

# ALE法に基づく粘性流体と構造との関連問題の 有限要素解析手法

## A FINITE ELEMENT PROCEDURE FOR VISCOUS FLUID-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS USING THE ARBITRARY LAGRANGIAN-EULERIAN FORMULATION

野村卓史\*・飯島政義\*\*

By Takashi NOMURA and Masayoshi IJIMA

A finite element solution procedure is presented for solving the interaction problems of viscous incompressible fluid and a rigid body supported by elastic springs. The Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation is employed in order to treat the boundary conditions on the surface of the moving body strictly. A step-by-step solution procedure is derived by using the mixed finite element method as well as explicit time integration schemes. The solution procedure includes rediscrretization of solution domain according to the displacements of the moving body. The pattern of the rediscrretization is prescribed so as to avoid excessive element deformation. The characteristics of the present procedure are verified through solving the problems of an oscillating circular cylinder in a closed circular domain and an oscillating square cylinder in a uniform flow.

*Keywords* : arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation, finite element method, fluid-structure interaction, viscous incompressible fluid

### 1. はじめに

風による橋梁部材の渦励振など、流れの中に置かれた物体と流体との関連問題を解析する際に、物体振動に対する流体の寄与を付加質量や付加減衰として理想化することができず、物体の運動方程式と流体の支配方程式とを連成させた数値解析手法を構成しようとするときには、流体と物体との間の時間とともに移動する境界を扱う必要がある。このとき問題となることは、物体の運動を支配する方程式がラグランジュ的立場で記述されているのに対し、物体まわりの流れを支配する方程式は通常オイラー的立場で記述されていることである。この問題に対する対処の仕方の一つは、流体の支配方程式としてラグランジュ記述された方程式<sup>1)</sup>を用いることである。この方法は、流体粒子の運動と差分格子や有限要素の節点の変位とを一致させる解析手法として波やスロッシング等の自由表面問題の数値解析に適用されている。しか

し、この方法では格子や要素の変形が過大となると精度の低下をきたし、ついには解析不能に至るため、一樣流の中に物体が置かれた場合のように、流体粒子が下流に流れ去るような問題に適用することはできない。また、別の方法として、物体の運動を正弦関数に展開してナビエ・ストークス方程式を有限要素解析する方法も報告されている<sup>2)</sup>が、この場合、流入境界の流速に任意の時間変化を与えることが難しく、汎用的な解析手法を構成しにくい。

Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE)法<sup>3)</sup>は、流体粒子の運動を記述する参照点(すなわち節点)が空間に固定されているオイラー的立場と、粒子とともに動くラグランジュ的立場との中間的な立場をとる方法で、節点が動く様式が、流体粒子の運動とは独立に物体との境界や自由表面の運動などに関連づけて任意に設定される。そのため、境界の移動に伴って格子や要素を変形させることは必要であるが、過度のゆがみを回避することが可能である。また、この方法によれば、物体との境界上の節点を境界の運動とともに動かすことによってラグランジュ的立場をとることと、物体から遠く離れた領域や解析対象領域の外周の節点を固定してオイラー的立場をと

\* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科  
(〒152 目黒区大岡山2-12-1)

\*\* 正会員 工修 東京電力(株)(前・東京工業大学大学院修士課程)

ることを混在させた解析が可能となり、流下する流体の中に置かれた物体振動の問題を解析対象に含む汎用性の高い解析手法を構成することができるものと考えられる。

ALE法はHirtらによる二相流体の差分解析<sup>3)</sup>、Praethtによるガスの拡散の差分解析<sup>4)</sup>等の研究で提案され、差分解析では動座標ともよばれている<sup>5)</sup>。有限要素解析では、波動伝播等の自由表面問題<sup>6)</sup>、<sup>7)</sup>や原子炉内部の流体-構造相関問題<sup>8)</sup>、<sup>9)</sup>などの解析に適用されているが、流体-構造相関問題の場合、主に非粘性流体が対象とされてきた。最近粘性流体を扱った解析が報告された<sup>10)</sup>が、物体の変位の時刻歴があらかじめ規定されている問題を対象として、流体の支配方程式のみを解いており、物体の振動方程式との連成問題は扱っていない。

そのほかALE法によらず振動方程式と非圧縮性粘性流体との連成問題を扱った有限要素法の研究としては、2段階階層的な時間積分法と線形加速度法とによって弾性支持された剛体運動を扱った研究<sup>11)</sup>、シェルの変形を扱った研究<sup>12)</sup>がある。前者では物体の変位を微小と仮定してメッシュを固定し、後者ではシェルに接する要素のみを変形させている。

本研究では、ALE法と有限要素法とに基づいて、二次元の非圧縮性粘性流体と、流れの中で弾性支持された物体との相関問題を対象とする解析手法を構成した。物体は剛体と仮定し、流体と物体との連成関係は、物体の重心変位と表面節点変位の関係、および重心に作用する力と表面節点力との関係によって表わさせる。これらの連成関係を介して、流体系の有限要素方程式において未知量となっている物体表面上の節点流速成分と節点力成分とを消去することにより、流れ場の流速分布、圧力分布および物体の変位とを交互に時間積分していく解析手法を構成した。解析手法の特性は数値解析例によって検討している。

## 2. ALE法によって記述された流体の基礎方程式と有限要素方程式

### (1) ALE法に基づく流体の基礎方程式

流体の運動、状態を表わす流速、圧力などの物理量を  $f=f(x_i, t)$  とすると、ALE法によって記述したときの  $f$  の時間微分は次のように表わされる<sup>3)</sup>。

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (u_i - v_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}; i=1, n \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $u_i$  は流体粒子の速度、 $v_i$  は参照する点が動く速度である。また、 $n$  は次元の数である。

物理量  $f$  を参照する点が空間に固定されている ( $v_i=0$ ) とき、式(1)はオイラーの方法による記述と一致する。

また、参照する点が流体粒子と一緒に動くとき ( $v_i=u_i$ )、式(1)はラグランジュの方法による記述と一致する。

このALE記述によれば、本研究で対象とする非圧縮性粘性流体の流れの支配方程式は次のように表わされる。

ナビエ・ストークス方程式：

$$\rho \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_j - v_j) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} = \rho b_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \dots\dots\dots (2)$$

連続条件式：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\rho$  は流体の密度、 $u_i$  は流速の  $i$  方向成分、 $b_i$  は物体力の  $i$  方向成分である。また、 $\tau_{ij}$  は応力テンソルであり、次式のニュートンの構成則に従う。

