

## 断面力表示構成則を用いた鋼骨組構造物の弾塑性有限変位解析

## ELASTIC-PLASTIC LARGE DISPLACEMENT ANALYSIS OF STEEL FRAMED STRUCTURES WITH A STRESS RESULTANT CONSTITUTIVE LAW

宇佐美 勉\*・柴田輝昭\*\*

By Tsutomu USAMI and Teruaki SHIBATA

With the increasing capacity of electronic computers, elastic-plastic, large displacement analysis of steel structures has now become reality in research level. However, there remain some problems that must be overcome. One of those is to reduce the computation time. It is a usual practice to divide the cross-section of a member into many elements so that the spread of yielding in the cross-section may be taken into account. This is considered to be the main reason why a huge computation time is required. In this paper a new constitutive law is introduced which is expressed as direct functions of stress resultants. With this constitutive law the cross-section need not be divided, yet the penetration of yielding into the cross-section as well as along the member may be taken into consideration in an approximate manner. It has been demonstrated that this newly developed scheme saves computation time considerably.

*Keywords: steel structure, constitutive law, finite displacement, yielding*

## 1. 緒 言

鋼構造物の材料および幾何学的非線形解析（複合非線形解析）はコンピュータの発達に伴った有限要素法の進歩によって実用的なものになりつつあり、国の内外ですでに数多くの研究が行われている<sup>1)~13)</sup>。しかしながら、残された最も大きな課題の1つは、膨大な計算時間を短縮できる解法を開発することであろう。単調増大荷重を受ける構造物の解析はまだしも、繰返し外力（準静的荷重）または動的外力を受ける複雑な構造物の複合非線形解析には、現在の進歩したスーパーコンピュータをもってしても、膨大な計算時間を要する。本研究の目的は、鋼平面骨組構造物に対象を限定して、計算時間の短縮を目的とした、複合非線形解析法を開発することである。

骨組構造物の複合非線形解析を行うにあたっては、通常は部材の断面を有限個の要素に分割し、各要素について応力の記憶や降伏判定を行っている。このことが幾何学的非線形解析に比べ、複合非線形解析の計算時間が飛

躍的に増大する主要因になっている。したがって、断面の要素分割を行わずに断面力の直接関数で表わした構成式（以後、断面力表示構成則とよぶ）を使用することによって、計算時間の大幅な短縮が期待できると考えられる。こういった試みの1つとして塑性ヒンジ法<sup>7),12)</sup>がある。この方法は、断面力の組合せが、全塑性状態を表わす降伏曲面に達したときにその断面に塑性ヒンジが形成され、それ以外の部分は弾性とみなす方法である。この方法は、簡便であるが、初期降伏から全塑性に至る過程および部材軸に沿っての降伏域の広がりとともに無視されていることにより、弾塑性領域で座屈（屈服）が生ずるような構造物の解析には適さない。さらに、この方法では極限荷重以降の荷重降下域の計算はできない。塑性ヒンジ法のもつこれらの欠点を解消する試みが、薄板やシェルの弾塑性有限変位解析に対して、Crisfield<sup>13)</sup>によって行われている。Crisfieldは、全塑性状態のみを対象にした薄肉シェルの降伏関数（Ilyushinの降伏関数）を修正し、初期降伏から全塑性状態に至るまでの過程の降伏関数を新たに求め、それをもとに構成式を誘導し、薄板構造物の弾塑性有限変位解析に適用している。また、Batoz・Lebouvier<sup>14)</sup>は、同じ考え方により、長方形断面のアーチ、リングの解析を行っている。

本研究では、Crisfieldによって初めて導入された降

\* 正会員 工博, D.Sc. 名古屋大学教授 工学部土木工学科 (〒467 名古屋市千種区不老町)

\*\* 正会員 工修 日本電信電話(株)社内情報システム開発センター (〒220 横浜市西区北幸2-11-6)

伏関数の概念を拡張し、長方形、H形、箱形、薄肉円管断面に適した降伏関数を定め、この式より断面力表示構成則を誘導し、さらに、近似更新ラグランジュ手法 (Approximate Updated Lagrangian Formulation, AULF)<sup>15)</sup>を用いた平面骨組構造物の複合非線形解析を行い、この手法の有効性を特に計算時間の短縮の観点から検討する。

断面力表示構成則を用いて、準静的荷重または動的外力の加わる鋼骨組構造物の解析をすることが本研究の最終目的であるが、本論文ではその基礎的段階として、静荷重のみを対象としている。

2. 断面力表示構成則の誘導

(1) 初期降伏関数と全塑性状態降伏関数

軸力  $N$  と一軸曲げモーメント  $M$  を受ける完全弾塑性体からなる断面の弾塑性挙動を考える (Fig.1 参照)。断面は少なくとも1軸対称とし、軸力  $N$  は断面の重心、曲げモーメントは対称軸に直角方向回りに作用するものとする。残留応力の影響を無視すれば、任意断面の初期降伏条件は次式で与えられる。

$$f \cdot m + n = 1 \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $m = M/M_p$ ,  $n = N/N_y$ ,  $M_p$ : 全塑性モーメント,  $N_y$ : 降伏軸力,  $f$ : 形状係数 (Shape Factor) である。全塑性になるときの軸力と曲げモーメントの相関関係 (全塑性状態降伏関数) は断面形により異なり、たとえば矩形断面については次式で与えられる<sup>16),17)</sup>。

$$m = 1 - n^2 \dots\dots\dots (2)$$

強軸回りの曲げを受ける広幅H形断面および箱形断面に対しては、たとえば文献16)に式が与えられており、いずれの場合もフランジと腹板の断面積比  $A_f/A_w$  および断面の高さと腹板高の比  $d/d_w$  の関数で表わされる。また、薄肉円管に対しては文献17)に記載があるが、比較的厚肉の円管の場合には数値計算による必要がある。

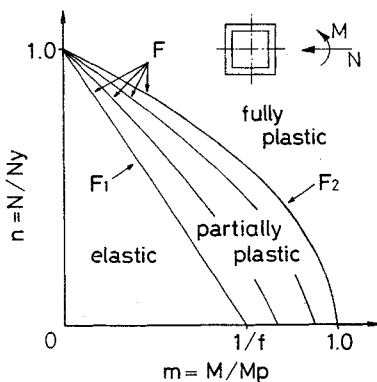


Fig.1 Concept of Yield Functions.

