

半無限弾性体上の弾性円板の鉛直振動の一般解法

A COMPREHENSIVE SEMI-ANALYTICAL METHOD FOR VERTICAL OSCILLATION OF ELASTIC CIRCULAR DISK ON ELASTIC HALF SPACE

東原 紘道*

By Hiromichi HIGASHIHARA

Vertical oscillation of a circular disk on an elastic half space is solved. For this purpose, a comprehensive method has been developed on the basis of the direct integral equation which relates explicitly the displacement of the disk to the stress of contact. This integral equation and the differential equation of motion of the elastic disk are discretized separately. As a consequence, a method of wide applicability is obtained; the stiffness and the mass density of the disk as well as the external force can assume arbitrary distribution. The obtained linear algebraic equation, whose coefficient matrix has originally been virtually singular, is modified theoretically and is made numerically robust. As a demonstration, the new algorithm is applied to axisymmetrical and rocking oscillations of a uniform elastic disk and its result discussed.

Keywords: dynamic compliance, elastic half space, elastic plate, vibration of foundations

1. はじめに

本研究は、半無限弾性体とその表面上の円板との動的相互作用の解析的な取扱いを、弾性円板について行うものである。

弾性波動論に立脚した解析的な方法は、剛体円板についてはおおむね完成しているのに対し、弾性円板については不完全である。もちろんこのような研究は従来も精力的になされてきてはいる。しかし3.でみるように、既往の研究はその適用範囲が狭く特別な場合が計算されているだけであり、一般性をもった理論とはなっていない。これに対し本論文は、現実的な弾性円板のすべてに適用可能な、一般的な解析法を展開するものである。

本研究を含めて、一般に半無限弾性体の動的コンプライアンスの理論は、固体物性の動的な同定技術の数理的な基礎を与えるとともに、耐震工学の中心課題である構造物と地盤の動的な相互作用の研究の基礎ともなる。特にそれによって解析的に求められた解は、多くの場合設計計算に直接適用できるほか、実務上多用される数値計算モデルのキャリブレーションができるという、実用的にも独特の価値を有している。

このような解析的なモデルの独特の価値は、究極的には、半無限弾性体の波動問題に含まれるいくつかの無限大の存在したがってその適切な処理の必要性に源泉をもっている。まず弾性体の広がりを示す空間的な無限がある。また境界値問題を解くために周波数領域での計算が必要であるが、その結果を時間領域に変換するためには、その変換に対する高周波数領域の寄与を評価しなければならない。しかも周波数領域での計算の中心的課題も、波数空間上の無限区間の特異積分となっている。

解析的な方法の利点はこれらの問題を、明示的に抽出し、完全に処理できることである。その結果残された数値計算は、穏やかに変化する関数の有限区間上での積分および離散化によって得られる連立一次方程式のみに限られる。したがって精度の把握および向上は容易である。

2. 解析の基礎となる事項

本章では、既往の研究および本研究の基礎となる関係式および仮定を整理して掲げる。まず半無限弾性体は一樣かつ等方的であるとする。そしてその表面に軸対称な弾性円板が付着して、全体として振動数 ω の鉛直振動をしているものとする。弾性体の自由表面の鉛直変位を次のように表わす。

$$w(r) \exp(i\omega t) \cos(m\theta) \dots \dots \dots (1)$$

* 正会員 工博 東京大学助教授 地震研究所
(〒113 文京区弥生 1-1-1)

ここに m は非負の整数である。また (r, θ) は自由表面上の極座標であって、弾性体の外部からみたとき、 θ の正方向は時計回りとするとする。

(1) 弾性体の境界条件

弾性体の表面では次のような条件が成立している。ただし R は円板の半径である。

- ① 自由表面の無応力条件： $r > R$ の表面におけるすべての応力は 0 である。
- ② 円板との接触面での変位の適合条件：剥離は生じないものとする。すなわち両者の鉛直変位は等しい。水平変位については、下記の応力の緩和条件に対応して、適合条件を課さない。
- ③ 円板との接触面での応力の緩和条件：せん断応力は 0 であると近似する。垂直応力は当然に連続である。

(2) 半無限弾性体中の波動の基本形式

上述の境界条件のもとで波動方程式を解くと、自由表面での変位および応力は、ある 1 つの共通の未知関数の、波数領域上での積分変換として与えられる。

(3) 円板の運動方程式

接触面での垂直応力を $\sigma(r) \exp(i\omega t) \cos(m\theta)$ 、与えられる荷重を $q(r) \exp(i\omega t) \cos(m\theta)$ 、と書くと、円板の運動方程式は次のようになる。

$$\nabla^2 [D \nabla^2] w(r) = \rho_s h \omega^2 w(r) + \sigma(r) + q(r) \dots \dots (2)$$

