

多格間平板構造の一解法

A METHOD OF ANALYSIS OF MULTI-PANEL PLATE STRUCTURE

岡村 宏一*・石川 一美**・古市 亨***

By Hirokazu OKAMURA, Kazumi ISHIKAWA and Tohru FURUICHI

In this paper, a stiffness method using a large-size plate elements covering one panel is applied for the three dimensional analysis of composite structures of plate and grillage. A method proposed here starts with the presentation of large rectangular plate element with all edges which are able to afford arbitrary displacements and forces. The stiffness matrices of each element are derived by the combination of analytical method and numerical method (point-matching method), and afterwards a block element transversely connected is made using a direct stiffness procedure. In addition, a relaxation technique is also used for jointing the block elements in longitudinal direction. The employment of such a relaxation technique permits to analysis of multi-panel plate structures by a small computer irrespective of the number of block elements. Numerical examples prove high precision of elements and usefulness of the presented method.

Keywords: plate structure, elastic analysis, large-size element, relaxation method

1. ま え が き

構造物には、平板構造の範疇に入るものがしばしば見受けられる。一般に平板構造は、縦横に区分された多くのパネルによって構成され、それらのパネルは、たとえばはり部材などとの偏心結合によって、面内ならびに面外の変形を同時に生ずることが多い。近年、このような平板構造の変位法による解析には、有限要素法が有力な手段として用いられる傾向にある。しかしながら、多数の大形パネルが2方向に連続するような大規模な平板構造を、通常の有限要素法によって解析しようとするれば、大容量の計算が必要となり、計算費用、あるいは精度の点で実用上の制約を受ける。そこで、このような解析上の難点を克服するための工夫として、解析モデルの離散化にあたって、大形の平板要素を採択することや、全体の解式を構成するにあたって、リラクゼーション法に属する方法を用いることが考えられる^{7),8)}。

従来、平板構造の解析において大形の平板要素を導入

した例として、解析解(級数解)を変位関数に用いた要素の剛性マトリックスに関する研究がある。このうち、Deanらは、Levy解を変位関数に用いた要素を提案している¹⁾。しかし、この要素を用いる場合、構造解析における要素の分割は一方向のみに限定され、中間の補剛条件などに対応できない。そのほか Gutkowskiらは、彼らが Finite panel method とよぶ手法において、Levy解を2方向に重ねた変位関数を用いた要素を提案している²⁾。この要素は2方向の要素分割が可能であるが、変位関数の性格上、パネルの隅角点の変位を許容することができず、応用例も縦横のはりで剛支持された多格間平板の曲げ問題にとどまっている。また、同系統の研究で Golleyらが提案した要素³⁾も、隅角点の変位を許容できない。

一方、有限帯板法は、前述の有限要素法の欠点を緩和するために開発された手法である⁴⁾。有限帯板は、変位関数を長手方向に級数展開しているため、通常有限要素に比べれば大形の要素である。従来、有限帯板は一方向分割の要素として扱われてきたが、最近では、中間の補剛や支承条件を導入できるように、要素の適用範囲を拡張したものもある^{5),6)}。しかし、有限帯板の変位関数は、幅方向には代数関数を仮定することから出発しており、たとえば、集中的な荷重による断面力などを問題にする

* 正会員 工博 大阪工業大学教授 土木工学科
(〒535 大阪市旭区大宮 5-16-1)

