

DKA 法による超越方程式の解法とその適用例

A TRANSCENDENTAL EQUATION SOLVER IMPROVING THE DKA-SCHEME
AND ITS APPLICATION TO STRUCTURAL ANALYSES

白木恒雄*・寺野隆雄**・中村秀治***・栗原千鶴子****

By Tsuneo USUKI, Takao TERANO, Hideharu NAKAMURA
and Chizuko KURIHARA

Characteristic equations, such as stability equation and frequency equation in structural mechanics, are often reduced to transcendental equations, and the practically usable solver of the equations is anticipated.

Although the DKA (Durand-Kerner-Aberth)-scheme is already established as a solution method of high order algebraic equations and appraised high in the field of numerical analyses, the scheme has been considered not to be applicable to transcendental equations. However, further improving a solver which one of the authors discussed and expanded the DKA-scheme earlier, the authors succeeded to obtain good solutions of transcendental equations in specified domain with sufficient accuracy.

In this paper, the authors wish to describe the algorithm and the numerical examples of the proposed transcendental equation solver.

Keywords: transcendental equation, algebraic equation, DKA-scheme, numerical analysis

1. ま え が き

構造力学の分野において、座屈、振動、波動伝播などの問題を扱う際に帰着する固有方程式は高次代数方程式および超越方程式などとなる。これらの非線形方程式は他の学問分野、たとえば数学、天体物理学、電磁気学、生物学などにも頻繁に現われるから、高精度の解を能率良く求めることはきわめて有意義である。

棒の振動および座屈問題の固有方程式は、通常の境界条件において、実根のみもつので、図解法などからある程度の精度で解を得られる。たとえば、圧縮力を受ける一端固定、他端ヒンジ支承の棒の場合、固有方程式は、周知のごとく、 $\tan z = z$ となるので、グラフを用いて2曲線の交点より簡単に零点の座標値を求められる。しかしながら、力学問題の固有方程式は一般に複素根をもつ

ので、このような方法で簡単に解を求めることはできない。

高次代数方程式の解法として Durand-Kerner-Aberth 法 (以下、頭文字をとって DKA 法と略す) は近年、高い評価を受けてきた。この方法はフランスの Durand¹⁾ とドイツの Kerner²⁾ が独立に提案したある反復公式に基づいており、さらに 1970 年に初期値をイギリスの Aberth³⁾ の提案した選び方によるためこの名がある。

この方法は Newton 法の一変形とみなせるが、複素根を含むすべての根を同時に反復計算して求める全根同時反復型解法のため、減次の操作を必要とせず、方程式の係数の精度が保たれる。そして、各根の収束の速さがほぼ一定であり、得られた解の精度を正しく評価できる、などの特長をもつ。短所として挙げられるのは、近接根が求めにくいこと、方程式の次数の上昇につれ、丸め誤差の影響が大きくなること、計算時間が従来の方法に比べてやや長いこと、などであろう。

文献 4) において、代数方程式の解を求めるための DKA 法は「超越方程式に適用できない」と記述されている。今回、著者らは解を有限な領域に限定し、種々の工夫を加えたことから良好な解を得たのでここに報告する。

* 正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科(〒278 野田市山崎 2641)

** 正会員 工修 (財)電力中央研究所経済研究所情報システム部主査研究員(〒100 千代田区大手町 1-6-1)

*** 正会員 工博 (財)電力中央研究所我孫子研究所耐震構造部構造研究室長(〒270-11 我孫子市我孫子 1646)

**** 正会員 (財)電力中央研究所我孫子研究所耐震構造部構造研究室主任研究員(同上)

DKA 法により代数方程式の解を求める方法はすでに確立しており、多くの文献中に散見できる。共著者の一人、寺野およびそのグループは“Aberth の初期値”を修正した値を出発値とし、打ち切り誤差、丸め誤差の両方を厳密に考慮することにより大域的収束性をもつ複素係数代数方程式の解法⁶⁾を与えた。ここで述べる方法は、この文献 5) の理論的立場に立ち、さらに数値実験に基づくいくつかの計算技術の工夫により、超越方程式の解法に結びつけたものである。

2. 超越方程式

超越方程式を、代数方程式のごとく一般的な形で表現するのは容易ではない。そこで、多くの文献中に現われる超越方程式を参考にして次のごとく表わせる式を研究対象とした。

$$T(z)=0 \dots\dots\dots (1)$$

ただし、左辺の超越関数 $T(z)$ は次式とする。

$$T(z)=\sum_{i=1}^m C_i z^{I_i} \prod_{j=1}^n \{(\sin a_{jz})^{I_{S_j}} (\cos a_{jz})^{I_{C_j}} (\sinh a_{jz})^{I_{S_j}} (\cosh a_{jz})^{I_{C_j}}\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 C_i は既知複素定数、 a_j は既知実定数、 z は複素変数、 $I_i, I_{S_j}, I_{C_j}, IS_j, IC_j$ は既知整数である。この形に表わせない超越方程式も種々存在するが、構造力学およびその周辺の分野ではこれで十分であろう。