ここに、 D 、 ρ_s 、 h はそれぞれ円板の曲げ剛性、質量密度、厚さである。ここでは剛体円板を含めることとし D は無限大でもよいとする。また ∇^2 は次のような演算子である。

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}$$

(4) 無次元パラメーター

無次元振動数を ξ と書く。また半無限弾性体と円板の代表的な剛性の比率を α と書く。すなわち、

$$\xi = R\omega / \sqrt{\mu/\rho}, \quad \alpha = \mu R^3 / D \dots \dots (3)$$

ここに ρ 、 μ は半無限弾性体の質量および剛性率である。

3. 既往の研究の概要

表題に掲げた問題は、前章で述べた半無限弾性体の波動公式と円板の運動方程式を連立させて解くことに帰着する。これに対する既往の研究の代表的なものは、剛体円板に対するデュアル積分方程式法として知られている手法を拡張適用するものである。この方法は半無限弾性体の波動公式を成す 2 つの積分変換を唯一の第二種フレドホルム型積分方程式に転換するものである¹⁾。

しかしこの処理が可能であるためには次のような厳しい条件が必要である²⁾。

- ① 円板の一部は必ず剛体でなければならない(こ

のことは必然的に式(1)の次数 m は 0 か 1 でなければならないことを意味する)。

- ② 外力は弾性部分に作用してはならず剛体部分にのみ作用しなければならない。

この解法の代表例には、Lin によるものと、Iguchi と Luco によるものがある^{3),4)}。Lin の問題では円板の最外周部が輪状に剛体である。後者では中心を含む同心円が剛体である。後者の計算は円板の質量が 0 である場合しか計算されていない。これに対して Lin の問題では質量が存在する場合も解かれている。

剛体円板の場合には、質量が 0 である場合の解から得られる動的コンプライアンス関数をあらためて円板の運動方程式に代入することにより、質量を有する円板の振動を完全に解くことができるので、質量が 0 である場合の解は意味をもっている。しかし弾性円板ではそのようなことはないで、質量が 0 である場合の解にはたしてどれだけの価値があるのかということについては疑問がある。ただし、本研究の方法であらためて計算してみると、現実的な数値の範囲内では、質量の存在が円板の応答に及ぼす影響はおおむね無視できる程度であるので、Iguchi らの解析は意義をもっている。

半無限弾性体の接触問題に一般的に適用可能なもう 1 つのアプローチとして、変位および接触応力をルジャンドル関数で級数展開する方法がある⁵⁾。デュアル法の場合と同じように、この級数展開は弾性円板の剛性方程式にも有効で、この級数に演算子 ∇^2 を作用させた結果は再びルジャンドル関数の重ね合わせとして表現することができる。この性質を利用すると、まず接触応力の展開係数を未知数とする連立一次方程式が得られるのでこれを解く。次にこの解を用いて変位を計算する⁶⁾。

この論文では動的コンプライアンスの計算結果として虚数部分しか示されていないので、詳細な検証はできないが、おおむね妥当な結果が得られており、このアプローチには独自の価値を認めることができる。しかしこの方法では $m=0$ の場合しか計算できていない。

4. 本研究のアプローチ—直接積分方程式法の適用

前章において、既往の解法が成立するためにはいくつかの制限があることをみた。この壁を乗り越えるためには、解析の手順を組み替えて、まずもっぱら半無限弾性体の解析によって、すなわち円板の運動条件とは独立にその剛性関係をとらえ、そのうえでこれを円板の運動方程式と連立させる必要がある。

このうち前半部分は、直接積分方程式の名のもとに、すでに実行されている^{7),8)}。その結果のみを要約すると次のようになる。

(1) 半無限弾性体の剛性関係

上述の直接積分方程式の結果によると、 w と σ は次のような積分変換によって直接に関係づけられている。ここで m は任意の非負の整数である。

$$w(r) = \frac{1}{\mu} \int_0^r s W_m(r; s) \sigma(s) ds \dots\dots\dots (4)$$

$$W_m(r; s) = b^2 \left[I_m - \frac{1}{\pi r (b^2 - a^2)} K_m(s/r) \right] \dots\dots\dots (5)$$

$$I_m = \int_a^b \frac{k \sqrt{k^2 - a^2}}{[F_1(k)]^2 + [F_2(k)]^2} F_2(k) H_m(kr, ks) dk + \int_0^a \frac{k \sqrt{a^2 - k^2}}{F_1(k) + F_3(k)} H_m(kr, ks) dk - \pi \frac{\chi \sqrt{\chi^2 - a^2}}{F'(\chi)} H_m(\chi r, \chi s) \dots\dots\dots (6)$$