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $p$  は圧力、 $\mu$  は粘性係数、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。

また、有限要素解析の対象となる、流体が占める領域  $\Omega$  の境界  $\Gamma$  は、流速が規定される境界  $\Gamma_u$  とトラクションが規定される境界  $\Gamma_t$  とから成る。このうち境界  $\Gamma_u$  は図-1に示すように、流路の壁面や流入境界などの境界位置が固定されている境界  $\Gamma_{ua}$  と、振動物体の表面  $\Gamma_{ub}$  とに区別される。これらの境界上での境界条件は次のように表わされる。

$$u_i = \bar{u}_i, v_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_{ua} \dots\dots\dots (5 \cdot a)$$

$$u_i = v_i \quad \text{on } \Gamma_{ub} \dots\dots\dots (5 \cdot b)$$

$$t_i = \bar{t}_i, v_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_t \dots\dots\dots (5 \cdot c)$$

ここで、 $t_i$  はトラクション、また、上付きの  $\bar{\quad}$  はその値が規定されていることを表わす。

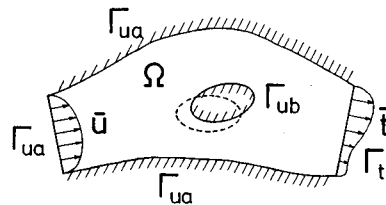


図-1 解析対象領域と境界の区別

### (2) 流体に関する有限要素方程式

流体運動に関する有限要素方程式は、通常のガラーキソ法に基づいて構成した。二次元問題を対象とし、用いた有限要素は3節点三角形要素で、流速に対して要素内線形分布、圧力に対して要素内一定分布の混合補間である。ただし、本論文の解析例はすべて、この三角形要素

を4枚重ねて得られる四角形要素によって行っている。参照点の移動速度  $v_i$  に対しても流速と同じ要素内線形分布の補間関数を用いた。これらの要素補間関数を適用して得られるナビエ・ストークス方程式(2)および連続条件式(3)に対応する有限要素方程式はそれぞれ次のように表わすことができる。

$$M\ddot{u} + K_a(u-v)u + K_\mu u + K_p p = f \dots\dots\dots (6)$$

$$K_p^T u = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $M$  は密度に関するマトリックス、 $K_a(u-v)$  は対流項に関する非線形マトリックス、 $K_\mu$  は粘性に関するマトリックス、 $K_p$  は勾配に関するマトリックスである。また、 $u$  は節点流速のベクトル、 $v$  は節点の移動速度のベクトル、 $p$  は要素圧力のベクトル、 $f$  は物体力および境界における流体力からなる節点変数のベクトルである。

節点に関する変数のベクトル  $u, v, f$  の成分は図-1に示した境界条件の区別に従ってそれぞれ次のように区別される。

$$u^T = \langle u^{\alpha T} \bar{u}^{\beta T} u^{\gamma T} \rangle \dots\dots\dots (8-a)$$

$$v^T = \langle v^{\alpha T} v^{\beta T} v^{\gamma T} \rangle \dots\dots\dots (8-b)$$

$$f^T = \langle \bar{f}^{\alpha T} f^{\beta T} f^{\gamma T} \rangle \dots\dots\dots (8-c)$$

ここで、添字  $\beta, \gamma$  はそれぞれ固定境界  $\Gamma_{ua}$  と物体とともに移動する境界  $\Gamma_{ub}$  上に位置する節点変数であることを表わし、添字  $\alpha$  は、それ以外の節点、すなわちトラクションが規定されている境界  $\Gamma_c$  上の節点と領域  $\Omega$  内部の節点の変数であることを表わす。

節点の移動速度  $v$  は任意に与えることができる変数であるので、有限要素方程式における未知変数は、 $u^{\alpha T}, u^{\gamma T}, p, f^{\beta T}, f^{\gamma T}$  である。なお、本研究では粘性流体を解析対象とするので、移動する境界上の節点においては、すべりなしの条件により、節点流速と節点の移動速度とは等しい。すなわち、

$$u^{\gamma T} = v^{\gamma T} \dots\dots\dots (9)$$

(3) 物体の運動方程式

本研究では流体中に置かれた物体について、以下のよ様な仮定を与えた。

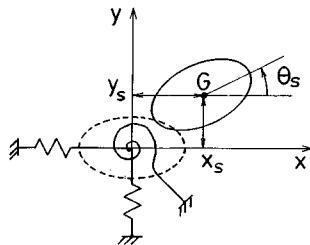


図-2 物体重心の変位の3成分

- a) 物体は剛体と仮定し、それ自身の変形は考えない。
- b) 重心一点に関する  $x$  方向、 $y$  方向の並進変位2成分、および回転変位の3自由度の運動を考える(図-2)。
- c) 物体はそれぞれの自由度ごとに独立のばね、およびダッシュポットに支持されているものとする。

以上の仮定により、物体の運動方程式を次のように表わす。

$$M_s \ddot{x}_s + C_s \dot{x}_s + K_s x_s = f_s \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $x_s$  は物体重心の変位ベクトル、 $f_s$  は対応する外力のベクトルである。

$$x_s^T = \langle x_s, y_s, \theta_s \rangle, f_s^T = \langle X_s, Y_s, M_s \rangle \dots\dots\dots (11)$$

また、質量マトリックス  $M_s$ 、減衰マトリックス  $C_s$  および剛性マトリックス  $K_s$  はいずれも定数係数の対角マトリックスである。

(4) 物体と流体との間の速度および力の関係

物体重心の変位速度  $\dot{x}_s$  と、流体と物体との境界  $\Gamma_{ub}$  上の節点における流速との関係は、物体が変形しないことより、変換マトリックス  $T_0$  (付録1参照) を用いて次式のように表わされる。

$$u^{\gamma T} = v^{\gamma T} = T_0^T \dot{x}_s \dots\dots\dots (12)$$

また、境界  $\Gamma_{ub}$  上の節点力  $f^{\gamma T}$  (流体に作用する力) の反力の合力が物体の重心に対して外力  $f_s$  として作用することから両者の間には次式が成り立つ。

$$f_s = -T_0 f^{\gamma T} \dots\dots\dots (13)$$

以上に示した、ALE法によって記述されたナビエ・ストークス有限要素方程式(6)、連続条件式(7)および物体の運動方程式(10)とが本研究の基礎となるマトリックス方程式である。これらが通常の振動解析あるいはナビエ・ストークス方程式の有限要素解析と異なる点は：(i)運動方程式(10)の右辺の外力項  $f_s$  が、式(13)を介して流体系の節点反力成分  $f^{\gamma T}$  と連成した未知変数であること、および(ii)境界  $\Gamma_{ub}$  上の流速成分  $u^{\gamma T}$  が式(12)を介して運動方程式(10)の未知変数  $x_s$  と連成した未知変数であること、の2点の連成関係にある。