本論文では、弾性限界条件式 (1) より初期降伏関数  $F_1$  を、また、全塑性状態における相関式より全塑性状態降伏関数  $F_2$  を統一的に次式によって定める。

$$F_1 = f \cdot m + n - 1 \dots\dots\dots (3)$$

$$F_2 = m^{C_1} + n^{C_2} - 1 \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $C_1, C_2$  は断面形により定まる係数で、式 (2) より矩形断面では、 $C_1=1, C_2=2$  である。これ以後、 $C_1$  と  $C_2$  を降伏係数とよび、次節でこれらの値を定める。

(2) 降伏係数の決定法とその値

種々の断面の降伏係数  $C_1, C_2$  は、軸力と曲げモーメントの全塑性相関関係式を  $F_2=0$  とおいて、非線形最小二乗法を用いて定めた。すなわち、全塑性状態における厳密な相関関係式 (たとえば矩形断面については式 (2)) より、 $m$  と  $n$  の正解値を座標値 ( $m_i, n_i$ ),  $i=1, 2, \dots$  として求め、

$$\sum (1 - m_i^{C_1} - n_i^{C_2})^2 \rightarrow \text{最小} \dots\dots\dots (5)$$

となる  $C_1, C_2$  を求めた。各断面について、座標値は  $n = 0.1 \sim 0.9$  の9か所選定し、準ニュートン法による非線形最小二乗法<sup>18)</sup>により求めた。

強軸回りの曲げを受けるH形断面および箱形断面については、Fig.2 (b) に示すように、断面の全高と腹板高の比  $d/d_w$  の実用的範囲内の変化に対して降伏係数はほとんど変わらなかった。したがって、Fig.2 (a) に示すように、 $d/d_w=1.05$  について、断面積比  $A_f/A_w$  (ただし、箱形断面については  $A_w$  は2枚の腹板の面積) を0.3から2.0まで変化させて降伏係数を求め、最小二乗近似により次式を求めた。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0.82 + 0.02(A_f/A_w) \\ C_2 &= 1.95 - 0.28(A_f/A_w) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

このように  $C_1, C_2$  を定めたが、降伏関数によって描かれる降伏曲面が  $C_1 < 1$  となると、部分的に凸性 (Convexity)<sup>19)</sup> を失うことがわかったので、新たに  $C_1 = 1$  と定めておいてから、 $C_2$  の値を決めた。結果はFig.3および式 (7) に示すとおりであり、本論文の解析例では、すべて  $C_1=1$  とした場合の降伏係数で行っ

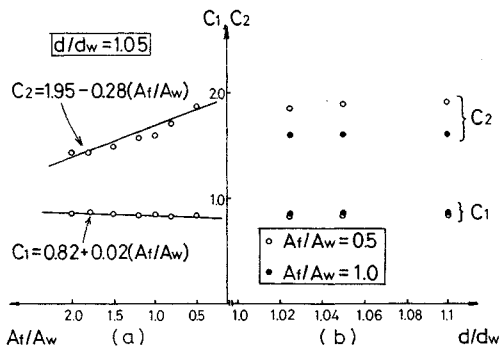


Fig.2 Coefficients  $C_1$  and  $C_2$  (H and Box Sections).

ている。

$$C_2 = 1.75 - 0.27(A_f/A_w) \dots\dots\dots (7)$$

円管については、直径と厚さの比(径厚比)  $D/t$  が 20 から 100 について計算を行い、 $D/t$  の一次式でまとめた。正解値を求めるための肉厚の違いによる全塑性相関関係式を定めることが困難であるため、数値計算的<sup>20)</sup>に求めた値を正解値として与え、以下の式を求めた。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0.908 - 0.02(D/t)/100 \\ C_2 &= 1.877 + 0.02(D/t)/100 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

しかし円管の場合もH形断面と同様な問題があるため、 $C_1=1$ とし、 $C_2$ 値を求めると、径厚比にかかわらずほぼ一定の値  $C_2=1.73$ であったので、この場合は  $C_1, C_2$ とも一定値として取り扱った。

箱形 ( $A_f/A_w=0.53$ ) および円管 ( $D/t=48$ ) の  $F_1$  と  $F_2$  を Fig. 4 に示す。図中の直線は  $F_1$  を、曲線は  $F_2$  である。また、 $F_2$  の実線は、 $C_1=1$  と固定した場合、点線は、 $C_1 \neq 1$  の場合である。□印は厳密な全塑性相関関係式より求められた正解値であり、 $C_1 \neq 1$  の方が正解値と良く合っているが、ほとんど差がないことがわかる。

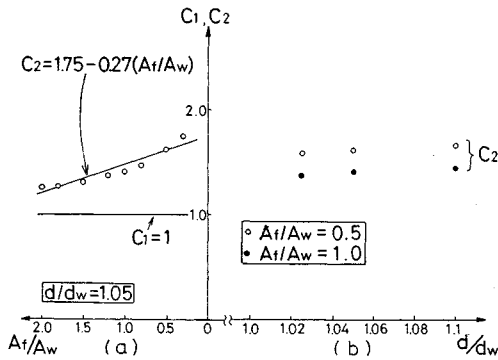


Fig. 3 Coefficient  $C_2$  when  $C_1=1.0$  (H and Box Sections).

### (3) 断面塑性尺度 $\alpha$ と降伏関数

前節までで、各種断面形の初期降伏関数  $F_1$  と、全塑性状態降伏関数  $F_2$  は定まったので、次に、 $F_1$  から  $F_2$  の間をうめるべき、(後続の)降伏関数  $F$  を定める (Fig. 1 参照)。そこで、断面内の塑性状態の尺度となるべきパラメーター関数  $\alpha$  を導入する。 $\alpha$  は純曲げを受ける断面について定義し、以下のようにおく。

$$\alpha = 1 - (1 - 1/f) \exp(-\beta \phi_p) \dots\dots\dots (9)$$

この式で、 $\beta$  は断面形により定まる係数 (以後、弾塑性係数とよび具体的な数値は次節で定める)、 $\phi_p = \Phi_p / (M_p/EI)$  である。ここで、 $\Phi_p$  は塑性曲率、 $E$  は弾性係数、 $I$  は断面 2 次モーメントである。 $\alpha$  は、曲げモーメントを全塑性モーメントで割ったもの (すなわち、 $\alpha = M/M_p$ ) と物理的な意味付けができる。塑性曲率  $\phi_p$  が零のとき (すなわち弾性限で)  $\alpha = 1/f$ 、 $\phi_p = \infty$  のとき (すなわち全塑性状態で)  $\alpha = 1$ 、すなわち  $M = M_p$  となる。 $\beta$  により曲線の形状、言い換えるなら、断面の弾塑性挙動が変化する。式 (9) は、薄肉シェルに対して、 $\beta=4$  として、Crisfield によって導入された式である<sup>13)</sup>。