ここに K_m は一般化された楕円積分、 H_m は複素数値の特殊関数であって、積分区間上でいたるところ正則でありしかも穏やかなふるまいをする。その実数部分は、有限区間上での三角関数の積分として定義される。その虚数部分はベッセル関数の積となっている。関数 F, F_1, F_2, F_3 は既知の初等関数であり、 χ は F の零点である。

このように積分核 $W_m(r; s)$ は、一般化された楕円関数とある複素数値の特殊関数の和として与えられている。前者は実数値をとり $r = s$ において対数型特異点をもっているのに対し、後者はいたるところ正則である。いずれにせよその数学的な性質は明瞭であるうえ、その数値ももつばら有限区間上の数値積分によって与えられているので、高精度の計算ができる。

しかも剛体円板の解析結果をみると、式 (4) の $w(r)$ を指定してこれを $\sigma(s)$ について解く場合、 $\sigma(s)$ の内挿関数として一次関数をとるならば (すなわち連続な内挿関数を用いる限り)、 $w(r)$ については単純な選点法だけで精度の高い離散化が可能である。

以上のように直接積分方程式法によれば、式 (2)、(4) の 2 つの基本方程式が得られるので、これを連立させて解けばよい。前者は $\sigma(r)$ について、後者は $w(r)$ について陽形式になっているので、その一方を他方に単純に代入することにより単一の方程式が得られるが、特に σ を消去する方法は第二種フレドホルム型積分方程式に帰着する。

しかしそのようなアプローチをとったのでは、既往の解法と同様に一般的な円板しか扱うことができないことになる。しかもそのようにしても解析解が得られるわけではなく、最後は積分方程式を離散化しなければならない。そうであるなら基本方程式の段階から離散化する方が、解法に一般性をもたせられるので有利である。そこで本研究はこの考えに従うことにする。

(2) 離散化の手続き

適当な内挿関数を定め、これを $\{\phi_j\}$ とする。円板の変位を次のように表わす。

$$w(r) = \sum_j x_j \phi_j(r) \dots\dots\dots (7)$$

これを円板の運動方程式 (2) に代入する。ただしここでは、曲げ剛性 D 、質量密度 ρ_0 および板厚 h は変化しても差し支えない。同様にして、外力および反力の内挿関数を $\{\chi_j\}$ とすれば、次のような、運動方程式の離散的表示が得られる。

$$([K]_m - \omega^2 [M]_m) \{x\} = [X] \{q\} + [X] \{\sigma\} \dots\dots\dots (8)$$

$$[\Phi] \{x\} = [W]_m \{\sigma\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに $[K]_m$ と $[M]_m$ はそれぞれ剛性マトリックスと質量マトリックスである。また簡単のため $[W]_m$ をコンプライアンス行列とよぶ。

$$\Phi_{ij} = c \int_0^R r \phi_i(r) \phi_j(r) dr \dots\dots\dots (10)$$

$$X_{ij} = c \int_0^R r \phi_i(r) \chi_j(r) dr \dots\dots\dots (11)$$

$$W_{ij} = c \int_0^R \int_0^R r s \phi_i(r) W_m(r; s) \chi_j(s) dr ds \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{ただし } c = 2\pi \dots\dots m = 0 \\ = \pi \dots\dots m = 1, 2, 3, \dots$$

また選点法によるときは $[\Phi]$ は単位行列となり、さらに

$$W_{ij} = c \int_0^R s W_m(r_i; s) \chi_j(s) ds \dots\dots\dots (13)$$

以下ではこの選点法方式を用いる。

ここで式 (9) の条件の成立を、 $\{x\}$ のうち変位そのものに対応する番号に制限すると、右辺のコンプライアンス行列は正方形となる。しかもこの行列が正則であることは剛体円板に対する計算の際に確認されている。そこで直ちに $\{\sigma\}$ を消去することができて、その結果次のような連立一次方程式が得られる。これが解くべき基本方程式である。

$$([K]_m - \omega^2 [M]_m - [X] [W]_m^{-1} [\Phi]) \{x\} = [X] \{q\} \dots\dots\dots (14)$$

これまでにみたように、この式は m が 2 以上の場合に対しても適用できる。しかし以下の数値計算例ではさしあたり実用性の高い軸対称モード ($m=0$) およびロッキングモード ($m=1$) を議論の対象とする。

5. 離散化の実行

(1) 内挿関数

解析の対象となる板の変形様式が曲げであることを考慮して、 $\{\phi_j\}$ としては 3 次の多項式を用い、円板全体にわたって変位およびその一階導関数が連続であるようにする。これに対して $\{\chi_j\}$ としては、前述のとおり接触応力が連続であるような 1 次式を用いる。