3. 連成問題の求解過程

以上に示したマトリックス方程式が連成した問題に、オイラーの前進差分公式、およびこれにテンソル粘性を付加した Balancing Tensor-Diffusivity 法<sup>13)</sup> (以下、BTD法と略記) を適用して、ステップ・バイ・ステップに解き進める解析手法を構成した。これらの陽的公式を適用すると、陰的公式を適用する場合よりも小さな全体

係数マトリックスで解析が進められる。ALE法では、物体の変位に従って節点座標を更新し、要素係数マトリックスおよび全体係数マトリックスを再作成することになるため、全体係数マトリックスを小さくすることによって、演算時間の低減を図ったものである。オイラー公式による場合もBTD法による場合も解析手法の誘導過程の基本的な流れは同じであるため、ここでは前者を適用した場合について説明する。

(1) オイラー法に基づく解析手法の誘導

有限要素運動方程式(6)と連続条件式(7)とを式(8)に示した節点変数に関する区別に従って分離すると、時刻  $t_n$  における方程式が以下のように表わされる。

$$M_{Ln}^a \dot{u}_n^a + K_a(u_n - v_n)_n^a u_n + K_{\mu n}^a u_n + K_{\beta n}^a p_n = \bar{f}_n^a \quad (14 \cdot a)$$

$$M_{Ln}^b \dot{u}_n^b + K_a(u_n - v_n)_n^b u_n + K_{\mu n}^b u_n + K_{\beta n}^b p_n = f_n^b \quad (14 \cdot b)$$

$$M_{Ln}^c \dot{u}_n^c + K_a(u_n - v_n)_n^c u_n + K_{\mu n}^c u_n + K_{\beta n}^c p_n = f_n^c \quad (14 \cdot c)$$

$$K_{\beta n}^a u_n^a + K_{\beta n}^b u_n^b + K_{\beta n}^c u_n^c = 0 \quad (15)$$

ここで、各係数マトリックスの添字  $n$  は時刻  $t_n$  における節点座標から作成された係数マトリックスであることを意味している。また、密度に関するマトリックス  $M$  を lumping し、対角マトリックス  $M_L$  としている。

次に、時刻  $t_n$  から  $t_{n+1}(=t_n + \Delta t)$  の間の時間積分に関するオイラーの前進差分公式：

$$\dot{u}_n \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \quad (16)$$

を式(14・a)に代入する。さらに、式(15)において、時間間隔  $\Delta t$  の間では有限要素の変形が小さいとして次のような近似を行う。

$$K_{\beta n+1} \approx K_{\beta n} \quad (17)$$

このようにして得られる次式：

$$K_{\beta n}^a u_{n+1}^a + K_{\beta n}^b \bar{u}_{n+1}^b + K_{\beta n}^c u_{n+1}^c = 0 \quad (18)$$

および式(15)を適用して未知流速成分  $u_{n+1}^a$  を消去すると、次のような圧力  $p_n$  に関する方程式を得る。

$$\begin{aligned} & (K_{\beta n}^a M_{Ln}^{a-1} K_{\beta n}^a) p_n = \\ & K_{\beta n}^a M_{Ln}^{a-1} \{ \bar{f}_n^a - K_a(u_n - v_n)_n^a u_n - K_{\mu n}^a u_n \} \\ & + K_{\beta n}^b \frac{\bar{u}_{n+1}^b - \bar{u}_n^b}{\Delta t} + K_{\beta n}^c \frac{u_{n+1}^c - u_n^c}{\Delta t} \quad (19) \end{aligned}$$

ここで、右辺の最後の項は時刻  $t_{n+1}$  において未知の流速成分  $u_{n+1}^c$  を含んでいる。

一方、物体の運動方程式(10)の未知外力  $f_s$  は式(14・c)、(13)を適用することにより消去できる。

$$\begin{aligned} M_s \dot{x}_{sn} + C_s \dot{x}_{sn} + K_s x_{sn} = & -T_{\theta n} [M_{Ln}^c \dot{u}_n^c \\ & + K_a(u_n - v_n)_n^c u_n + K_{\mu n}^c u_n + K_{\beta n}^c p_n] \quad (20) \end{aligned}$$

この式(20)において右辺第1項の未知流速成分  $\dot{u}_n^c$  は、式(12)の関係より物体の加速度  $\dot{x}_s$  に変換され、左辺第1項に含めることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} & (M_s + T_{\theta n} M_{Ln}^c T_{\theta n}^T) \dot{x}_{sn} + C_s \dot{x}_{sn} + K_s x_{sn} \\ & = -T_{\theta n} [K_a(u_n - v_n)_n^c u_n + K_{\mu n}^c u_n + K_{\beta n}^c p_n] \quad (21) \end{aligned}$$

式(21)の右辺は時刻  $t_n$  における既知の項からなる。ただし、前述したように圧力  $p_n$  を決めるべき方程式(19)の右辺に未知成分が含まれているため、圧力  $p_n$  はまだ求められない。

ここで、物体の加速度  $\ddot{x}_s$  にも流体の加速度と同様にオイラーの前進差分近似：

$$\ddot{x}_{sn} \approx \frac{\dot{x}_{sn+1} - \dot{x}_{sn}}{\Delta t} \quad (22)$$

を用いると式(21)および式(12)から次の関係式を得ることができ、

$$\begin{aligned} T_{\theta n}^L \dot{x}_{sn} = & -T_{\theta n}^L (M_s + T_{\theta n} M_{Ln}^c T_{\theta n}^T)^{-1} \{ C_s \dot{x}_{sn} + K_s x_{sn} \\ & + T_{\theta n} [K_a(u_n - v_n)_n^c u_n + K_{\mu n}^c u_n + K_{\beta n}^c p_n] \} \\ = & T_{\theta n}^L \frac{\dot{x}_{sn+1} - \dot{x}_{sn}}{\Delta t} = \frac{u_{n+1}^c - u_n^c}{\Delta t} \quad (23) \end{aligned}$$