このパラメーター  $\alpha$  を使って後続の降伏関数  $F$  を以下の手順で求める。

ステップ (1): 式 (4) の  $m$  を  $m/\alpha$  に置き換える。全塑性状態では  $\alpha=1$  であり、 $F=F_2$  となる。

$$F = (m/\alpha)^{\alpha_1} + n^{\alpha_2} - 1 \dots\dots\dots (10)$$

ステップ (2):  $m$  と  $n$  の関数形である未知の関数  $g(m, n)$  を導入し、 $(1-\alpha)$  を  $g(m, n)$  にかけて、式 (10) の  $F$  に加える。すなわち、以下の式となる。

$$F = (m/\alpha)^{\alpha_1} + n^{\alpha_2} - 1 + (1-\alpha)g(m, n) \dots\dots\dots (11)$$

関数  $g(m, n)$  の係数  $(1-\alpha)$  は必ずしもこのような形でなくても良いが、 $\alpha=1$  のとき  $F=F_2$  となる最も簡単な係数としてこの形を採用した。

ステップ (3): 最後に、上式で  $\alpha=1/f$  (弾性限界)

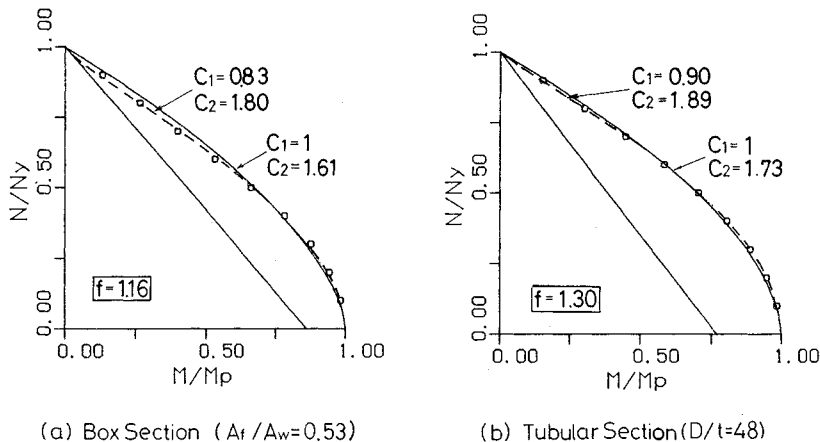


Fig. 4 Comparisons of Fully Plastic Yield Functions.

のとき  $F=F_1$ , すなわち式(3)となるように  $g(m, n)$  を定めると次式のようなになる。

$$g(m, n) = [f \cdot m + n - (f \cdot m)^c - n^c] / (1 - 1/f) \quad \dots\dots\dots(12)$$

このように定めた降伏曲面は、初期降伏から全塑性状態の移り変わりを曲げと軸力を受ける断面に対しても純曲げ状態に対する塑性曲率の関数  $\alpha$  によって考慮しているため、あくまでも曲げが支配的な骨組構造物について成り立つ。

(4) 弾塑性係数  $\beta$  の決定法

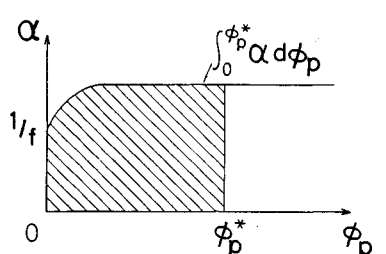
$\beta$  の値は、純曲げ断面に対する曲げモーメント～曲率関係の正解値より得られる塑性エネルギーと式(9)から得られる塑性エネルギーの近似値を一致させることにより定める。近似値による塑性エネルギー  $E_a$  は、Fig. 5 (a) の斜線部で与えられ、 $0 \leq \phi_p \leq \phi_p^*$  ( $\phi_p^*$  については後述) とすると、式(9)の  $\alpha$  を 0 から  $\phi_p^*$  まで積分することにより以下に示すようになる。

$$E_a = \phi_p^* + (1 - 1/f) \int_0^{\phi_p^*} \alpha d\phi_p \quad \dots\dots\dots(13)$$

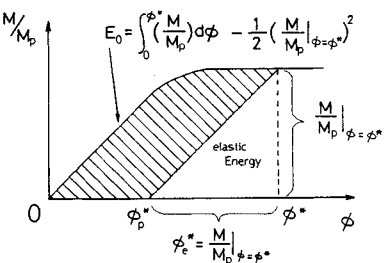
また、正解値による塑性エネルギー  $E_0$  は、全エネルギーを積分計算した後、弾性分を引いて求めた次式を用いる (Fig. 5 (b) 参照)。

$$E_0 = \int_0^{\phi^*} \frac{M}{M_p} d\phi - \frac{1}{2} \left( \frac{M}{M_p} \Big|_{\phi=0}^{\phi=\phi^*} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここで  $\phi^*$  は  $\phi_p^*$  に対応する全曲率である。式(13)と式(14)を等値して Newton 法により  $\beta$  を求めた。なお、 $E_0$  の積分計算にはシンプソンの公式を用いた。 $\phi_p^*$  につ



(a) Approximate



(b) Exact

Fig. 5 Approximate and Exact Expressions for Plastic Strain Energy.

いては、断面により若干異なるが、十分に  $\alpha=1$  に漸近した値 ( $\phi_p^*=8\sim 9$ ) とした。

数値計算の結果、Table 1 に示すような値を得た。同表には、種々の断面の降伏係数の値もまとめてある。

(5) 断面力表示構成則

これまで求めた降伏関数を使って、増分形の断面力表示構成則を求める。

部材断面重心点の軸方向ひずみ増分  $\Delta\epsilon$ 、曲率増分  $\Delta\Phi$  は、弾性成分と塑性成分に分割することができると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\epsilon &= \Delta\epsilon_e + \Delta\epsilon_p \\ \Delta\Phi &= \Delta\Phi_e + \Delta\Phi_p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

上式で、 $e$  は弾性成分を、 $p$  は塑性成分を示す。軸力増分および曲げモーメント増分、 $\Delta N$ 、 $\Delta M$  は式(15)の弾性成分にそれぞれ弾性域の剛性を乗ずることにより次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta N &= EA(\Delta\epsilon - \Delta\epsilon_p) \\ \Delta M &= EI(\Delta\Phi - \Delta\Phi_p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