円板の半径方向の節点数を n とすると、自明な要素を排除した後では、 $\{x\}$ の自由度は $(2n-1)$ であり、 $\{\sigma\}$

の自由度は、 $m=0$ のときは n 、 $m=1$ のときは $(n-1)$ である。

(2) 係数行列の正則性

式 (14) の左辺の係数行列は、計算が厳密になされれば正則である。すなわちその中の剛性行列のみは特異であるが、その他の行列が正則であり全体としても正則となっている。

しかし現実的な物性値に対する剛性行列の主要な要素の大きさは、質量行列もしくはコンプライアンス行列から成る項のそれに比較しておおむね4桁ないし5桁程度大きい。このため剛性行列は他の項の有効数字をそれだけ損なう結果となり、数値的には係数行列は特異に近くなる。このため剛体円板の場合に準じた精度で行列の要素を計算すると、多くの場合に係数行列のはきだし計算は破綻してしまう。

しかもこの傾向は、実用上重要な低振動数領域において顕著となるほか、分解能を高めるために離散化のための分割を細かくすればするほど強くなる。円板の剛性が低い場合には妥当な結果が得られるが、その場合でもやはり何桁も精度が落ちてしまうという事は実用上容認できない問題である。

この問題は次のようにすれば解決することができる。幸い剛性行列の核は次元1であってしかもそれは剛体変位モードベクトルによって生成されることが知られている。そこで未知量である変位ベクトル $\{x\}$ を剛体変位モード w_0 と純粋に弾性的な変位モードに分離して表現することにより、剛性行列の特異部分を陽的に取り出すことができ、1つの行と1つの列を0ベクトルにしてしまうことができる。この行と列においてはもはや他の項がもっている正則な成分が殺されることはないので係数行列全体も安定して正則となり、上述した数値計算の精度の劣化は生じない。

しかもこの処理を行うと、円板の一部が剛体であるような場合にも、その剛体部分に対応する無限大の剛性は剛性行列から排除されるので、計算不可能となることはない。したがって部分的に剛体であるような円板をも任意に計算できるという利点がある。

この手続きを具体的に述べると次のようになる。いま簡単のため離散化の際に導入された一般化座標は節点変位であるとする。これらのうちで弾性変形を表示する成分を $w(\rho_j)$ ($j=1\sim f$) とする。ここに f は弾性変形の自由度であり、 $(\rho_1, \dots, \rho_{f-1})$ は $(1, 2, \dots, n)$ の中の適当な順列である。

剛体変位の寄与分 δ を新たに導入することにより、変位 w は次式で表わされる。

$$w = \delta w_0 + \sum_{j=1}^{f-1} w(\rho_j) \dots\dots\dots (7)'$$

ここで $(w(\rho_1), \dots, w(\rho_{f-1}), \delta)$ を新たな基底とすれば、仮想仕事の原理によって、解くべき式は次のようになる。

$$[K]\{x\} = [H]\{\sigma + q\} \dots\dots\dots (14)'$$

ここに $[K]$ は対称であって、 $i, j \leq f-1$ のとき、 K_{ij} は $[K] - \omega^2[M]$ の (ρ_i, ρ_j) 成分に等しく、第 f 列は以下のようなになる。

$$\hat{K}_{fj} = w_0^T ([K] - \omega^2[M]) \text{ の } \rho_j \text{ 列}$$

$$\hat{K}_{ff} = -\omega^2 \{w_0\}^T [M] \{w_0\}$$

また $[H] = (H_1, \dots, H_{n-1}, (Hw_0)^T)^T$ 、ただし H_j は行列 $[H]$ の第 ρ_j 成分である。

6. 計算の結果——様な弾性円板の動的応答特性

式 (14) の計算に先だって、その係数に含まれる行列を定義するプログラムの検証をする必要がある。このうちコンプライアンス行列は剛体円板の場合と同じであるので問題がない。剛性行列および質量行列は、解析解の知られている自由振動問題の固有値を種々のパラメーターについて照合して検証し、いずれも解析解が与えられている精度で完全に一致したことをもって合格とした。

式 (14) もしくは式 (14)' が適用可能な問題の範囲は剛体円板の場合より大幅に拡大し、考慮できるパラメーターの個数も著しく増加する。

剛体円板の場合には、半無限弾性体の質量と2つの弾性定数および円板の半径ならびに加振振動数が可変パラメーターであるが、これらは結局ポアソン比および無次元振動数という2つの無次元量に統合される(円板の質量は、コンプライアンスの計算に際しては、考慮しなくても済むことができる)。

ところが弾性円板においては、以上のほかに円板の剛性および質量の分布が事実上任意に変化することができる、しかも外力も任意の分布をすることができる。式(14)はこれらの変化のすべてに対応できる能力を有しているのであるが、それを逐一記述したのでは結果が膨大になってしまう。