3. 根 の 数

超越方程式は複素平面上に無数の零点をもつので、求めたい解の範囲を設定する必要がある。そこで、求めたい根の領域を含む円を想定し、その中心の座標を β 、半径を r_0 とする。この円の内部の根の総数は“偏角の原理”を用いて求められる^{6),7)}。すなわち、

単連結領域 D で正則な解析関数 $T(z)$ が、 D のなかの滑らかな単純閉曲線 C の内部にもつ零点(根)の重複をこめた個数 n は、 C の上に $T(z)$ の零点がないとすると、次式により計算される。

$$n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{T'(z)}{T(z)} dz \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 i は虚数の単位である。

もしも、 C 内に極があれば、 n は零点の個数から極の個数を引いたものとなるが、式(1)の解の範囲内には極は存在しないから、上式はそのまま適用できる。

この式(3)を数値積分するため、極座標表示を用いる。上記の単純閉曲線 C を β を中心とする半径 r_0 の円とすると、曲線 C 上の点の座標 z は、偏角を θ として

$$z = \beta + r_0 e^{i\theta}$$

となる。これを上式に代入して

$$n = \sum \frac{r_0}{2\pi} e^{i\theta} \frac{T'(\beta + r_0 e^{i\theta})}{T(\beta + r_0 e^{i\theta})} \Delta\theta$$

となる。ただし、 $\Delta\theta$ は刻み角の大きさである。

4. 初期値の選び方

Aberth は代数方程式のすべての根の重心点を複素平面の中心とするすべての根を含むような半径 r_0 の円を設定し、初期値をその円周上に等間隔に根の数だけ配置することを提案した。しかし、ここでは実軸と虚軸に対する根の対称性を崩すため、 $3/2n$ の偏角を加えて次のようにとる⁵⁾。

$$z_k^{(0)} = \beta + r_0 \exp \left[i \left(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \frac{3}{2n} \right) \right] \dots\dots\dots (4)$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

ただし、 n は式(3)を使って求めた円内の根の総数である。また、 z の肩の数字は反復回数を意味する。

このように初期値を一般的な位置関係にしないと、場合により、後述の反復計算途中で近似値が固定されてしまうことがあるからである。

5. 領域内全根同時反復型の公式

代数方程式の多項式は有理整関数であり、上記の超越方程式の左辺は超越整関数である。有理整関数も超越整関数とともに z の有限な範囲において零点のみをもち、極はもたない。ただし、異なるのは無限遠点における性質で、有理整関数は $z = \infty$ で極をもったが、超越整関数は真性特異点をもつ。また、 n 次多項式は因数分解して n 個の z の 1 次式の積で表わせるのに対し、超越整関数は Weierstrass の因数分解定理を用いて無限積の形で表わせる。たとえば、式(2)の超越整関数が 1 位の零点 $a_i (i=1, 2, \dots)$ をもち、しかも

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$$

とするならば、

$$T(z) = T(0) e^{\frac{T'(0)}{T(0)} z} \prod_{j=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_j} \right) e^{\frac{z}{a_j}} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

と表わせる⁸⁾。

上式両辺の対数を取り、その後微分すると、

$$\frac{T'(z)}{T(z)} = \frac{1}{z - a_i} + \frac{1}{a_i} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_j} + \frac{1}{a_j} \right) + \frac{T'(0)}{T(0)}$$

となる。これから、 $z - a_i$ を求め、 $z = z_i$ とおくと、

$$z_i - \alpha_i = \left[\frac{T'(z_i)}{T(z_i)} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_i - z_j} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{z_i - z_j} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z_i - \alpha_j}{(z_i - z_j)(z_i - \alpha_j)} - \frac{1}{\alpha_j} \right) - \frac{1}{\alpha_i} \frac{T'(0)}{T(0)} \right]^{-1}$$

となる。いま、 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ はすべて異なるが、さらに

$$z_i - \alpha_i = O(\varepsilon) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

が十分小さいと仮定すると、前もって設定された領域内の n 個の根に対し次の関係を得る。

$$z_i - \alpha_i = \left[\frac{T'(z_i)}{T(z_i)} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_i - z_j} \right]^{-1} + O(\varepsilon^2)$$

これから、次の反復公式を得る。

$$z_i^{(\nu+1)} = z_i^{(\nu)} + \phi_i(z_i^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}, \dots, z_n^{(\nu)}) \dots \dots \dots (6)$$

ただし、

$$\phi_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = - \frac{1}{\frac{T'(z_i)}{T(z_i)} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_i - z_j}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots \dots \dots (7)$$

と似た、この反復公式(6)は、通常、代数方程式の解法において3次収束するため、“3次法”とよばれているが、超越方程式の解法においては2次収束する。それを以下に示す。