また、降伏関数  $F$  は、 $N$ 、 $M$ 、 $\Phi_p$  の関数であり、Prager の適応条件<sup>19)</sup>により、以下の式を得る。

$$(\partial F / \partial N) \Delta N + (\partial F / \partial M) \Delta M + (\partial F / \partial \Phi_p) \Delta \Phi_p = 0 \quad \dots\dots\dots(17)$$

法線則<sup>19)</sup>により、塑性ひずみ増分  $\Delta\epsilon_p$ 、塑性曲率増分  $\Delta\Phi_p$  は、以下の式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\epsilon_p &= \Delta\lambda (\partial F / \partial N) \\ \Delta\Phi_p &= \Delta\lambda (\partial F / \partial M) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

上式で、 $\Delta\lambda$  はスカラー量である。式(15)～(18)より  $\Delta\lambda$  を求めると次式を得る。

$$\Delta\lambda = [EA(\partial F / \partial N) \Delta\epsilon + EI(\partial F / \partial M) \Delta\Phi] / \chi \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$\chi = EA(\partial F / \partial N)^2 + EI(\partial F / \partial M)^2 - (\partial F / \partial \Phi_p) \cdot (\partial F / \partial M) \quad \dots\dots\dots(20)$$

式(16)、(18)、(19)より、次に示すような断面力表示構成則を得る。

$$\{\Delta S\} = [D_{ep}] \{\Delta x\} \quad \dots\dots\dots(21)$$

ここで、

$$\{\Delta S\}^T = [\Delta N, \Delta M] \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$\{\Delta x\}^T = [\Delta\epsilon, \Delta\Phi] \quad \dots\dots\dots(23)$$

Table 1 Summary of Coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  and  $\beta$ .

	Rectangular section	H, BOX section	Tubular section
$C_1$	1	1	1
$C_2$	2	$1.75 - 0.27 \frac{A_f}{A_w}$	1.73
$\beta$	2.15	$1.45 + 0.23 \frac{A_f}{A_w}$	$2.5 - 0.645 \frac{D/t}{100}$

Limitations:  $0.3 \leq A_f/A_w \leq 2.0$  (H and Box Sections)  
 $10 \leq D/t \leq 100$  (Tubular Section)

$$[D_{ep}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= EA - (EA \cdot \partial F / \partial N)^2 / \lambda \\ D_{22} &= EI - (EI \cdot \partial F / \partial M)^2 / \lambda \\ D_{12} &= D_{21} = -(EA \cdot \partial F / \partial N) \cdot (EI \cdot \partial F / \partial M) / \lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

上式中およびλ中の∂F/∂N, ∂F/∂M, ∂F/∂Φ<sub>p</sub>は、式(11), (12)を偏微分することにより求められる。

弾性域では、以下の式となる。

$$D_{11} = EA, D_{22} = EI, D_{12} = D_{21} = 0 \dots\dots\dots (26)$$

(6) 各種断面のM~N~Φ挙動

Fig. 4に示したものと同一断面および矩形断面について軸力一定のもとでのM-Φ曲線を正解値<sup>20), 21)</sup>と式(21)から求められる近似値と比較してFig. 6に示す。図の実線が正解値であり、点線がここで求めた近似式によるものである。どの断面も正解値と近似値の間には良好な一

致がみられる。

3. 有限変位解析の定式化

ここでは、変形に従って部材座標系を移動させてゆく近似更新ラグランジュ法<sup>15)</sup>(以下、AULFと略記する)に従う、平面骨組構造の複合非線形解析の定式化について述べる。また、荷重の上昇から降下域を含む領域を効率よく解析するためにCrisfieldの修正弧長法<sup>22)</sup>を解析アルゴリズムに用いている。

(1) 増分形剛性方程式

平面構造の内力と外力のつり合う状態をΩとする、AULFでは、Fig. 7に示すように既知のつり合い状態Ω<sub>n</sub>での要素の両節点を結んで定義される部材座標系(x<sub>n</sub>, y<sub>n</sub>)で記述した、Ω<sub>n</sub>に近接する未知のつり合い状態Ω<sub>n+1</sub>における増分形式でのつり合い式を反復的に解くことになる。その際、Ω<sub>n</sub>で、要素は近似的に直線とみなす。したがって、Ω<sub>n+1</sub>状態でのつり合い式を表わす仮想変位の式は次式で表わされる<sup>15)</sup>。

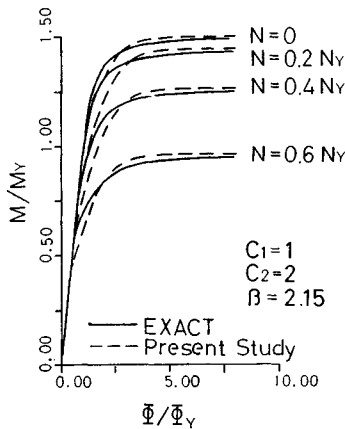
$$\int_v (\Delta \sigma_x \delta \Delta e_x^L + \sigma_x \delta \Delta e_x^{NL}) dV = |\delta d|^T (|\Delta r| + |r|) - \int_v \sigma_x \delta \Delta e_x^L dV \dots\dots\dots (27)$$

ここで、

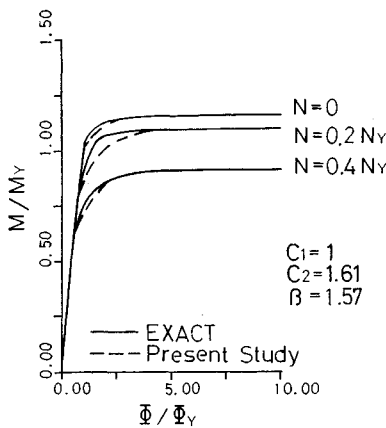
$$\left. \begin{aligned} |\Delta r|^T &= [\Delta N_i, \Delta N_j, \Delta Q_i, \Delta M_i, \Delta Q_j, \Delta M_j] \\ |r|^T &= [N_i, N_j, Q_i, M_i, Q_j, M_j] \\ |\Delta d|^T &= [\Delta u_i, \Delta u_j, \Delta v_i, \Delta \theta_i, \Delta v_j, \Delta \theta_j] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

Δσ<sub>x</sub>: 垂直応力増分, Δe<sub>x</sub><sup>L</sup>: Greenのひずみ増分の線形項, Δe<sub>x</sub><sup>NL</sup>: Greenのひずみ増分の非線形項, σ<sub>x</sub>: Ω<sub>n</sub>状態での垂直応力(オイラー応力)であり、積分はΩ<sub>n</sub>状態の要素(長さl<sub>n</sub>)について行う。

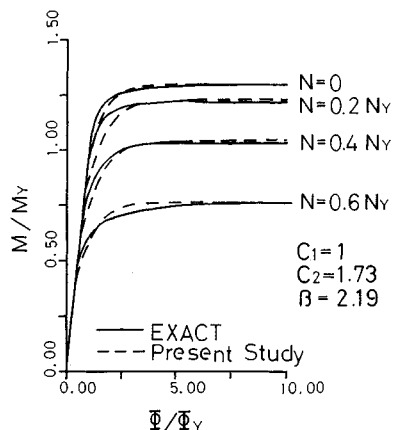
次に、要素内での任意の断面の部材軸の軸方向変位増



(a) Rectangular Section



(b) Box Section (A<sub>f</sub>/A<sub>w</sub>=0.53)



(c) Tubular Section (D/t=48)

Fig. 6 Comparisons of M-N-Φ Curves.