そこで本論文においては、最も単純な問題に対象を限る。すなわち弾性円板の質量および剛性は一様とし、端部は自由であるとする。また半無限弾性体と円板の質量密度およびポアソン比は等しいとする。さらに外力も最も単純な分布を考え、軸対称モードにおいては一様分布、ロッキングモードにおいては円板の中心からの距離に比例するような直線分布とする。

上述のように現象に関与する多くのパラメーターの相互関係を把握して、計算条件を適切に設定するためには、円板の固有振動数が有用である。様な弾性板の固有振動数は解析的に求められているが、これらの固有振動に

対応する無次元振動数は次のように与えられる。

$$\xi^2 = \frac{\gamma_{m,n} \cdot \rho \cdot R}{\alpha \cdot \rho_1 \cdot h} \dots \dots \dots (15)$$

ここに m は周方向成分のモード次数であり、 n は半径方向のモード次数である。 $\gamma_{m,n}$ の数値は、代表的な境界条件に対して求められている⁹⁾。

以下に示す例では、共通のポアソン比 ν として $1/3$ を選び、板厚比 h/R を 0.05 とする。ただしこれは既往の研究の計算条件を念頭においた1つの例にすぎず、特別な意味はない。こうすると残された可変なパラメータは式(3)で導入された2つの無次元数 α と ξ だけである。

(1) 軸対称振動 ($m=0$ の場合)

平均変位を w^* 、外力の合力を P とするとき、本モードの動的コンプライアンス関数を次式で定義する。

$$\frac{4 \mu w^* R}{(1-\nu)P} \dots \dots \dots (16)$$

式(16)は静的な場合 ($\xi \rightarrow 0$) には実数になり、さらに特に円板が剛体であるときはちょうど1になるように規格化されている。

得られた動的コンプライアンス関数を図-1に示す。横軸は無次元振動数 ξ である。また図中の数字は無次元剛性比 α である。太線は実数部分もしくは虚数部分を表わし、細線は絶対値を表わす。低振動数では実数部分にのっていた絶対値は振動数の増加とともに虚数部分に移っている。応答変位の位相の外力からの進みはエネルギーの逸散を示し、しかもそれは位相差の \sin に比例するから、振動数の増加に伴いエネルギーの放射効率も著しく高まることになる。

α が小さく円板が相対的に固い場合には当然剛体板に近い挙動を示す。 $\alpha=1$ の場合がそれで、剛体円板の結果とほとんど異なるない⁷⁾。 α が大きく円板が相対的に柔らかい場合には、低振動数領域では若干コンプライアンスが増加する。換言すれば抵抗力が減少する。この減少は $\alpha=100$ と $\alpha=10000$ ではほとんど差がなくて、いずれも $\xi=1 \sim 2$ で生じ最大で25%程度になる。

$\alpha=10000$ という条件の下では、円板の剛性が低下する結果、弾性変形の固有振動数が表示された無次元振動数の範囲に入ってくる。横軸に付した三角印がそれで弾性変形の第1次モードの固有振動数を示す。第2次モードの固有振動数は約5.45であり図には現れない。しかし図-1は、動的コンプライアンスがこれら固有振動モードの存在の影響を受けていないことを示している。この量は平均的な変位応答を表示するものであるから、外力と円板の振動が同調しても、平均応答はほとんど影響を受けないといえる。

次に円板の変位を図-2に示す。ここで縦軸は規格化

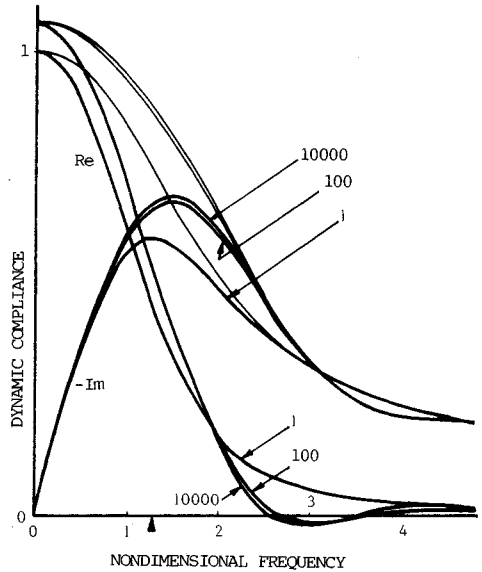


図-1 軸対称モードの動的コンプライアンス

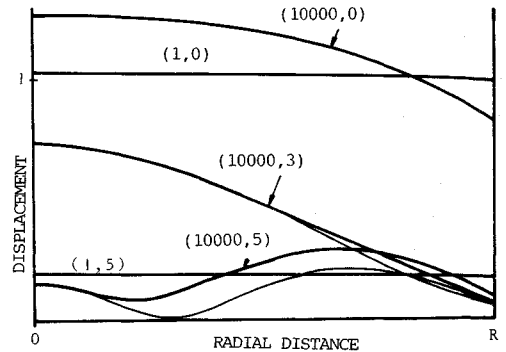


図-2 軸対称モードの変位

された無次元量 $4 \mu w R / \{(1-\nu)P\}$ 、横軸は半径方向の距離である。かっこ内の第1のパラメータは α 、第2のパラメータは ξ である。