式(2)の超越整数は1位の零点をもつとして、式(5)で表わしたが、より一般的に α_i は m_i 位の零点をもつとすると、Weierstrass の因数分解定理⁷⁾より次のごとく無限積表示できる。

$$T(z) = e^{\omega(z)} z^{m_0} \prod_{j=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\alpha_j} \right)^{m_j} e^{p_j(z)} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

ただし、 m_0 は $z=0$ が零点の場合の位数、 $p_j(z)$ は無限積の収束のために選ばれた多項式、 $\omega(z)$ は整数である。 z_i の1回反復後の値を z'_i とするならば

$$z'_i = z_i + \phi_i(z_1, z_2, \dots, z_n) \dots \dots \dots (9)$$

である。このとき、 z_i および z'_i の誤差をそれぞれ ε_i 、 ε'_i と表わすならば、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= z_i - \alpha_i \\ \varepsilon'_i &= z'_i - \alpha_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10 \cdot a, b)$$

であるから、式(7)、(9)、(10)より

$$\varepsilon'_i = \varepsilon_i - \left[\frac{T'(z_i)}{T(z_i)} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_i - z_j} \right]^{-1}$$

となる。一方、式(8)より

$$\frac{T'(z_i)}{T(z_i)} = \omega'(z_i) + \frac{m_0}{z_i} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{m_j}{z_i - \alpha_j} + p'_j(z_i) \right\}$$

であるから、これを上式に代入し、 $z=0$ の根も他の根同様に扱うならば

$$\varepsilon'_i = \varepsilon_i - \left[-\frac{m_i}{z_i - \alpha_i} + \omega'(z_i) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{m_j}{z_i - \alpha_j} + p'_j(z_i) \right) + \sum_{j=1}^n p'_j(z_i) - \sum_{j=1}^n \frac{(1-m_j)z_i + m_j z_j - \alpha_j}{(z_i - z_j)(z_i - \alpha_j)} \right]^{-1}$$

となる。この式に式(10・a)を代入し、変形すると

$$\varepsilon'_i = \left(\frac{m_i - 1}{m_i} \right) \varepsilon_i + \left(\frac{\varepsilon_i}{m_i} \right)^2 \left[\omega'(z_i) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{m_j}{z_i - \alpha_j} + p'_j(z_i) \right) + \sum_{j=1}^n p'_j(z_i) - \sum_{j=1}^n \frac{(1-m_j)z_i + m_j z_j - \alpha_j}{(z_i - z_j)(z_i - \alpha_j)} \right] + O\left(\left(\frac{\varepsilon_i}{m_i} \right)^3 \right) \dots \dots \dots (11)$$

を得る。

もしも、 α_i が単根ならば、 $m_i=1$ となり、上式に $i=1$ を代入して、整理すると

$$\varepsilon'_i = \varepsilon_i^2 \left[\omega'(z_i) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{m_j}{z_i - \alpha_j} + p'_j(z_i) \right) + \sum_{j=1}^n p'_j(z_i) - \sum_{j=1}^n \frac{(1-m_j)z_i + m_j z_j - \alpha_j}{(z_i - z_j)(z_i - \alpha_j)} \right] + O(\varepsilon_i^3) \dots \dots \dots (12)$$

となる。したがって、 ε'_i は ε_i^2 くらいの大きさになるから、 $T(z)$ のすべての零点が単純ならば、 $\varepsilon_i = O(\varepsilon)$ のとき、 $\varepsilon'_i = O(\varepsilon^2)$ となる。すなわち、反復公式(6)は2次収束する系列となる。

もしも、 α_i が m_i 重零点 ($m_i \geq 2$) で、その近似解 z_1, z_2, \dots, z_{m_i} が α_i のまわりにほぼ対称に並んでいるならば、式(11)より

$$\varepsilon'_i = \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \varepsilon_i + O(\varepsilon_i^2) \dots \dots \dots (13)$$

となる。この式は、近似解 z_1, z_2, \dots, z_{m_i} が縮小率 $(1 - (1/m_i))$ で α_i へ1次収束することを示している。

6. 超越関数の計算法

ある領域の根数を調べるために、前述のごとく偏角の原理を用いるが、その際超越方程式の左辺の超越関数を1回微分した関数を求める。また、必ずしも必要ではないが、重根の重複度はこの超越関数を(重複度-1)回微分することにより検証できる。そのため、最大重複度の数だけ関数を定義する必要がある。