式(23)により、式(19)の右辺の最後の項(未知項)を消去することができ、その結果圧力  $p_n$  に関する次のような方程式を得ることができ、

$$\begin{aligned} & \{ K_{\beta n}^a M_{Ln}^{a-1} K_{\beta n}^a + K_{\beta n}^c T_{\theta n}^L (M_s + T_{\theta n} M_{Ln}^c T_{\theta n}^T)^{-1} T_{\theta n} K_{\beta n}^c \} p_n \\ & = K_{\beta n}^a M_{Ln}^{a-1} \{ \bar{f}_n^a - K_a(u_n - v_n)_n^a u_n - K_{\mu n}^a u_n \} \\ & + K_{\beta n}^b \frac{\bar{u}_{n+1}^b - \bar{u}_n^b}{\Delta t} \\ & - K_{\beta n}^c T_{\theta n}^L (M_s + T_{\theta n} M_{Ln}^c T_{\theta n}^T)^{-1} \{ C_s \dot{x}_{sn} + K_s x_{sn} \\ & + T_{\theta n} [K_a(u_n - v_n)_n^c u_n + K_{\mu n}^c u_n] \} \quad (24) \end{aligned}$$

この式(24)の右辺の各項はいずれも時刻  $t_n$  および  $t_{n+1}$  において既知の量からなっており、これを解けば圧力  $p_n$  が求められる。

(2) 計算手順

前節で誘導した関係式に基づいて時刻  $t_n$  から  $t_{n+1}(=t_n + \Delta t)$  へと解析を進める計算手順は以下のとおりである。

- ① 既知の諸量：
  - a) 流速  $u_n$ 、境界  $\Gamma_{ua}$  上の流速成分  $u_{n+1}^b$
  - b) 物体の変位と速度  $x_{sn}$ 、 $\dot{x}_{sn}$
  - c) 節点の座標と移動速度  $y_n = y_n(x_{sn})$ 、 $v_n = \dot{y}_n(\dot{x}_{sn}, x_{sn})$  ( $y_n$ 、 $v_n$  は既知関数)

d) 係数マトリックス  $M_{Ln}$ ,  $K_a(u_n - v_n)_n$ ,  $K_{\mu n}$ ,  $K_{\rho n}$

e) 変数マトリックス  $T_{\theta n}$

② ①の諸量より, 式(24)を解いて圧力  $p_n$  を求める.

③ 式(23)を変形して得られる次式(25)に①の諸量と②の圧力  $p_n$  を代入して物体の速度  $\dot{x}_{s^{n+1}}$  を求める.

$$\dot{x}_{s^{n+1}} = \dot{x}_{s^n} - \Delta t (M_s + T_{\theta n} M_{Ln} T_{\theta n}^T)^{-1} \{ C_s \dot{x}_{s^n} + K_s x_{s^n} + T_{\theta n} [K_a(u_n - v_n)_n^T u_n + K_{\mu n} u_n + K_{\rho n} p_n] \} \dots (25)$$

また, この  $\dot{x}_{s^{n+1}}$  を用いて式(12)から  $u_{n+1}^T$  を求める.

④ 式(14・b), (14・c)に式(16)を適用して得られる次式(26)により境界  $\Gamma_u$  上の節点力成分  $f_n^{\beta}$  と  $f_n^{\gamma}$  を求める.

$$f_n^{\beta} = M_{Ln}^{\beta} \frac{\bar{u}_{n+1}^{\beta} - \bar{u}_n^{\beta}}{\Delta t} + K_a(u_n - v_n)_n^{\beta} u_n + K_{\mu n}^{\beta} u_n + K_{\rho n}^{\beta} p_n \dots (26 \cdot a)$$

$$f_n^{\gamma} = M_{Ln}^{\gamma} \frac{\bar{u}_{n+1}^{\gamma} - \bar{u}_n^{\gamma}}{\Delta t} + K_a(u_n - v_n)_n^{\gamma} u_n + K_{\mu n}^{\gamma} u_n + K_{\rho n}^{\gamma} p_n \dots (26 \cdot b)$$

⑤ 式(14・a) に式(16)を適用して得られる次式(27)により, 時刻  $t_{n+1}$  における流速成分  $u_{n+1}^{\alpha}$  を求める.

$$u_{n+1}^{\alpha} = u_n^{\alpha} + \Delta t M_{Ln}^{\alpha} \{ \bar{f}_n^{\alpha} - K_a(u_n - v_n)_n^{\alpha} u_n - K_{\mu n}^{\alpha} u_n - K_{\rho n}^{\alpha} p_n \} \dots (27)$$

⑥ 次式(28)により時刻  $t_{n+1}$  における物体の変位  $x_{s^{n+1}}$  を求め, 各係数マトリックスを更新する.

$$x_{s^{n+1}} = x_{s^n} + \Delta t \frac{\dot{x}_{s^n} + \dot{x}_{s^{n+1}}}{2} \dots (28)$$

以上の①~⑥の手順を積分ステップごとに繰り返す.

式(24)の左辺の全体係数マトリックスは対称で, 通常バンド性をもたせることができる. この全体係数マトリックスの組み立ては要素係数マトリックスを単に重ね合わせることによって行うのではなく, 要素係数相互の乗算を必要とするが, 全体マトリックスの各係数が, どの要素とどの要素の係数の乗算によって算出されるかという対応関係に関するインデックスを作成しておくことにより, 組み立て過程の高速化を図っている. 組み立てられた全体係数マトリックスはスカイライン法で記憶し, 毎ステップ前進消去・後退代入を行うことになるが, この過程は, ベクトル演算機能のあるコンピュータでは比較的負担が軽い. 演算時間の負担になるところはむしろ毎ステップ要素係数マトリックスを更新する計算で, 通常プログラムではベクトル演算の効果があまり上がらないため, 今後工夫する必要がある.

なお, 手順④を飛ばしても解析は成立するが, 節点力  $f_n^{\beta}$  を求めれば物体に作用する流体力を式(13)により算

出できるため, 解析過程に含めている.

### (3) 物体の運動があらかじめ規定されている場合の解析手法

本研究で構成した解析手法の特別な適用対象として, 物体の変位の時刻歴があらかじめ与えられている場合が考えられる. この場合には運動方程式(10)を解く必要がないこと, および式(19)の右辺の最後の項が既知項となること, により1積分ステップの計算手順は以下のような簡単なものとなる.

① 式(19)を解いて圧力  $p_n$  を求める.