これによると円板は $\alpha=1$ ではほとんど剛体のようにふるまい、ただ振動数の増加とともに変位が減少するだけである。これに対し $\alpha=10000$ では、静的状態からすでに第1次の弾性変形モードが剛体変位モードに重なっている。そして振動数の増加に伴い、各点での振動の位相に差が生じ始める。そこでその包絡線すなわち振幅を太線で表わしてある。ただしこれは現実には生じる変位を表わしていないので、参考のためにある代表的な時刻での変位を細線で表わす。

無次元振動数の3は構造物に換算すると相当に高い振動数になるが、位相のずれは外周部に少く発生する。しかし無次元振動数が弾性変形の第2次固有振動数に近

い5になると、第2次モードの寄与が大きくなり、同時に位相のずれが顕著になる。しかもそれにもかかわらず、変位の平均は $\alpha=1$ の場合とほとんど違いがなく、これが図-1 でみた動的コンプライアンスが円板の固有振動数によってほとんど影響を受けない事実に対応している。

最後に図-3は接触応力の分布を示す。横軸は図-2と同じであり、縦軸は無次元化された応力 $\pi\sigma R^2/P$ の絶対値である。図中のパラメーターは α を表わす。太線は静止時を、細線は無次元振動数が5の場合を表わす。

ここでも $\alpha=1$ のケースは剛体円板に近いふるまいをしている。すなわち振動数の増加とともに、外周部の応力の高まる領域は、縁端近傍に集中する。また内部での応力が顕著に増加する。これに対して α が大きい場合には、内部での応力は平坦であるとともに、縁端の応力集中部は狭い。しかもこの分布形態はすでに静止時から生じており、振動数が増加してもほとんど変化することがない。

図には示していないが、接触応力も場所による位相のずれをもっている。 α が小さい場合にはこのずれが大きい。しかし α が大きくなると接触面全体で位相が一樣に近く、外力の位相にほぼ等しい。これらの結果は、剛性の高い円板が複雑な仕方で強力を力を再配分するのに対し、柔らかい円板は再配分の能力に乏しく、境界条件が厳しい外周部を除いては、外力をそのまま基盤に伝達する傾向が強いことを示している。

(2) ロッキング振動 ($m=1$ の場合)

ロッキング角の平均 ϕ^* を次式で定義する。

$$\frac{4}{R^4} \int_0^R r^2 w(r) dr \dots\dots\dots (17)$$

外力の合モーメントを M とするとき、本モードの動的コンプライアンス関数を次式で定義する。

$$\frac{8 \mu \phi^* R^3}{3(1-\nu)M} \dots\dots\dots (18)$$

これを図-4に示す。表示の仕方は図-1と同じである。なお $\alpha=1000$ に対する弾性変形の第1次モードの無次元固有振動数は9.18であるので図には現れない。

剛体円板の場合を含めて、ロッキングモードにおいては、静的コンプライアンスに対する動的コンプライアンスの相対的な大きさは、軸対称モードと比較して相当に大きい。しかし円板の剛性の影響の現われ方は全体として類似していて、低振動数領域では円板の剛性の低下とともに、コンプライアンスは徐々に増加する。しかし高振動数領域においては、一定の傾向は認められない。

次に変位を図-5に示す。表示の仕方と図中のパラメーターの意味は図-2と同じであるが、縦軸は規格化された無次元量 $8 \mu R^2 w / \{3(1-\nu)M\}$ である。