多項式を定義するには z の最大次数と各次数ごとの複素係数を記憶すれば十分である。それに対し、式(2)の超越関数においては、各項について係数 C_i 、 z の次数 I_i 、そして α_i ごとの \sin, \cos, \sinh, \cosh 関数の次数 IS_i, IC_i, IS_i, IC_i を記憶しなければならない。結局、 C_i および I_i は総和順と微分回数を示す二次元のマトリックス、 α_i はその種類の数の一次元ベクトル、そして IS_i から

$$\begin{aligned}
T'(z) = & \sum_{i=1}^m \{ C_i I_i z^{I_i-1} \prod_{j=1}^n (\sin a_j z)^{I_{sj}} (\cos a_j z)^{I_{cj}} (\sinh a_j z)^{I_{sj}} (\cosh a_j z)^{I_{cj}} + \\
& + \sum_{j=1}^n [C_i a_j I_{sj} z^{I_i} \prod_{j=1}^n (\sin a_j z)^{I_{sj}-1} (\cos a_j z)^{I_{cj}+1} (\sinh a_j z)^{I_{sj}} (\cosh a_j z)^{I_{cj}} + \\
& - C_i a_j I_{cj} z^{I_i} \prod_{j=1}^n (\sin a_j z)^{I_{sj}+1} (\cos a_j z)^{I_{cj}-1} (\sinh a_j z)^{I_{sj}} (\cosh a_j z)^{I_{cj}} + \\
& + C_i a_j I_{sj} z^{I_i} \prod_{j=1}^n (\sin a_j z)^{I_{sj}} (\cos a_j z)^{I_{cj}} (\sinh a_j z)^{I_{sj}-1} (\cosh a_j z)^{I_{cj}+1} + \\
& + C_i a_j I_{cj} z^{I_i} \prod_{j=1}^n (\sin a_j z)^{I_{sj}} (\cos a_j z)^{I_{cj}} (\sinh a_j z)^{I_{sj}+1} (\cosh a_j z)^{I_{cj}-1}] \} \\
& \dots\dots\dots (14)
\end{aligned}$$

IC_i まではまとめて、総和順、 a_i の種類順、三角および双曲線関数の種類、微分回数の計四次元の整数マトリックスとした。

参考までに式(2)の超越関数を1回微分すると、式(14)のごとくなる。これらの変化した係数および次数の値を1次導関数を定義する要素として保存し、この値をもとに次々と高次の導関数が定義できる。

7. 収束の判定法

超越関数の反復演算中に発生する丸め誤差を厳密に評価できないと、解 z の収束を正しく判定できない。そこで、この丸め誤差を厳密に評価するため、ある種の“複素区間演算”を利用する。

いま、ある誤差を含む複素数を中心の座標 z 、半径 ρ (ただし、 $\rho \geq 0$) の円とみなし、その値を (z, ρ) と表わすものとする。そして、計算精度を測る尺度として、単位丸め誤差

$$u = \gamma M^{-(L-1)} \dots\dots\dots (15)$$

を用いる。ただし、 M は計算機の基数、 L は正規化された浮動小数点数の仮数部の長さ、そして γ は計算結果が四捨五入されるか、切り捨てられるかでそれぞれ $1/2$ あるいは 1 となる数である。

ここではこの単位丸め誤差を用いて、誤差を含む複素数 (z, ρ) の和、差、積、商を文献5)に述べられた方法で計算した。超越関数式 $T(z)$ を計算する際に、変数 z と係数 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ とともに $\rho=0$ の円、すなわち、 $(z, 0)$ および $(C_i, 0)$ と設定し、上記の複素区間演算を順次行くと、最終的に超越関数の値は $(T(z), \Delta T(z))$ と与えられる。したがって、 $T(z) \equiv 0$ とは

$$|T(z)| < \Delta T(z) \dots\dots\dots (16)$$

となることであり、この式により解 z の収束を判定する。

周知のごとく、計算の有効桁数を α 桁とすると、 m 重根の近くでは $T(z)$ の有効桁数は α/m 桁となり、精度の良い重根の解は求められない。

一般に、超越方程式は零の多重根をもつことが多く、その結果 $\Delta T(z)$ の演算過程においてアンダーフローが発生しやすくなる。このような場合は、解の精度はやや落ちるが、便宜的に小さい量を $\Delta T(z)$ に与えて収束の判定をする方が実用的である。

8. 重根の確認

ある根が重根であるかどうか、そして重根ならばその重複度はいくつか、を確認する方法は2通りある。1つはその根の値を中心とする丸め誤差より大きい微小半径の円を描き、偏角の原理を前述のごとく適用する方法である。もう1つは式(2)の超越関数の導関数を求め、その z にある根の値を代入したとき、何回目の導関数まで零(正確には零に近い微小値)になるかを調べる方法である。

前者は重根でない近接根が存在しない場合は問題なく重複度が計算できる。ただし、数値積分をたびたび行うため、演算時間が後者に比較して長くなる。後者の方法は演算時間は短くすむが、零値の判定に使う“零に近い微小値”の選び方が難しい。前述のごとく、重複度が多くなるほど零に近い微小値の値を大きくする必要があり、得られる重複度の信頼性は薄くなる。したがって、本論文では前者の方法を採用した。

反復演算中にある根がすでに収束している他の根に近づいてきたならば、すでに収束している根の重複度を計算する。その結果、すでに求めてある根の数よりも重複度の方が大きいならば、近づいた根もまたその重根グループの一員とみなし、受け入れる。また、すでに求めてある根の数と重複度が等しいならば、近づいてきた根は範囲円内の離れた位置に適当な乱数を掛けて飛ばした。

