次に、2変量確率過程への適用例について示す。サンプル観測波形は同時観測された一組の地震加速度波形とともに時刻刻み; $\Delta t=0.04$ (s)であり、継続時間は60(s)である(図-7)。ここでは、サンプル観測波形を、2-variate one-dimensional AR (3)モデルにモデル化し同定を行う。ここで、同定するパラメータは15個である。図-8に各パラメータの同定結果を示す。式(3)より明らかであるが、多変量間に相関が存在するときには、 \hat{a}_{ij} , \hat{b}_{ij} ; $i \neq j$ の値はnon zero値となる。図-9に同定結果を用いてシミュレートしたサンプル波形を示す。図-9より、サンプル波形が観測波形(図-7)と良い対応を示していることがわかる。同様に $m \geq 3$ の多変量確率過程に対しても本手法を適用できるものと思われる。

また、本研究では対象としなかったが、ARモデルの最適な次数決定法、定常区間幅の決定法および同定結果とサンプル観測波形の周波数成分での対応等の検討が残されている。

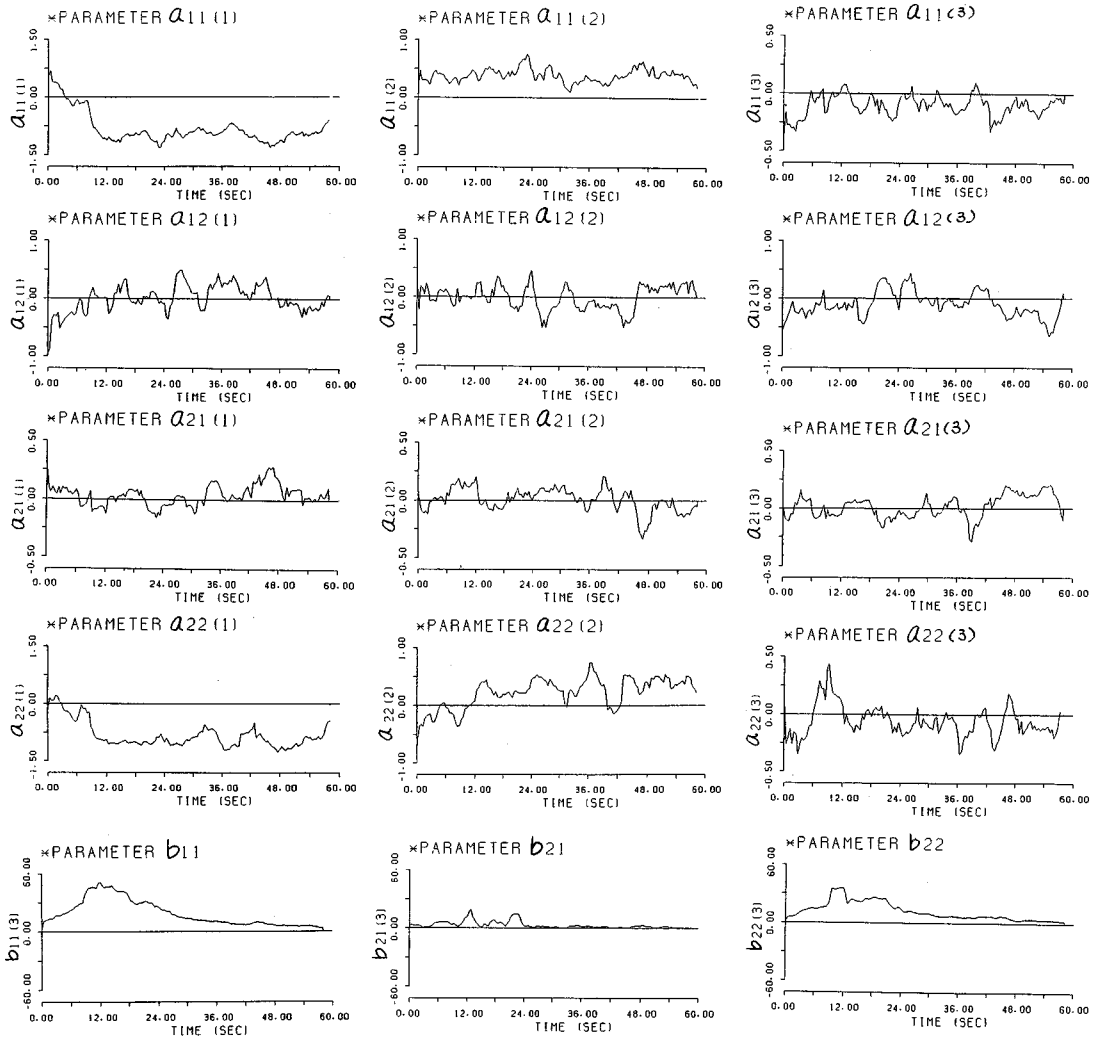


図-8 同定結果

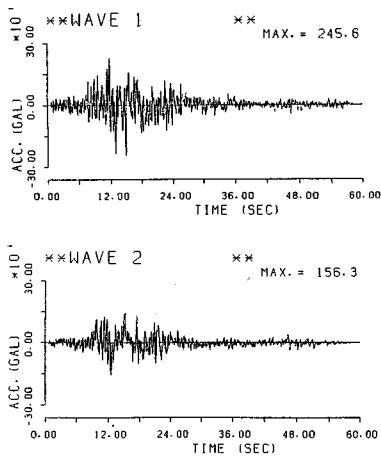


図-9 サンプル波形

5. ま と め

本研究は、地震加速度記録を確率過程現象のサンプル実現波形とみなして、その現象を AR モデルで同定する手法を誘導し、数値解析例により提案する手法の有効性を検証している。用いた手法は、AR モデルを状態方程式および観測方程式へと定式化したうえで Kalman Filter を用いる逐次型最小二乗法による同定法である。

その結果、本研究で行った定式化によれば、定常、非定常性を問わず 1 度のデータ処理によりシステムの同定ができている。本手法は多変量確率過程のモデル化へ適用できる。すなわち、地震動アレー観測データ等の解析手段として広く応用が期待できるものである。

本研究は星谷が理論の誘導を、丸山がカルマンフィルターの計算を分担している。また、最終的な理論の検討は星谷および丸山が行っている。

参 考 文 献

- 1) Samaras, E., Shinozuka, M. and Tsurui, A.: ARMA Representation of Random Processes, Jour. of EM Div., ASCE, Vol. 111, No. 3, March, 1985.
- 2) Deodatis, G. and Shinozuka, M.: An Auto-Regressive Model for Non-Stationary Stochastic Processes, Stochastic Mechanics Vol. II, Columbia Univ., pp.227~258, April, 1987.
- 3) Nagamura, T., Deodatis, G. and Shinozuka, M.: An ARMA Model for Two-Dimensional Processes, Jour. of EM Div., ASCE, Vol. 113, No. 2, Feb., 1987.