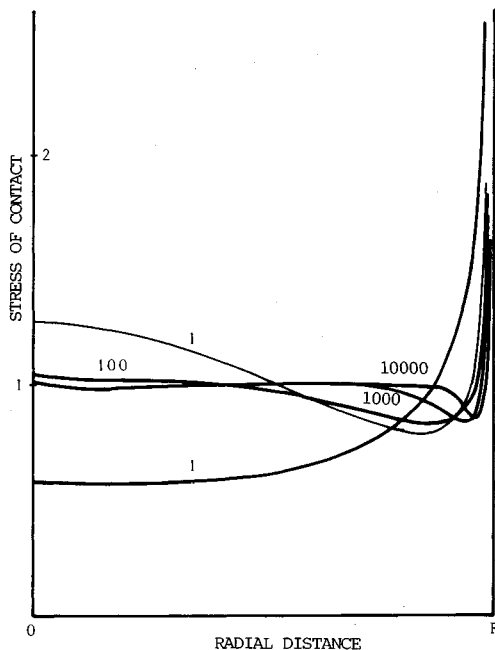


図-3 軸対称モードの接触応力分布

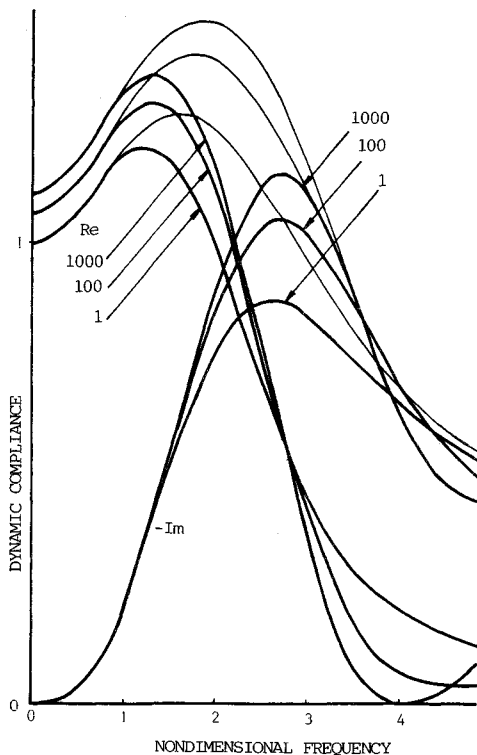


図-4 ロッキング振動の動的コンプライアンス

$\alpha=1$ の場合にはほとんど剛体の変位様式に従い、ただ振動数の増加に伴い振幅が減少する。 α が大きくなる

と、静的状態から弾性変形の第1次モードの寄与が顕著になる。そうして一般に α と ξ が大きくなるにつれて、変位の最大点は縁端部から中心に向かって移動するとともに位置による位相の差が大きくなる。たとえば $\alpha=1000$ 、 $\xi=5$ の場合では、中央付近と縁端部では逆位相に近くなっている。換言すれば中間に節点が見られる。

次に無次元化された応力 $\pi R^3 \sigma / M$ の絶対値を図-6に示す。太線は静的状態を表わし、細線は $\xi=5$ に対応する。 $\alpha=1$ の場合にはほぼ剛体板と同様の結果が得られる⁸⁾。そして振動数の高まりとともに、内部の応力が目だって増加し、あわせて外周部の応力集中域は縁端に集中する。板が柔らかくなくてもこの傾向は変わらない。しかし、変位の場合と同様に、高次モードの寄与が増加するとともに応力の分布形にもその影響が現われる。たとえば $\alpha=1000$ 、 $\xi=5$ においては、中心近傍の応力の絶対値は小さくなり、しかもその符号は外周部のそれと逆になっている。

一般に直接積分法を数値計算するための区間分割は、応力が集中し急激に変化する外周部ではある程度密にとらなければならないが、中心部では相当に粗くすることが許される⁷⁾。しかしこれはあくまで中心部での変位および応力の変化が穏やかであることを前提とする。ロッキング振動において α および ξ が大きい場合には、中心部における変位が顕著になるので、外周部と同程度の分割密度が必要になる。

中心部が上掲の文献と同程度の粗い分割をもつ場合の結果と十分密な分割の場合の結果とを比較すると、変位の誤差は分割の粗い中心近傍において生じ、前者の方が振幅において13%程度大きい。計算精度の限界のゆえに分割を小さくしても結果にはゆらぎが残るが、それは3%程度である。したがってこの誤差は有意に大きく、したがってこのような条件のもとではより詳細な分割が必要である。

この誤差に対応して中心近傍の応力は著しく大きなものになる。ただしこの応力の誤差が全体の運動に及ぼす影響は小さい。実際、その他の領域における変位および応力はほとんど影響を受けない。また実用上重要なコンプライアンス関数もほとんど変化しない。

ロッキング振動における解の中心近傍における応力の精度については、考慮すべき問題がもう1つ残っている。それは現実のロッキング振動は必然的に水平並進運動を伴うことである。それにもかかわらずロッキング振動のみを単独に取り扱うことは、本来随伴するはずの水平並進運動を拘束し禁止した効果をもっているが、これは接触面に適当なせん断力を想定したことにはほかならない。剛体円板の場合の結果によるとこのせん断力は高振動数では中心付近で増加することが知られている¹⁰⁾。このた