このようにして、すべての根が収束して、しかるべき位置を占めたならば、重根グループごとにその重心点を求めて、そのグループの代表値とする。

9. 反復途中で領域をはずれる解の処理

超越方程式は無数の零点をもつから、複素平面上のある範囲を円で指定し、その内部の零点の位置を探すわけである。しかしながら、零点はその範囲円の外にもあるため、反復解のいくつかは計算中に外部の零点に引きずられて、範囲円の外に流出してしまう。そこで、流出した反復解の値は円の中心からの距離の逆数を取り、範囲円の内部に引き戻した。その際、ある実係数 b を用いて引き戻す強さを変化させている。すなわち、ある反復計算で求められた解 $z_i^{(v)}$ が β を中心とする半径 r_0 の範囲円の外に出ていると判定されたならば、

$$\beta + b \cdot (z_i^{(v)} - \beta)^{-1} \implies z_i^{(v)} \dots \dots \dots (17)$$

と置き換える。ただし、
 $|z_i^{(v)} - \beta| > r_0$

とする。この引き戻し係数 b の値が適切でないと、反復解がいつまでも動き続けて収束しない、あるいは収束するまでの反復回数が多すぎる、などということを経験した。通常遭遇するような超越方程式では数十回の反復回数で収束解が求められた。逆に、百回以上の反復でも収束しない場合は千回の反復でも収束しないといえよう。そのような場合でも、ほとんどの解は数十回の反復で収束値に到達しており、ほんの数個の値が動き続けている。これらの事情に関しては、数値計算例で述べる。

10. 数値計算例

(1) 単根および重根の収束挙動の確認

式(6)の反復公式を用いると、超越方程式の単根は二次式的に、重根は一次式的にそれぞれの零点に収束することを知った。そして、 m 重根の近似値の有効桁数は単根の有効桁数の約 $1/m$ となることもわかっている。

これらの事実を確認するため、次のごとき簡単な超越方程式を解いてみた。

$$(z-9)\left(\sin\frac{z}{2}\right)^2=0 \dots \dots \dots (18)$$

z の零点を求める範囲は原点を中心とする半径の大きさ 10 の円の内部とする。この式の形よりただちに 4 種類の零点がわかる。すなわち、

- $z=0+0i$ (2 重根)
- $z=+2\pi+0i$ (2 重根)
- $z=-2\pi+0i$ (2 重根)
- $z=9+0i$ (単根)

である。

次に本論文に提案する方法に基づいて作製したプログラムに式(18)のデータをインプットし、反復計算を行った。合計 7 個の根の初期値を半径 10 の円上に等間隔で配

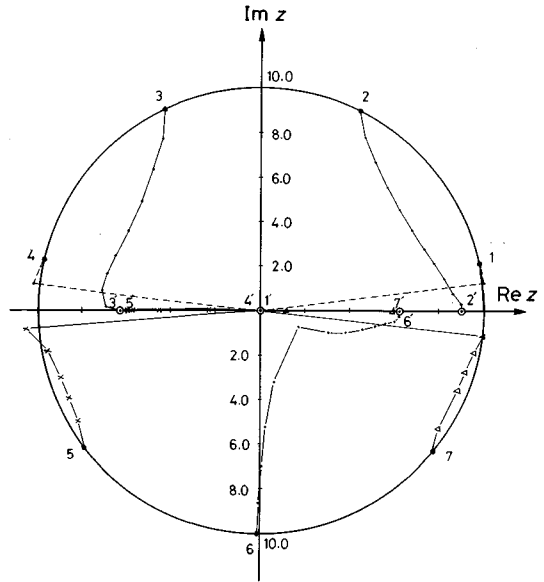


Fig. 1 Loci of the first 7 roots of Eq.(18).

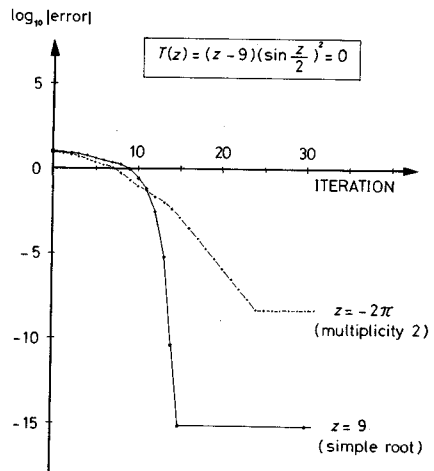


Fig. 2 Behavior of the errors of Eq.(18).