** 正会員 東洋技研コンサルタント(株)研究室
(〒543 大阪市天王寺区悲田院町 8-11)

*** 学生会員 工修 大阪工業大学大学院 土木工学専攻
(〒535 大阪市旭区大宮 5-16-1)

場合には、パネルを幅方向に細分割することを余儀なくされるきらいがある。

さて、著者はすでに多径間平板構造の解析において、1径間にわたるような大形、かつ高精度の一方向長方形平板要素の剛性マトリックスを提案した⁷⁾。

本論文ではまず、上述の要素の機能を板とはりで構成される多格間平板構造の解析に応用できるように拡張し、1パネルにわたるような大形、かつ高精度の長方形板要素を提案する。この要素は隅角点を含めた4辺に、任意の材端力と材端変位を与えることのできる2方向の要素である。要素の剛性方程式は、級数解法と選点法を組み合わせた方法によって構成される。すなわち、要素の変位関数を要素の内点の支配方程式を満足する級数解によって与え、周辺の材端条件のみを級数解法と選点法を併用して与える。しかも要素の変位関数は、一方向無限板に部分線荷重が作用する場合の、比較的簡単な単級数の解の重ね合わせによって与えられる。

次に、著者は前論文において^{7),8)}、大形の平板要素を多径間にわたり剛性法によって接続する全体系の解析に、選点法とリラクゼーション法に属する1種の分配法を導入した。本論文ではこの方法を、大形の平板要素を多格間にわたり、2方向に接続できるように拡張する。このためにまず、幅方向に一列に並んだ板とはりの要素を直接剛性法によって接続し、1つのブロック要素を作成する。次に、それぞれのブロック要素の長手方向の接続を選点法とリラクゼーション法に属する一種の分配法を併用して行う。結果的に、構造全体の解析の過程で必要な自由度の数は、長手方向における1つの節線上の選点の材端変位のものみに通減される。したがって本解法は、長大な多格間平板構造の全体、ならびに局所の挙動を同時に、かつ実用的に解析することができる。また、この種の解析においては初期の概算値の導入が要点となるが、本解析では概算値として、幅方向に平均化された簡単なはり理論による解を用いる。概算値は分配計算によって修正され、その結果は平板構造の挙動を全域にわたって詳細に評価できるものとなる。

論文の後半では、解法の精度を確認する具体的な例題を示し、著者がすでに文献7)に示した多径間平板構造の解析手法が、これを2方向に拡張して多格間平板構造の解析に適用した場合にも有用であることを検証した。

2. 長方形大形平板要素の剛性方程式

(1) 曲げを受ける平板要素の基礎方程式と基本解

要素の弾性変形は等方性薄板理論に従うものとし、境界条件に Kirchhoff の仮定を導入する。この場合、曲げを受ける長方形板要素の基礎方程式、ならびに必要な変位と断面力の諸式は次のとおりである。

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y) \dots\dots\dots (1)$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ R &= 2 M_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} \\ V_y &= -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 w ：たわみ、 θ_x, θ_y ：たわみ角の成分、 M_x, M_y, M_{xy} ：モーメントの成分、 R ：隅角点の拘束力、 V_x, V_y ：換算せん断力の成分、 $q(x, y)$ ：板内荷重、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 E, ν ：ヤング率、ポアソン比、 h ：板厚

ここでまず、式(1)の解として、図-1(b), (c), (d)に示すように、相対2辺単純支持の一方向無限板が、板内に部分線荷重(強さ p_r, \bar{p}_r)、部分線モーメント(強さ m_r, \bar{m}_r)、ならびに部分等分布荷重(強さ q)を受ける場合のそれぞれのたわみを求める。しかもこれらのたわみは、図-1(a)に示す集中荷重 P_r を受ける場合のたわみを積分、または、偶力について微分することにより、比較的簡単な単級数の形で与えることができる。

最初に、図-1(a)に示すような座標 X, Y に支配される Y 方向無限板を考え、 X 軸上の任意点 X_r に面外からの集中荷重 P_r を受ける場合のたわみ $w_p(Y \geq 0)$ を、式(1)の同次解によって次のように与える。

$$w_p = \sum_n (A_n e^{-mY} + B_n m Y e^{-mY}) \sin mx \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $m = n\pi/l, n=1, 2, 3, \dots$

式(5)中の未定定数 A_n, B_n は、 X 軸で分割される領域 I, II のたわみの対称条件、ならびに X 軸における力のつり合い条件によって定まり、次のようになる。