② 式(26・a, b)を解いて節点力成分  $f_n^{\beta}$ ,  $f_n^{\gamma}$  を求める.

③ 式(27)を解いて流速成分  $u_{n+1}^{\alpha}$  を求める.

④ 物体の変位を更新し, 変位と節点座標の関係より各係数マトリックスを作成しなおす.

ここで手順②を含めている理由は前節(2)で述べたものと同じである.

## 4. 静止流体中で強制振動する円柱周りの流れ

3.(3)に示した, 物体の運動があらかじめ規定されている場合の解析手法の解析例として, 円形領域内の非圧縮性粘性流体中で円柱が正弦振動している問題を取り上げる. この問題に対してChenは微小振幅を対象とした理論解を求め, 付加質量, 付加減衰を算出している<sup>14)</sup>. これらと本解析結果とを比較することにより, 解析手法の検証を行う.

解析は円形領域外周の直径  $d_2$  と円柱の直径  $d_1$  との比  $d_2/d_1$  が3と5の2通りで行った. 図-3に解析に用いた要素分割, 境界条件および諸定数を示す. 対称性より半円形の解析モデルとし, 円柱表面および領域の外周をすべりなしとした. 流体の解析対象領域の境界がすべて閉じているため, このままでは圧力の絶対値が不定となる. そこで, 外周の中央の節点において, 直トラクション成分に対応する等価節点力  $f_y$  をゼロとする境界条件を与

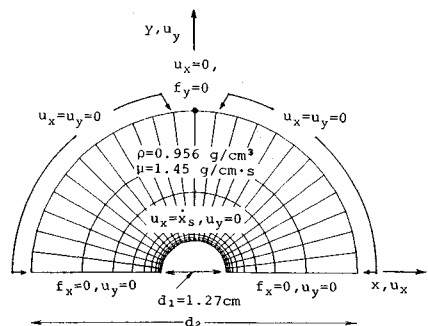


図-3 円形領域内で振動する円柱周りの流れの解析に用いた要素分割と境界条件 ( $d_2/d_1 = 5$ )

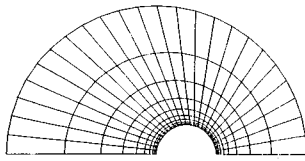


図-4 円形領域内で振動する円柱周りの流れの解析に用いた要素の変形パターン ( $d_2/d_1=5$ ) (変形は強調してある)

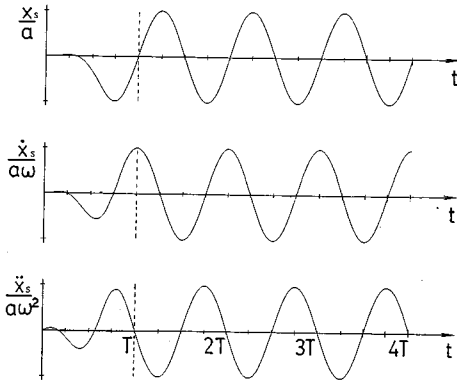


図-5 設定した変位, 速度, 加速度の時刻歴

え、圧力の規準に替えている。この条件は領域からの流出入を許す条件でもあるが、ほかに流出入の可能な境界がないため、連続条件を満足する解析が行われれば、結果的にすべりなしの条件となるものである<sup>15)</sup>。流体の物性値は Chen が自身の理論解の適用性を確認するためにに行った実験で用いられた値である。図-4 に円柱の変位に伴うメッシュの変形パターンを示す (変位を誇張して図示している)。外周での節点変位をゼロとし、外周と円柱表面との間で節点の変位量を線形に変化させている (各節点の変位はいずれも  $x$  方向成分のみとした)。このパターンの場合、節点の移動速度も外周と円柱表面との間で線形に変化する。

円柱に与えた振動は、微小変位の理論解と比較するために、円柱の直径の  $1/100$  の振幅とした。すなわち、

$$x_s = a \sin \omega t = 0.01 d_1 \sin \omega t \dots\dots\dots (29)$$

ただし、図-5 に示すように、初期条件として変位、速度、加速度のいずれもがゼロの状態から解析を開始し、1 周期分の立ち上げ区間を経た後に式(29)の変位曲線に接続するような変位と速度の時刻歴を設定している。

$d_2/d_1$  が 3 と 5 のそれぞれの場合について、次式：

$$R_\omega = \frac{\omega d_1^2}{\nu} \dots\dots\dots (30)$$

で与えられる無次元振動数  $R_\omega$  が 200 と 2000 の 2 ケー

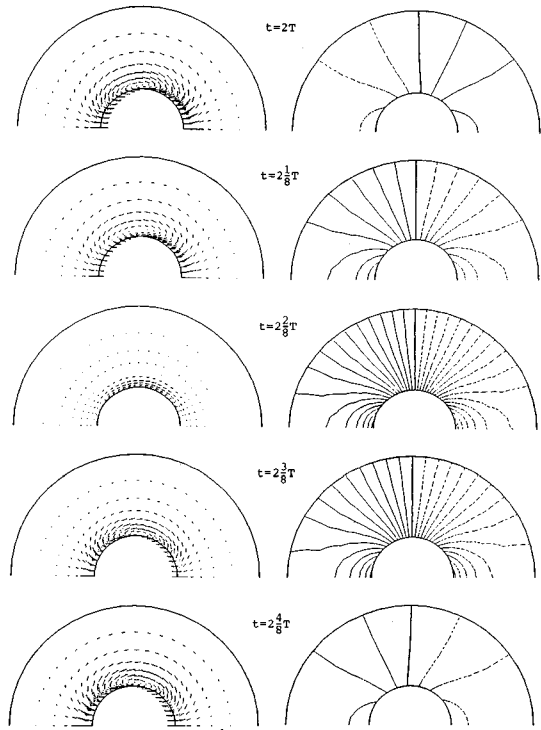


図-6  $d_2/d_1=3$ ,  $R_\omega=200$  の場合の流速分布, 圧力分布の半周期間の変化 (等圧力線図の実線は正圧, 破線は負圧)