- 4) Hoshiya, M., Ishii, K. and Nagata, S.: Recursive Covariance of Structural Responses, Jour. of EM Div., ASCE, Vol. 110, No. 12, Dec., 1984.
- 5) Hoshiya, M. and Shibusawa, S.: Response Covariance to Multiple Excitations, Jour. of EM Div., ASCE, Vol. 112, No. 4, April, 1986.
- 6) Hoshiya, M., Naruyama, M. and Kurita, H.: Autoregressive Model of Spatially Propagating Earthquake Ground Motion, Proc. of Probabilistic Methods in Civil Engineering, ASCE, Blacksburg, Virginia, May, 1988.
- 7) Nau, R.F., Oliver, R.M. and Pister, K.S.: Simulating and Analyzing Artificial Nonstationary Earthquake Ground Motions, Bulletin of Seism. Soc. of Am., Vol. 72, No. 2, April, 1982.
- 8) 高橋・川上: AR モデルを用いた波動伝播特性の推定方法に関する研究, 土木学会第 43 回年次学術講演会, I 部門, pp.1002~1003, 昭和 63 年 10 月.
- 9) Gersch, W., Taoka, G.T. and Liu, R.: Structural System Parameter Estimation by Two-Stage Least-Squares Method, Jour. of EM Div., ASCE, EM5, Oct., 1976.
- 10) Hoshiya, M. and Saito, E.: Structural Identification by Extended Kalman Filter, Jour. of EM Div., ASCE, Vol. 110, No. 12, Dec., 1984.
- 11) Hoshiya, M. and Maruyama, O.: Identification of a Running Load and Beam System, Jour. of EM Div., ASCE, Vol. 113, No. 6, June, 1987.
- 12) Hoshiya, M.: Application of the Extended Kalman Filter-WGI Method in Dynamic System Identification, Stochastic Structural Dynamics-Progress in Theory and Applications, Elsevier Applied Science, pp.103~124, 1988.

(1989.9.7・受付)