置し、その初期位置から徐々に収束してゆく状況を Fig. 1 に与えた。ただし、引き戻し係数は $b=1$ とした。図中の根番号 2, 3, 6 は素直にそれらの零点へと収束してゆくのにに対し、根番号 1, 4, 5, 7 は一度範囲円よりはみでた後、引き戻されて収束している。そこで、ここでは素直に収束する根番号 2 の単根 ($z=9+0i$) と根番号 3 の二重根 ($z=-2\pi+0i$) のみ注目する。縦軸に誤差の絶対値の常用対数、横軸に反復数をとって、これらの根の収束状況を Fig. 2 に与える。

これより、単根は二次曲線的に、重根はおおむね一次曲線的に収束してゆくのがわかる。さらに、この図より、二重根の近似値の有効桁数は単根の近似値の有効桁数の

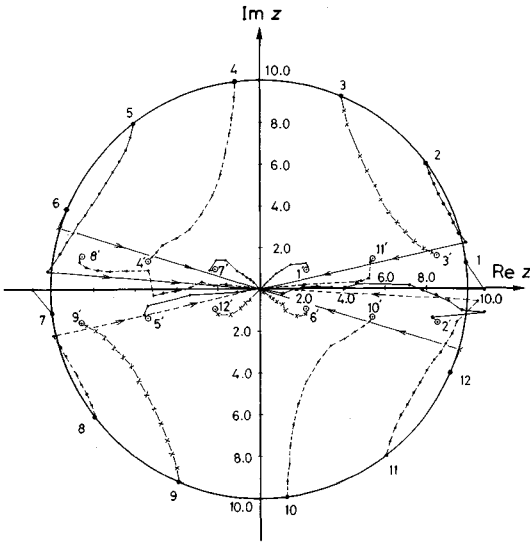


Fig. 3 Loci of the first 12 roots of Eq.(19).

約 1/2 となることもみてとれる。

ゆえに、本論文に提案した超越方程式に対する解法は十分実用に耐えるものといえる。

(2) 面内力と横荷重を受ける矩形板の曲げ解析

一様な面内力と横荷重を受ける相対する二辺が固定の矩形板の曲げ解析⁹⁾に現われる超越方程式

$$\frac{\sin 2z}{2z} + \frac{\sin \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

を解いてみた。原点を中心として半径 10 の円を描き、その内部の根数を計算すると 12 個である。そこで、円周上に等間隔に 12 個の根を初期値として置き、その順番に根番号を割り当てる。反復計算により、12 個の初期値が徐々に解 \odot に近づく様子を Fig. 3 に示す。

この図より、おおむね、反復解は双曲線状に移動してゆくのがわかる。図中の根 3, 4, 9, 10 は、幸運にもそのまま求める零点に到達し、そこで反復計算を終了している。零点に到達できず、範囲円をはみでしまった根 1, 2, 5, 6, 7, 8, 11, 12 は式(17)により原点の近くに引き戻され、再び反復計算により求める零点に到達している。ただし、番号 2 の根のごとくに 2 回も範囲円を逸脱する場合もあり、この根により反復回数が支配されている。式(17)の中の引き戻し係数 b により反復回数が変化するが、ここでは種々試みた結果、 $b=1/15$ の場合を示している。

当然のことながら、得られた零点は文献 9) に与えられている値と完全に一致している。また、Fig. 3 の零点の位置の分布がすべて互いに鏡像の関係にあることから結果の妥当性のある程度推し量ることができる。

なお、収束判定に用いる $\Delta T(z)$ の計算に必要なとなる

単位丸め誤差の値は、 $\gamma=1$ 、基数 $M=16$ 、仮数部の長さ $L=14$ を式(15)に代入して、

$$u=2.2204460492503131 \times 10^{-16}$$

となる。

(3) 薄肉長方形断面ばりの端部効果

薄肉長方形断面ばりが面内力と面外力を受けて断面変形を起こす場合、ある近似的処理により次のごとき超越方程式に至る¹⁰⁾。

$$\sin^2 \alpha z (2z - \sin 2z) + \sin^2 z (2\alpha z - \sin 2\alpha z) = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 α は既知量で箱形断面の縦横比を意味する。

a) $\alpha=0.5$ の場合

この場合、やや扁平な断面となり、式(20)は

$$\sin^2 0.5z (2z - \sin 2z) + \sin^2 z (z - \sin z) = 0 \dots\dots\dots (21)$$

と書き直せる。

未知複素数 z を求める領域として、原点を中心とする半径 10 の円を描く。その内部の根の数は偏角の原理より 21 個と知れる。これらを式(4)を用いて円周上に等間隔で配置し、反復計算を開始する。反復経過と最終値 \odot を Fig. 4 に示す。

反復解が双曲線状に進んでくるのは前の例題と同じである。しかし、ここでは根の数が多いためかなり複雑な動きを示している。

番号 (1, 10, 12, 20, 21) の根は五重根となり、原点に集まっているのがわかる。この重根度 $n=5$ は原点を中心とする極小半径の円を描き偏角の原理の式(3)を適用して再確認している。また、簡単な超越方程式ならば、式中の三角関数および双曲線関数を Taylor 展開することからも零重根の数を計算できる。二重根として、番号 (3, 13) および (14, 16) の 2 組が実軸上の位置 $z = \pm 2\pi$ に集まっている。この重複度も上記のごとく再確認できるが、式(21)の左辺を 1 回微分した関数もその z の値で零になることを利用する方が簡単である。