スずつの解析を行った。積分時間間隔  $\Delta t$  はいずれの場合も振動周期の  $1/800$  とした。

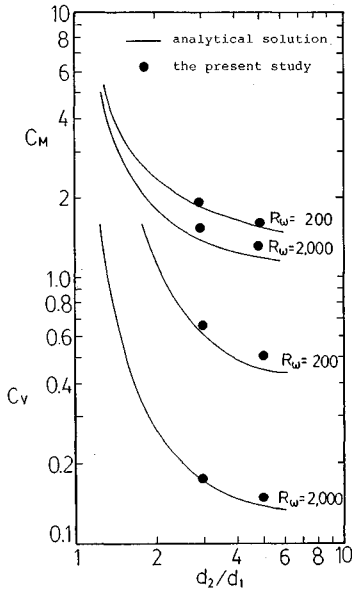
解析の結果得られた流速ベクトル分布、等圧力線分布の一例として、 $d_2/d_1=3$ ,  $R_\omega=200$  の場合の半周期間の変化を図-6 に示す。

付加質量係数  $C_M$  と付加減衰係数  $C_V$  は、円柱に作用する振動方向の流体力の時刻歴を求め、円柱に与えた振動変位との位相差から評価した。すなわち次式(31)によって算出している。

$$F_D = C_M M U \omega \sin \omega t - C_V M U \omega \cos \omega t \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 $F_D$  は円柱表面の節点力  $F'$  の振動方向 ( $x$  方向) 成分の総和、 $M = \rho \pi d_1^2 / 4$  は円柱が排除する流体の質量、および  $U = a \omega$  である。

このようにして求めた付加質量係数  $C_M$  と付加減衰係数  $C_V$  を、Chen らの理論解と比較した結果を図-7 に示す。図には示していないが、要素数を変えず、円柱近くの要素がより大きい解析モデルで解析を行うと、付加質量係数はあまり変化しないのに対し、付加減衰係数は理論値を大きく下回る結果となった。これは付加減衰力が



図一七 解析から得られた付加質量係数  $C_M$ 、付加減衰係数  $C_V$  と理論解<sup>14)</sup>との比較

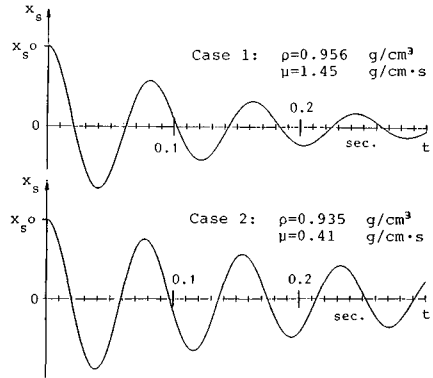
円柱側面の粘性せん断応力に起因する力であり、しかも応力の評価は流速の評価よりも要素分割の影響を受けやすいことによるものと考えられる。また、付加質量係数は無次元振動数が 2 000 のときは理論値との差が大きくなっており、もっと細かい要素分割が必要のようである。この検証解析は、対流項の影響のほとんどない領域での解析であるが、ALE 法に基づいて円柱の変位とともに有限要素を変形させる解析手法が、流体中で物体が振動する問題に適用し得ることを確認できる。

5. 静止流体中で自由振動する円柱周りの流れ

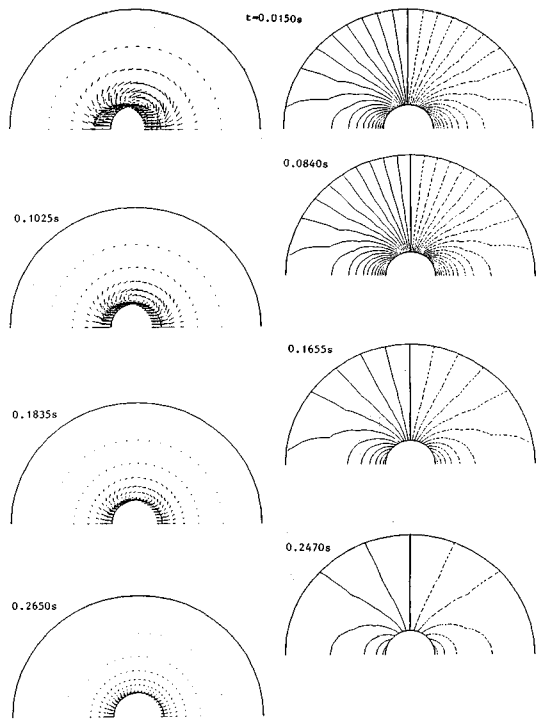
3.(2)で述べた、物体にばねとダッシュポットがついた問題の解析手法を検証するために、4.で示した  $d_2/d_1 = 5$  の解析モデルを用い、初期変位  $x_{s0} = 0.01d_1$  を与えた自由振動の計算を行った。Chen らが行った実験を参考にして、図一八に示したような密度・粘性係数を有する 2 種類の流体で解析した。円柱-ばね系の定数は、 $m_s = 3.41 g$ 、 $C_s = 0 g/s$ 、 $k_s = 3.46 \times 10^4 g/s^2$  である。用いた積分時間間隔  $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$  秒は円柱の固有周期の 1/1 200 に相当する。

2 ケースの解析によって得られた円柱変位の時刻歴を図一八に示す。流体の粘性の大きい方がより早く減衰していく様子が示されている。また、図一九は流速分布と等圧力線分布の例である。時間の経過とともに流速ベクトルの大きさと圧力勾配が減少している。

次に、本解析で得られた円柱変位が、付加質量係数



図一八 円形領域内で自由振動する円柱の変位の時刻歴

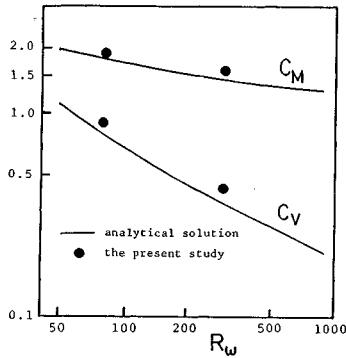


図一九 円形領域内で自由振動する円柱の流速分布、圧力分析の推移 (Case 1)

$C_M$ 、付加減衰係数  $C_V$  とを含んだ次式

$$(m_s + C_M M) \ddot{x}_s + (c_s + C_V M \omega) \dot{x}_s + k_s x_s = 0 \quad \dots (32)$$

で表わされる 1 自由度系の自由振動の変位であるものとして、 $C_M$ 、 $C_V$  および無次元振動数  $R_\omega$  を算出し、Chen らの理論解<sup>14)</sup>と比較した(図一十). 4.で示した強制振動の解析と同様に、やや大きめであるが理論値に近い値が得られている。