分を  $\Delta u(x)$ , たわみ増分を  $\Delta v(x)$  として, 次のような  $x$  の内挿関数を仮定する.

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= [N_u] \{\Delta d_u\} \\ \Delta v(x) &= [N_v] \{\Delta d_v\} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで,  $[N_u]$ ,  $[N_v]$  は, それぞれ 1 次, 3 次多項式の形状関数であり, また,  $\{\Delta d_u\}$ ,  $\{\Delta d_v\}$  は, 節点変位増分ベクトルで, 次のように示される.

$$\begin{aligned} \{\Delta d_u\}^T &= [\Delta u_i, \Delta u_j] \\ \{\Delta d_v\}^T &= [\Delta v_i, \Delta \theta_i, \Delta v_j, \Delta \theta_j] \end{aligned} \quad (30)$$

式 (29) を, 仮想変位式 (27) に代入し, 式 (21) の構成則を用いると, 以下に示すような平面棒要素に対する剛性方程式が得られる.

$$([k] + [k_c]) \{\Delta d\} = \{\Delta r\} + \{r\} - \{f\} \quad (31)$$

$$[k] = \int_0^{l_n} \begin{bmatrix} D_{11}[N'_u]^T [N'_u] & D_{12}[N'_u]^T [N'_v] \\ \text{sym} & D_{22}[N'_v]^T [N'_v] \end{bmatrix} dx \quad (32)$$

$$[k_c] = \int_0^{l_n} N \begin{bmatrix} [N'_u]^T [N'_u] & 0 \\ \text{sym} & [N'_v]^T [N'_v] \end{bmatrix} dx \quad (33)$$

$$\{f\} = \int_0^{l_n} \begin{bmatrix} N [N'_u]^T \\ M [N'_v]^T \end{bmatrix} dx \quad (34)$$

ここに,  $N, M$  は  $\Omega_n$  状態での, 軸力, 曲げモーメントである. これらの量の計算方法は, 基本的には文献 23), pp. 249~257 の方法に従っている. 計算方法の詳細については文献 24) に譲る.

式 (31) を全要素について作成し, 全体座標系に座標変換して重ね合わせると最終的に次式を得る.

$$([K] + [K_c]) \{\Delta D\} = \{\Delta R\} + \{R\} - \{F\} \quad (35)$$

ここで,  $\{R\}$ : 全体座標系での  $\Omega_n$  状態の荷重ベクトル,  $\{\Delta R\}$ : 全体座標系での  $\Omega_n$  状態から  $\Omega_{n+1}$  状態までの荷重増分ベクトル,  $\{F\}$ : 全体座標系での  $\Omega_n$  状態の内力と等価な節点力ベクトルの和,  $[K]$ : 全体座標系での構造物全体の剛性行列,  $[K_c]$ : 全体座標系での構造物全体の幾何剛性行列,  $\{\Delta D\}$ : 全体座標系での構造物全体の節点変位増分ベクトルである.

(2) 解析アルゴリズム

式 (35) の増分形つり合い式をもとに修正 Newton-

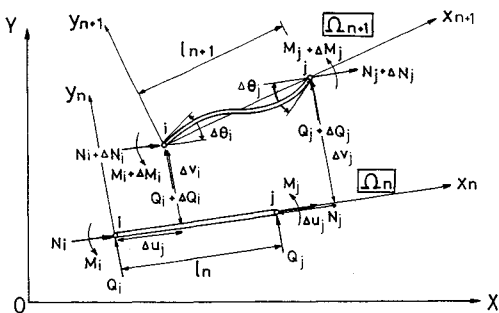


Fig. 7 Equilibrium Positions of Plane Frame Member.

Raphson 法を基本とする Crisfield の修正弧長法によりつり合い状態を求めた. 修正弧長法の詳細は文献 22) に譲るが, この方法は, 荷重増分法のように, 荷重一定のもとで Newton-Raphson 法などによりつり合い点を求めるのではなく, 繰り返し計算中, 荷重も変化させ, その代わり直前の (既知の) つり合い点からの変位増分のノルムを一定に保つ条件を加える方法である. 弧長法にもいろいろな方法があるが, 文献 25) の種々の幾何学的非線形問題に関する数値実験によれば, Crisfield の方法が最も優れているといわれている. Crisfield の修正弧長法は比例荷重の仮定が必要であるため, ここでもその仮定を設ける.

4. 数値計算例と考察

2. で求めた構成則と, 3. で記述した解析方法を用いて行った数値計算例を示す. 式 (32)~(34) に現われる積分は, Gauss-Lobatto の積分公式<sup>26)</sup> (積分点=4) によって求めた. 計算には構造解析汎用プログラム FEAP<sup>27)</sup> (Finite Element Analysis Program) を利用し, 構成則, 要素剛性行列, 内力に等価な節点力, 修正弧長法などの部分を書き加えることにより, 解析を行った. 収束の判定は, 節点変位増分ベクトルのユークリッドノルムがその増分区間内の節点変位増分ベクトルのユークリッドノルムの最大値に対して  $10^{-5}$  以下のとき収束したと判定した.

解析例 1

はじめに, 飛び移り現象のある弾性アーチ<sup>28)</sup>を解析して, 幾何学的非線形問題に対する本解析方法の有効性について示す. Fig. 8 に示すような, Sine 曲線で与えられるアーチの中央に鉛直荷重の載荷された問題を解いた. 対称性から, 構造物の 1/2 を 5 等分割して計算した. 解析結果は変位増分法によって解析した文献 28) の結果とほとんど一致した.