得られた零点の座標のうち、第一象限のみ記述すると、以下のごとくなる。

$$\begin{aligned} z_6 &= 3.4478735361 + 0.9723883035i \\ z_3 = z_{13} &= 6.2831853071 + 0.0i \\ z_8 &= 7.3387464936 + 2.2179253403i \\ z_{18} &= 9.6437659165 + 1.1940802398i \end{aligned}$$

b) $\alpha=1.0$ の場合

この場合、断面は正方形となり、式(20)は

$$\sin^2 z (2z - \sin 2z) = 0 \dots\dots\dots (22)$$

と書き直せる。

未知複素数 z を求める領域は前回と同じである。しかし、 α の変化とともに範囲円の外の根が 4 個侵入し、その結果、内部の根の数は 25 個になる。反復経過と最終値 \odot

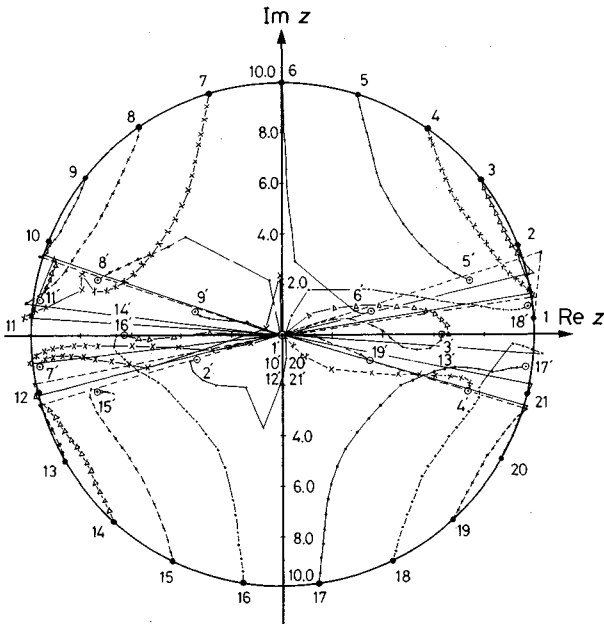


Fig. 4 Loci of the first 21 roots of Eq.(21).

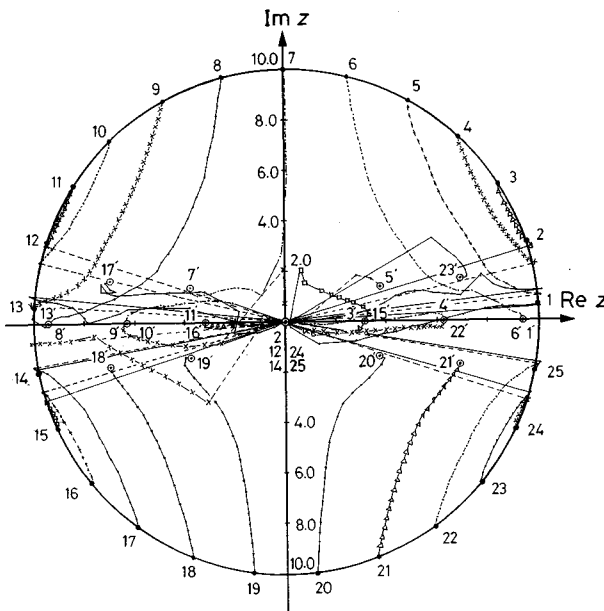


Fig. 5 Loci of the first 25 roots of Eq.(22).

を Fig. 5 に示す.

零重根の数は相変わらず5個であり、根番号(2, 12, 14, 24, 25)である。しかし、実軸上の二重根の位置は左右で2か所ずつ増える。すなわち、番号(6, 1), (4, 22), (3, 15), (11, 16), (9, 10), (8, 13)の計6組の二重根が実軸上に並んでいる。

得られた零点の座標のうち、第一象限のみ記述すると、以下のごとくなる。

$$z_3 = z_{15} = 3.1415926535 + 0.0i$$

$$z_6 = 3.7488381388 + 1.3843391414i$$

$$z_4 = z_{22} = 6.2831853071 + 0.0i$$

$$z_{23} = 6.9499798569 + 1.6761049424i$$

$$z_1 = z_6 = 9.4247779607 + 0.0i$$

11. あとがき

DKA 法は超越方程式の解法に適用できないとされて顧みられなかった。その大きな理由は、DKA 法が比較的低次の代数方程式向きに提案された解法であるため、無限次の代数方程式ともいべき超越方程式には不向きと考えられたこと、また、求められた解の事後評価の理論的裏付けが現時点では確立していないこと、などであろう。

それにもかかわらず、著者らは DKA 法を超越方程式に適用するための理論的裏付け、いくつかの計算技術の提案、そして多くの数値計算を行った。その結果、DKA 法を超越方程式に適用することは十分、実用に耐えることを確認した。