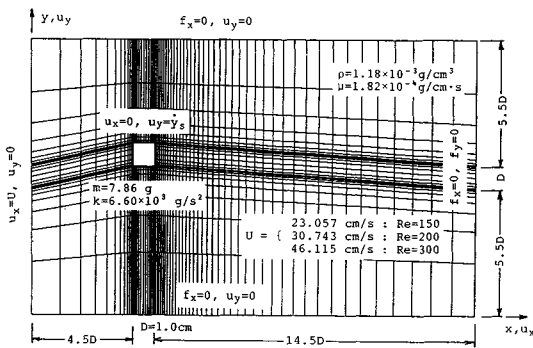


図一〇 円形領域内で自由振動する円柱の解析から得られた付加質量係数 $C_M$ と付加減衰係数 $C_V$ の理論解<sup>14)</sup>との比較

### 6. 一様流中で弾性支持された正方形角柱の応答

3.(2)に示した解析手法を用いて、一様流中に置かれた正方形角柱がカルマン渦によって流れに直角方向に振動する問題を解析した。この解析の目的は、流体が領域から流出する境界と、時間とともに位置を変える境界とが混在する問題に対してALE法が適用できるかどうかを検討することにある。ここでは、時間積分法としてBTD法を用いている(付録2参照)。

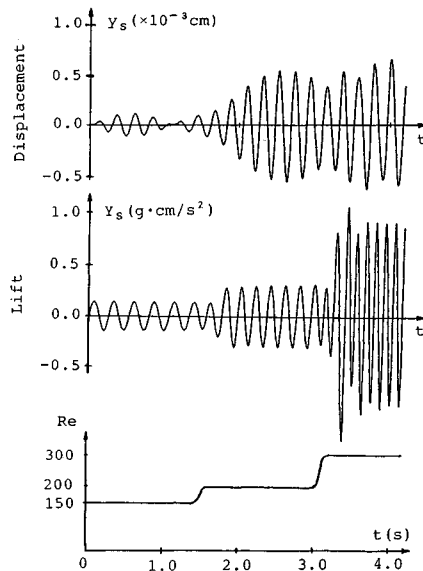
図一〇に解析に用いた境界条件と要素分割( $y$ 方向に単位長さの変位を与えたときの変形パターン)および諸定数を示す。レイノルズ数が150, 200, 300の3ケースの解析を行った。静止角柱に関する岡島らの実験<sup>16)</sup>および予備的な解析によれば、このレイノルズ数の範囲ではストローハル数が0.14ないし0.15程度ではば一定である。そこで角柱の固有周期をレイノルズ数200のカルマン渦発生周期と等しく設定し、レイノルズ数の違いによ



図一〇 一様流中で弾性支持された正方形角柱の応答の解析に用いた要素の変形パターンと諸条件(変形は強調してある)

る応答の変化を求めた。積分時間間隔 $\Delta t$ は角柱の固有周期の約1/1000に当たる $2 \times 10^{-4}$ 秒とした。なお、後述の解析結果に示されるように、ここで与えた計算条件では、応答変位の値は角柱の辺長のたかだか1/1000であり、解析結果に及ぼす有限要素のゆがみの影響はほとんどないものと考えられる。

図一〇に、境界条件として与えた上流流速の時刻歴すなわちレイノルズ数の時刻歴とともに、得られた応答変位と角柱に作用している揚力の時刻歴を示す。レイノルズ数を大きくしていくに従って揚力変動の振幅が増大していくのに対し、応答変位の振幅は揚力の振幅に比例せず、設定した解析条件から予期されるようにレイノルズ数が200のときに大きな振幅が得られている。表一に解析結果から得られた応答変位の周期と揚力の周期を示す。また、図一〇はおのこのレイノルズ数において揚力がゼロとなる瞬間の流速ベクトルと等圧力線の分布を無次元化して示したものである。



図一〇 応答変位、揚力および上流境界に与えた流速の時刻歴

表一 応答変位および揚力の周期(秒)

Re	応答変位の周期	揚力の周期
150	0.241	0.271
200	0.208	0.195
300	0.208	0.127

角柱の固有周期 0.217s



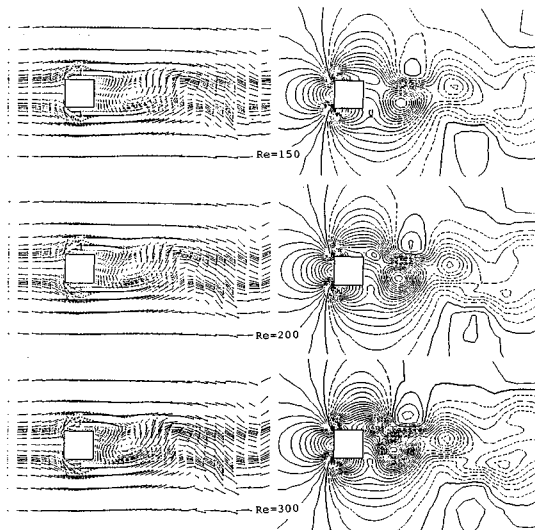


図-13 揚力がゼロとなる時の無次元流速および無次元圧力の分布

7. おわりに

非圧縮性粘性流体とばね支持された剛体との連成運動の問題の解析手法を、ALE法により記述された流体の運動方程式と有限要素法とに基づいて構成し、数値解析例を通じてこの解析手法の適用性を検討した。基本となる流体系・構造系の有限要素方程式において、流体と物体との境界における力と速度の対応関係を明確にし、未知量を消去することにより、解析手法を導出している。

検証解析として静止流体中に置かれた円柱の強制振動および自由振動の問題の解析を行い、付加質量係数と付加減衰係数を理論解と比較し、要素分割に注意すれば理論解に近い解を得ることができることを確認した。解析例としては円柱だけを取り上げたが、有限要素解析であるためデータを作成すればさまざまな断面形状について付加質量係数、付加減衰係数を評価することができるものと考えられる。また、一様流中で弾性支持された正方形角柱の振動問題の解析では、解析対象領域に流体が流入し流出する問題に対しても構成した解析手法が適用できることを確認した。

本研究では、粘性流体と物体との連成振動の問題に、ALE法が適用可能であるかどうかを主眼としたため、流体系・構造系の運動方程式の時間積分には、最も簡潔で計算量も少ない陽的な公式を採用した。その結果、安定して計算が進められる積分時間間隔に関する制約がかなり厳しくなっている。積分公式により安定性の高い公式を採用することと、要素係数マトリックスをステップごとに作成し直す過程の効率化を図ることにより、より高いレイノルズ数の流れに適用可能な解析法を開発するこ