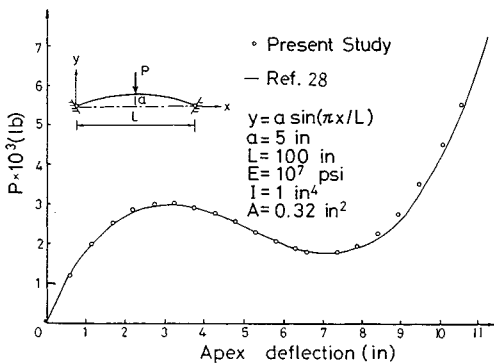


Fig. 8 Snap-through of Elastic Arch (1 in. = 25.4 mm, 1 psi = 6.895 kPa, 1 lb = 4.448 N).

解析例 2

薄肉円管中心軸圧縮柱 ( $D/t=48$ ) の弾塑性解析を行い、断面をメッシュに切って各微小要素で降伏判定を行い、断面について積分を行って構成則を求める従来の方法と、本論文で提案する構成則より求めた結果の計算時間などの比較を行う。断面をメッシュ分割する場合は、円周方向に16個、厚さ方向には1個と3個に分割した。要素数は、両解析とも部材長  $L$  の半分に対して5要素とし、最大初期たわみ  $\delta_0/L=1/1000$ 、 $E=29000$  ksi (200 GPa)、 $\sigma_y=36$  ksi (248 MPa) である。また、径厚比  $D/t=48$  より  $C_1=1.0$ 、 $C_2=1.73$ 、 $\beta=2.19$  である。Fig. 9 に本論文の構成則による計算結果 (○印)、断面をメッシュに切って構成則を求める方法による解析結果 (△および▲印) を Chan・Kitipornchai<sup>9)</sup> および Sugimoto・Chen<sup>29)</sup> の解析結果と比較して示す。Chanらおよび Sugimotoらはいずれも断面をメッシュ分割して解析したものである。さらに、構成則の求め方による計算時間の相違を Table 2 に示す。Fig. 9 からわかるように、本研究の2通りの計算方法による結果および Chanらの計算結果は変位の大きな領域までほぼ一致する。また、本研究の2つの方法の計算時間を比較すると、メッシュを切った場合に比べて、本論文で求めた構成則を用いた場合、計算時間が約1/5~1/10と著しく減少し

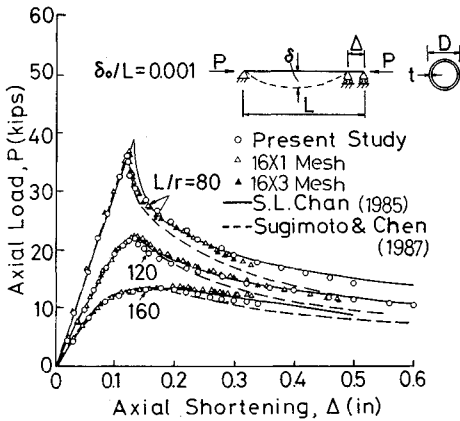


Fig. 9 Centrally Loaded Tubular Columns (1 in. = 25.4 mm, 1 kip = 4.48 kN).

Table 2 Comparisons of CPU Time in Mili Seconds.

	$L/r=80$	$L/r=120$	$L/r=160$
Present Study	4309	4662	4810
	(1)	(1)	(1)
Mesh	28917	25450	25218
16x1	(671)	(546)	(524)
Mesh	53298	42051	37719
16x3	(12,37)	(9,02)	(7,84)

( ): Ratio of CPU Time

ていることがわかる。メッシュを  $16 \times 1$  の場合と  $16 \times 3$  で、結果に大差が認められなかったことより、 $16 \times 3$  というのは、多少メッシュの数が多すぎる感があるが、計算時間が最低1/5に短縮されたということは、本研究での成果であり、さらに複雑な骨組構造物を解析した場合大きな威力を発揮するものと考えられる。

解析例 3

次に偏心圧縮を受ける正方形箱形断面 (幅 203 mm, 厚さ 6.3 mm) 柱を解析し、文献10)の結果と比較した。Fig. 10 に示すような偏心量  $e$  と部材長  $L$  の比を3種類に変化させた、細長比  $L/r=60$ 、 $E=200$  GPa、 $\sigma_y=406$  MPa の柱を解析した。要素は部材の半分に対し5要素とした。断面比  $A_f/A_w=0.53$  より、降伏係数、弾塑性係数を計算すると、 $C_1=1.0$ 、 $C_2=1.61$ 、 $\beta=1.57$  であった。図の縦軸は、軸力  $P$  を  $P_f=A\sigma_y$  で除したもので、横軸は、軸方向変位である。文献10)によるも

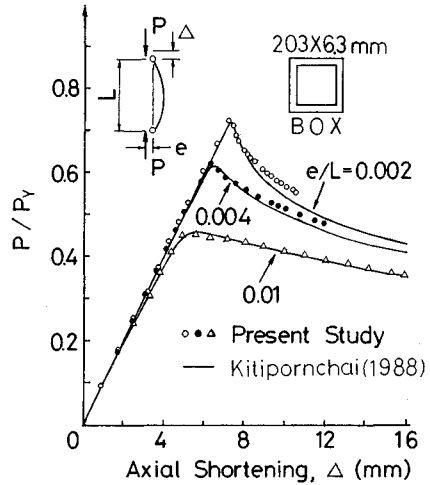


Fig. 10 Eccentrically Loaded Box Columns (Problem 3).

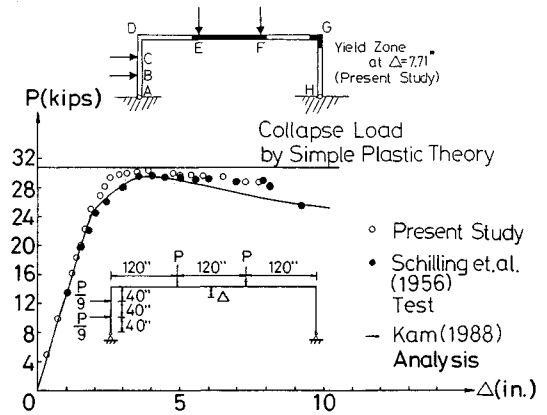


Fig. 11 1-Story, 1-Bay Rigid Frame of H-Section (1 in. = 25.4 mm, 1 kip = 4.448 kN).