もちろん、ここで扱った超越方程式は、いわゆる固有値問題などから派生する形のものであるが、若干の手直しにより他の形の超越方程式にも適用し得ると思われる。作成した計算プログラム中では、超越方程式を一般的形で定義しており、関数副プログラムは使用しなかった。そのため、形式さえ同じならば、この種のあらゆる超越方程式に適用可能である。

ここで述べた解法では、代数方程式の場合に倣い、初期値を配置する円と根を求める領域の境界円を一致させている。超越方程式の場合、反復の過程で領域円外の根に引きずられることもあるから、初期値を配置する円を原点の近傍に設定することも考えられる。実際にいくつかの例題をそのような初期値から出発させて演算したところ、収束までの反復回数に大きな差はなかった。したがって、初期値を配置する円は、必ずしも領域境界円と一致させる必要はないといえる。

初期のプログラムにおいて、計算中に起こった問題は以下の2点であった。

- 1) 重根の位置にその重根度より多くの根が集まる、あるいは、逆にその重根度より少ない根しか集まらない。
- 2) 引き戻し係数 b が適切でないと、反復回数が多くなる。

上記の問題点1)は常に発生するわけではない。しかし、超越方程式の形によって、時に発生することがある。そこで、8. で述べた方法、すなわち偏角の原理を用いてこの難点を回避する方法を示した。問題点2)を避けるた

めには、引き戻し係数 b を何種類か試行錯誤することにより適切な値を求められる。超越方程式の形ごとに引き戻し係数 b は異なるから、そのつど調べなければならない。なお、ここでとりあげた計算例では、引き戻し係数として、 $1/20 \sim 1$ の範囲を用いた。

計算例では、求める根の領域をすべて原点を中心とする半径 10 の円の内部としている。計算プログラムに手を加えることにより、根の領域を、たとえば長方形とか楕円形に変更することも可能である。また、領域円の半径をさらに大きくすることも可能である。ただし、双曲線余弦および双曲線正弦の関数値は座標原点から離れるとともに急激に増大するから、あまり大きな領域を設定すると、反復計算中に簡単にオーバーフローを発生し、計算が中断する。ゆえに、原点から大きく離れた位置を解析領域に含むのは現実的ではない。

超越方程式の得られた根の誤差評価¹¹⁾はできなかったが、通常の構造力学で遭遇する超越方程式では問題ないと思われる。一般に重根の度数が増えるに伴い根の精度は低下するが、原点の零点を除けば、重根度はほとんど 2 以下である。

本論文で示したごとく、DKA 法のプログラムは複素根の近似値を反復公式を用いて真の値に近づけるといって単純な構成である。したがって、読者は従来の代数方程式を DKA 法で解くプログラムにここで示した工夫を加えることで簡単に本論文で用いたのと類似のものを作成できる。参考までに、2 次法の反復公式で代数方程式を解くプログラムの一例として、文献 12) を挙げておく。

数値計算は東京理科大学情報処理センター（野田市）の IBM 3090-180 システムを使用し、倍精度演算で行った。

謝 辞：本論文作成にあたり、種々協力してくれた東京理科大学理工学部土木工学科構造解析研究室の平部

隆典君（現・宮崎県）、新井 泰君（現・東京工業大学）、市野 卓君（現・横浜市）に感謝いたします。また、投稿原稿に対し、丁寧かつ建設的な助言を与えてくれた査読員に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Durand, E.: Solutions numeriques des equations algebriques. Tome I: Equations du type $F(x)=0$; Racines d'un Polynome, Masson, Paris, 1960.
- 2) Kerner, I.O.: Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen. Numerische Mathematik, Vol. 8, pp. 290~294, 1966.
- 3) Aberth, O.: Iteration Methods for Finding All Zeros of a Polynomial Simultaneously. Mathematics of Computation, Vol. 27, pp. 339~344, 1973.
- 4) 一松 信: 数値解析, 朝倉書店, pp. 78, 1982.
- 5) 伊理正夫・山下 浩・寺野隆雄・小野令美: 大域的収束性をもつ代数方程式の解法, 京都大学数理解析研究所数理解析学講義録, No. 339, pp. 43~69, 1978.
- 6) F. ジョン (藤田 宏・名取 亮共訳): 数値解析講義, 産業図書, pp. 39, 1975.
- 7) 入江昭二・垣田高夫: 複素関数論, 内田老鶴圃新社, pp. 130, 140, 1981.
- 8) M.R. スピーゲル (石原宗一訳): 複素解析, マグロウヒルブック, pp. 327, 1984.
- 9) 石川清志・夏目正太郎: 固有関数法による一様面内力と横荷重を受ける固定矩形板の曲げ解析, 土木学会論文報告集, No. 339, pp. 23~32, 1983.
- 10) Balch, C.D. and Steele, C.R.: Asymptotic Solutions for Warping and Distortion of Thin-Walled Box Beams, ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 54, pp. 165~173, 1987.
- 11) 伊理正夫: 数値計算, 朝倉書店, 1981.
- 12) 森 正武: FORTRAN 77 数値計算プログラミング, 岩波書店, pp. 225, 1987.

(1989.6.14・受付)