とが今後の課題である。

付録1 変換マトリックス  $T_0$

図-A・1に示すように、物体の変位  $x_s=0$  のときの物体表面  $\Gamma_{ub}$  上の節点  $i(i=1, R)$  の座標を  $y_{i0}^T = \langle x_{i0} \ y_{i0} \rangle$  とし、節点  $i$  の節点力成分を  $f_i^T = \langle f_{x_i} \ f_{y_i} \rangle$  とする。このとき、節点力と、物体重心に作用する合力  $f_s^T = \langle X_s \ Y_s \ M_s \rangle$  との関係式(13)の内容は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} X_s \\ Y_s \\ M_s \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -L_{y_1} & L_{x_1} & -L_{y_i} & L_{x_i} & -L_{y_R} & L_{x_R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ \vdots \\ f_{x_i} \\ f_{y_i} \\ \vdots \\ f_{x_R} \\ f_{y_R} \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (A \cdot 1)$$

ここで：

$$\begin{Bmatrix} L_{x_i} \\ L_{y_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_s & -\sin \theta_s \\ \sin \theta_s & \cos \theta_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (A \cdot 2)$$

式(12)も同様にして得ることができる。

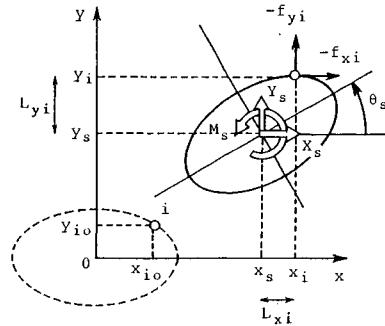


図-A・1 剛体表面上の節点の座標・節点力と剛体中心の変位・力との関係

付録2 BTD法による解析過程

BTD法は、移流項を有する方程式の時間微分項に、オイラー前進差分公式よりさらに1次高次の2次の項まで考慮した近似をする<sup>13)</sup>。すなわち、スカラー変数  $\phi$  に関する純移流問題の微分方程式を例にとれば、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0 \quad \dots \dots \dots (A \cdot 3)$$

この時間微分項を次のように近似する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t_n} = \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|_{t_n} \quad \dots \dots \dots (A \cdot 4)$$

この右辺第2項に元の微分方程式(A・3)を代入し、主要な項だけ考慮すると、次のように移流速度成分  $u_1$ ,

$u_2$  を係数とする疑似拡散項による近似が得られる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t_n} = \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( u_1^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_1 u_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( u_2 u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_2^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \right) \Big|_{t_n} \dots \dots (A \cdot 5)$$

この近似を ALE 法によって記述されたナビエ・ストークス方程式(2)に適用すると、本来の粘性項に式(A・5)の形の疑似粘性項が付加されるので、式(6)の代わりに次のような有限要素方程式から始めれば、後の展開がそのまま適用できる。

$$M\dot{u} + K_a(u-v)u + \tilde{K}_\mu(u)u + K_p p = f \dots \dots (A \cdot 6)$$

ここで、 $\tilde{K}_\mu(u)$  は、式(A・5)に示した疑似粘性と式(4)の粘性係数からなるマトリックスで、節点流速  $u$  に依存している。

#### 参 考 文 献

- 1) 大坪英臣：流体-構造相関問題，数理科学，No. 282，pp. 36~43，1986.
- 2) Pattani, P.G. and Olson, M.D.: Forces on Oscillating Bodies in Viscous Fluid, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 8, pp. 519~536, 1988.
- 3) Hirt, C.W., Amsden, A.A and Cook, J.L.: An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds, J. Comp. Phys., Vol. 14, pp. 227~253, 1974.
- 4) Pracht, W.E.: Calculating Three-Dimensional Fluid Flows at All Speeds with an Eulerian Computing Mesh, J. Comp. Phys., Vol. 17, pp. 132~159, 1975.
- 5) Ogawa, S. and Ishiguro, T.: A Method for Calculating Flow Fields Around Moving Bodies, Technical Report of National Aerospace Laboratory, pp. 1~21, 1985.
- 6) Hughes, T.J.R., Liu, W.K. and Zimmermann, T.K.: Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation for Incompressible Viscous Flows, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 29, pp. 329~349, 1981.
- 7) Ramaswamy, B. and Kawahara, M.: Arbitrary Lagrangian Finite Element Method for the Analysis of Free Surface Fluid Flows, Computational Mechanics '86 (eds. Yagawa, G. and Atluri, S.N.), Springer-Verlag, Vol. 2, VII-103~108, 1986.
- 8) Donea, J., Giuliani, S. and Halleux, J.P.: An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element for Transient Dynamic Fluid-Structure Interactions, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 33, pp. 689~723, 1982.
- 9) Belytschko, T. and Flanagan, D.P.: Finite Element Methods with User-controlled Meshes for Fluid-Structure Interaction, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 33, pp. 669~688, 1982.
- 10) Huerta, A. and Liu, W.K.: Viscous Flow Structure Interaction, Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technology, Vol. 110, pp. 15~21, 1988.
- 11) 平野廣和・川原睦人：有限要素法による流れと構造物の振動連成問題の解析，日科技連，第7回流体力学における数値解析法シンポジウム，pp. 189~196，1986.
- 12) 西村敏雄・登坂宣好・近藤典夫：非圧縮性流れと弾性シェルの相互作用に関する数値シミュレーション，日本建築学会構造系論文報告集，第393号，pp. 128~136，1988.
- 13) Gresho, P.M., Chan, S.T., Lee, R.L. and Upson, C.G.: A Modified Finite Element Method for Solving the Time-dependent Incompressible Navier-Stokes Equations, Part 1: Theory, Part 2: Applications, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 4, pp. 557~598, 614~640, 1984.
- 14) Chen, S.S., Wambsganss, M.W. and Jendrzeczyk, J. A.: Added Mass and Damping of a Vibrating Rod in Confined Viscous Fluid, Trans. of ASME, J. of Appl. Mech., pp. 325~329, 1976.
- 15) 吉田 裕・野村卓史：矩形キャビティ内流れ問題の解析における境界条件に関する一考察，土木学会論文報告集，第342号，pp. 125~134，1984.
- 16) 岡島 厚・杉谷賢一郎：矩形柱周りの流れ，九州大学応用力学研究所所報，No. 53，pp. 65~89，1979.

(1989. 6. 12・受付)