のと比較すると、全体の挙動がよく一致しており、ピークの値もほぼ等しく現われている。

解析例 4

Fig. 11 に示す両端ヒンジ、4 か所に荷重の加わる 1 層ラーメンを解き、荷重  $P$  とはり中央の鉛直変位  $\Delta$  の関係を同図に示した。柱に対しては 10 要素、はりに対しては 19 要素とした。  $E=30\,000$  ksi (207 GPa),  $\sigma_y=36$  ksi (248 MPa), 断面は W12 $\times$ 36 (AISC 規定),  $C_1=1.0$ ,  $C_2=1.47$ ,  $\beta=1.69$  である。 Fig. 11 には、Schilling らによって行われた実験の結果<sup>30),31)</sup>と、Kam による数値解析結果<sup>11)</sup>が示されている。本研究の数値計算結果と Kam の数値計算結果とを比較すると、後者は前者より早期に剛性を失い、ピーク後の強度も低めになっていることがわかる。これは、Kam の方法では、フランジの厚さを無視しているため、塑性の効果が早く現われたものと思われる。本研究の計算結果と実験値との差は、本研究で無視されている残留応力の影響と考えられるが、

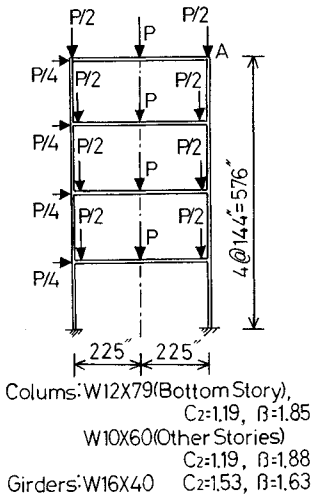


Fig. 12 Example Problem 5 (1 in. = 25.4 mm).

最高荷重およびその後の挙動については両者はほとんど一致している。本計算で求められた最高荷重は 29.50 kips (131.2 kN) であり、単純塑性理論で求められた崩壊荷重は 29.76 kips (132.4 kN) である。したがって、この問題における有限変位の影響は非常に小さい。同図中には、 $D=7.71$  inch (19.6 mm) における塑性域の進展状態 (黒塗の部分) が塑性域) も示されている。単純塑性理論によって求められた崩壊モード<sup>31)</sup>は、図の E および G 点に塑性ヒンジが形成される混合モードであるが、図の塑性域の広がり、それをよく表わしている。

解析例 5

最後に Fig. 12 に示す 4 層 1 スパンラーメンを解いた。断面および  $C_1$ ,  $C_2$  および  $\beta$  の値は図に示すとおりである。材料定数は  $E=29\,000$  ksi (201 GPa),  $\sigma_y=34.2$  ksi (236 MPa) である。この問題を、全要素数 104 に分割して解き、荷重  $P$  と節点 A の水平変位  $\Delta$  の関係を既往の結果<sup>7),11),12)</sup>と比較して Fig. 13 に示す。Kam<sup>11)</sup> の論文の塑性の扱いは、解析例 4 で述べた彼の方法と同じである。Kassimali<sup>7)</sup> および Haldar・Nee<sup>12)</sup> は有限変位を考慮した塑性ヒンジ法を採用している。全塑性降伏関数として、Kassimali は軸力と強軸回りの曲げを受ける H 断面に対する AISC の式<sup>16)</sup>, Haldar・Nee は矩形断面に対する式 (2) を用いている。本解析結果は、Haldar・Nee の結果と最も近いが、他の結果と大きな差はない。Kassimali および Haldar・Nee は塑性ヒンジ法であるので最高荷重以降の計算はできない。同図には、Kassimali によって求められた崩壊時の塑性ヒンジの位置が示されているが、本計算による最高荷重時の塑性域の位置とよく一致していることがわかる。

5. 結 言

本論文では、断面力の直接関数で表わされる断面力表示構成則を用い、鋼平面骨組構造物の弾塑性有限変位解析を試みた。構成則を定めるにあたって、Crisfield に

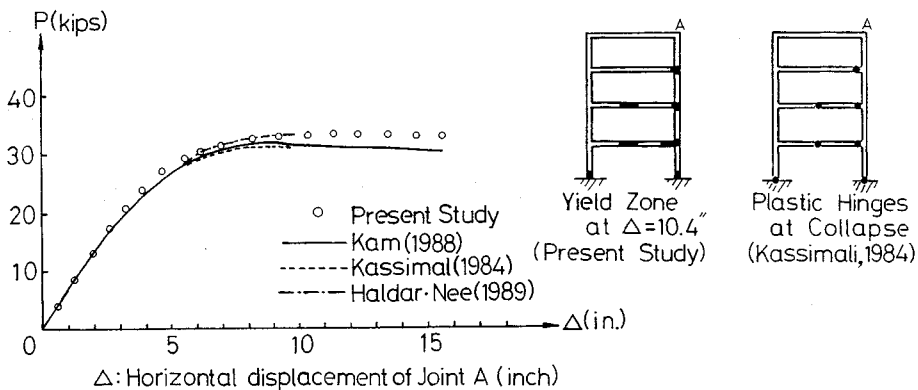


Fig. 13 4-Story, 1-Bay Rigid Frame of H-Sections (1 in. = 25.4 mm, 1 kip = 4.448 kN).



よる降伏関数の概念を導入し、新たに断面力の直接関数である降伏関数を定めた。誘導された構成則は、矩形、H形（強軸回り）、箱形およびパイプ断面に適用できる。断面形の相違は、全塑性降伏関数を定めるパラメーターすなわち降伏係数（式（4）の  $c_1$ ,  $c_2$ ）および断面の塑性化を測る尺度に現われるパラメーターすなわち弾塑性係数  $\beta$ （式（9））を変えることにより考慮できる。有限変位解析は、移動座標に基づく近似更新ラグランジェ手法<sup>15)</sup>を用い、極限荷重後の荷重降下域も計算できるよう、Crisfieldの修正弧長法<sup>22)</sup>を用いた。

この研究によって得られた結論をまとめると以下のようになる。

(1) 提案した構成則には、断面形の相違を考慮するために3個のパラメーター  $c_1$ ,  $c_2$  および  $\beta$  を含む。

(2) 降伏係数  $c_1$ ,  $c_2$  は全塑性状態を表わす降伏関数  $F_2$  を近似するとき現われる係数で、正解値を用いた非線形最小二乗法で定めることができる。

(3) ただし、 $c_1 < 1.0$  の場合には、部分的に  $F_2$  の凸性が失われるため、 $c_1 = 1.0$  と置いて  $c_2$  のみを非線形最小二乗法によって定めた。結果を Table 1 に示す。