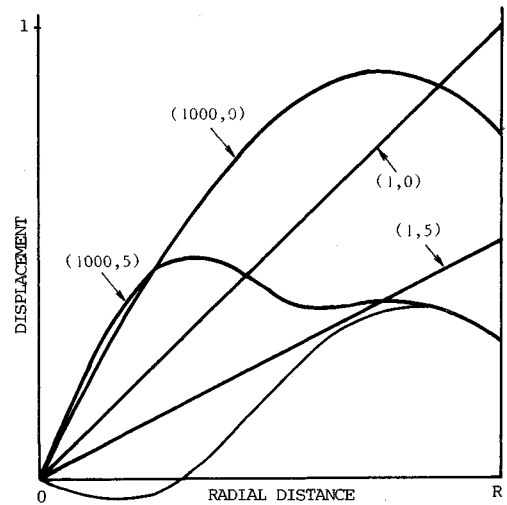


図-5 ロッキング振動の変位

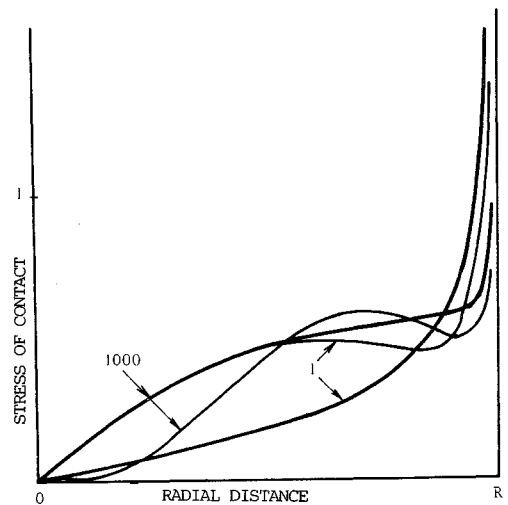


図-6 ロッキング振動の接触応力分布

め中心近傍の応力分布は緩和された接触条件に最も影響されやすい量であると考えられる。軸対称振動の場合には、このような事情はなく、柔らかな板の高振動数における応力も安定して計算される。

7. 結 論

半無限弾性体上の弾性円板の、軸対称およびロッキングの2つの鉛直振動を解析する、高精度で適用性の広い手法を構成した。これの基礎となる方程式は、円板の鉛直変位と接触面での垂直応力を直接に結びつける積分方程式と、弾性円板の運動方程式を連立させることによって得られる。この方法では弾性円板の運動方程式と半無限弾性体の波動方程式を別個独立に離散化できる。その結果既往の研究のように適用対象が制限されることな

く、実用上あらゆる弾性円板を解析できる。

この解法の適用例として、一様な弾性円板の振動を軸対称モードおよびロッキングモードについて解析した。すなわち動的コンプライアンス関数、板の変位および接触応力を求め、満足すべき結果を得ることができた。

参 考 文 献

- 1) Robertson, I. A. : Forced Vertical Vibration of a Rigid Circular Disk on a Semi-Infinite Elastic Solid, Proc. Camb. Phil. Soc. Ser. A, Vol. 62, pp. 547~553, 1966.
- 2) 東原絃道：半無限弾性体と弾性円板の動的相互作用の定式方法の考察，第20回地震工学研究発表会（91），pp. 357~360, 1989.
- 3) Lin, Y. J. : Dynamic response of circular plates resting on viscoelastic half space, J. Appl. Mech., Vol. 45, pp. 379~384, 1978.
- 4) Iguchi, M. and Luco, J. E. : Vibration of flexible plate on viscoelastic medium, J. Eng. Mech., Vol. 108, No. EM6, pp. 1103~1120, 1982.
- 5) Popov, G. I. : Some Properties of Classical Polynomials and their Application to Contact Problems, J. Appl. Math. Mech., Vol. 27, pp. 1255~1271, 1963.
- 6) Krenk, S. and Schmidt, H. : Vibration of an Elastic Circular Plate on an Elastic Half Space—A Direct Approach, J. Appl. Mech., Vol. 48, pp. 161~168, 1981.
- 7) 東原絃道：半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンス問題—その1. 軸対称鉛直振動，日本建築学会構造系論文報告集，第349号，pp. 50~58, 1985.
- 8) 東原絃道：半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンス問題—その2. 鉛直高次モード，日本建築学会構造系論文報告集，第371号，pp. 39~43, 1987.
- 9) 妹沢克惟：振動学（岩波書店），第2章，40, pp. 120~122, 1932.
- 10) 東原絃道：半無限弾性体上の円板の水平・ロッキング連成振動，土木学会論文集，第386号/I-8, pp. 293~300, 1987.

(1989. 7. 11・受付)