(4) 弾塑性係数  $\beta$  は任意状態の降伏関数を定めるに必要な硬化則ともいうべき係数（式（9）参照）で、これは純曲げ状態に対して塑性エネルギーの正解値と式（9）から計算される近似値を等値することにより定めた。結果は Table 1 に示す。

(5) Pragerの適応条件および法線則<sup>19)</sup>を降伏関数  $F$  に適用して誘導した構成則は式（21）のようになる。

(6) 近似更新ラグランジェ手法とCrisfieldの修正弧長法のアルゴリズムに断面力表示構成則を取り入れ、極限荷重以降の解析も可能な骨組み構造物の解析プログラムを開発した。

(7) 中心軸圧縮柱について、断面をメッシュに分割して構成則を求める従来の方法と本方法の計算時間を比較したところ、本方法によって計算時間が従来の方法の1/5~1/10になることがわかった。

今後の研究課題としては、残留応力およびひずみ硬化の影響を取り入れること、繰返し外力を受ける場合の構成式を確立すること、および三次元構造物の解析を可能にするため、ねじりモーメントの影響を取り入れることなどである。

本論文の数値計算はすべて名古屋大学大型計算センターのFACOM M-382を使用した。

#### 参 考 文 献

- 1) Papadrakakis, M. : Inelastic Post-Buckling Analysis of Space Frames, in "Civil Engineering Practice (1/Structures)", P.N. Chereisinoff *et al.* ed., Technomic Publishing Co., U.S.A., 1987.
- 2) 日本建築学会：建築構造力学の最近の発展—応力解析の考え方, 1987年11月.
- 3) 藤本盛久・須藤福三・和田 章：任意形平面骨組の非線形応力解析, 日本建築学会論文報告集, No.189, Nov.1971.
- 4) Bathe, J.K. and Ozdemir, H. : Elastic-Plastic Large Deformation Static and Dynamic Analysis, Computers & Structures, Vol.6, pp.81~92, 1975.
- 5) Komatsu, S. and Sakimoto, T. : Nonlinear Analysis of Spatial Frames Consisting of Members with Closed Cross-Sections, Proc. of JSCE, No.252, Aug., 1976.
- 6) Argyris, J.H., Boni, B., Hindenlang, W. and Kleiber, M. : Finite Element Analysis of Two-and-Three-Dimensional Elastic-Plastic Frames—The Natural Approach, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol.35, pp.221~248, 1982.
- 7) Kassimali, A. : Large Deformation Analysis of Elastic-Plastic Frames, J. Struct. Engrg., ASCE, Vol.109, No.8, 1983.
- 8) Chen, W.F. and Sugimoto, H. : Analysis of Tubular Beam-Columns and Frames under Reversed Loading, Eng. Struct., Vol.9, Oct, 1987.
- 9) Chan, S.L. and Kitipornchal, S. : Elasto-Plastic Large Deflection Analysis of Tubular Beam-Columns, in "Steel Structures—Advances, Design and Construction", edited by Narayanan, R., Elsevier Applied Science, 1987.
- 10) Kitipornchal, S., Al-Bermani, F.G.A. and Chan, S.L. : Geometric and Material Nonlinear Analysis of Structures Comprising Rectangular Hollow Sections, Eng. Struct., Vol.10, Jan., 1988.
- 11) Kam, T.Y. : Large Deflection Analysis of Inelastic Plane Frames, J. of Struct. Eng., ASCE, Vol. 114, No.1, Jan., 1988.
- 12) Haldar, A. and Nee, K.M. : Elasto-Plastic Large Deformation Analysis of PR Steel Frames for LRFD, Computers & Structures, Vol.31, No.5, 1989.
- 13) Crisfield, M.A. : On an Approximate Yield Criterion for Thin Steel Shells, U.K. Transport and Road Research Lab., Department of the Environment, TRRL Lab. Report 658, 1974.
- 14) Batoz, J.L. and Lebouvier, F. : Nonlinear Analysis and Stability of Plane Arches and Rings, Stability of Metal Structures—Preliminary Report, IABSE, Paris, Nov., 1983.
- 15) Jetteur, Ph., Cescotto, S., Goyet, V.V. and Frey, F. : Improved Nonlinear Finite Elements for Oriented Bodies using an Extension of Marguerre's Theory, Computers & Structures, Vol.17, No.1, 1983.
- 16) ASCE : Plastic Design in Steel, A Guide and Commentary, ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice, No.41, 1971.
- 17) 山田嘉昭：塑性力学, 日刊工業新聞社, 1971.
- 18) 名古屋大学大型計算機センター：ライブラリー・プログラム利用の手引（数値計算編）, 1982.
- 19) 材料学会編：固体力学の基礎, 日刊工業新聞社, 1981.

- 20) 垣内辰雄：鋼骨組構造物の非弾性域における有効座屈長，名古屋大学工学部土木工学科卒業論文，1987.
- 21) Chen, W.F. and Atsuta, T. : Theory of Beam-Columns, Vol.1, McGraw-Hill, 1976.
- 22) Crisfield, M. A. : A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles "Snap-Through", Computers & Structures, Vol.13, pp.55~62, 1981.
- 23) Owen, D.R.A. and Hinton, E. : Finite Elements in Plasticity, Pinerige Press Limited, U.K., 1980.
- 24) 柴田輝昭：断面力表示構成則を用いた鋼骨組構造物の弾塑性有限変位解析，名古屋大学工学研究科土木工学専攻修士論文，1987.
- 25) Bellini, P. X. and Chulya, A. : An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations, Computers & Structures, Vol.26, No.1/2, 1987.
- 26) Zienkiewicz, O. C. and Morgan, K. (伊里正夫・伊里由美訳)：有限要素と近似，ワイリー・ジャパン，1984.
- 27) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method, 3 rd. ed., McGraw-Hill, 1977.
- 28) Haisler, W.E. and Stricklin, J.A. : Displacement Incrementation in Non-linear Structural Analysis by the Self-Correcting Method, Int. J. for Numerical Method in Eng., Vol.11, pp.3~10, 1977.
- 29) Sugimoto, H. and Chen, W.F. : Inelastic Post-Buckling Behaviour of Tubular Members, J. of Struct. Eng., ASCE, Vol.111, No.9, 1985.
- 30) Schilling, C.G., Schutz, F.W. and Beedle, L.S. : Behavior of Welded Single-Span Frames under Combined Loading, Welding J. Res. Suppl., 35, 1956.
- 31) Hodge, P.G. Jr. (倉西正嗣ら訳)：構造物の塑性解析，コロナ社，1961.

(1989.7.28・受付)