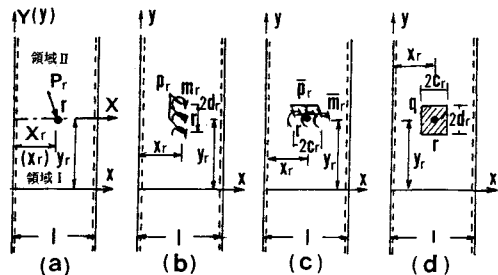


図-1 基本解を求めるための一方向無限板

$$w_p = P_r \cdot F_p \dots\dots\dots (6)$$

$$F_p = \frac{l^2}{2D\pi^3} \sum_n \frac{1}{n^3} (1+mY)e^{-mY} \sin mX_r \sin mX \dots\dots\dots (7)$$

次に、同図にみるような座標軸 x, y を考えて座標変換を行い、任意点 (x_r, y_r) に集中荷重 P_r を受ける場合のたわみを式 (6) の w_p で表わす。この場合、式 (7) の X_r, X は x_r, x に、 Y は領域 I, II において、それぞれ $y_r - y, y - y_r$ に書き換えられる。

そこで、図-1(b) に示すような、 y 方向の分布幅 $2d_r$ をもつ部分線荷重 (強さ p_r) を受ける場合のたわみを w_p 、同図 (c) に示すような、 x 方向の分布幅 $2c_r$ をもつ部分線荷重 (強さ \bar{p}_r) を受ける場合のたわみを $w_{\bar{p}}$ とする。これらのたわみは、前述の集中荷重を受ける場合のたわみを分布幅に関して積分すれば、

$$w_p = p_r \cdot E_p, \quad w_{\bar{p}} = \bar{p}_r \cdot E_{\bar{p}} \dots\dots\dots (8)$$

$$E_p = \frac{l^3}{2\pi^4 D} \sum_n \frac{1}{n^4} \{K + H_1(2+mY_1)e^{-mY_1} + H_2(2+mY_2)e^{-mY_2}\} \sin mx_r \sin mx \dots\dots\dots (9)$$

$$E_{\bar{p}} = \frac{l^3}{\pi^4 D} \sum_n \frac{1}{n^4} (1+mY)e^{-mY} \sin mx_r \cdot \sin mc_r \sin mx \dots\dots\dots (10)$$

式 (9) 中の K, H_1, H_2, Y_1, Y_2 は着目点の位置 y によって表-1 のように与えられる。式 (12), (15) についても同様である。式 (10) の Y は、 $0 \leq y \leq y_r$ の領域では $Y = y_r - y$ 、 $y_r \leq y$ の領域では $Y = y - y_r$ となる。次に、図-1(b) に示すような、 y 方向に分布幅 $2d_r$ をもつ部分線モーメント (強さ m_r) を受ける場合のたわみを w_m 、同図 (c) に示すような、 x 方向の分布幅 $2c_r$ をもつ部分線モーメント (強さ \bar{m}_r) を受ける場合のたわみを $w_{\bar{m}}$ とする。これらのたわみは、前述の線荷重を受ける場合のたわみにそれぞれ偶力による微分操作を加えると、

$$w_m = m_r E_m, \quad w_{\bar{m}} = \bar{m}_r E_{\bar{m}} \dots\dots\dots (11)$$

$$E_m = \frac{\partial E_p}{\partial x_r} = \frac{l^2}{2\pi^3 D} \sum_n \frac{1}{n^3} \{K + H_1(2+mY_1)e^{-mY_1} + H_2(2+mY_2)e^{-mY_2}\} \cos mx_r \sin mx \dots\dots\dots (12)$$

$$E_{\bar{m}} = \frac{\partial E_{\bar{p}}}{\partial y_r} = \frac{l}{\pi^2 D} \sum_n \frac{1}{n^2} Y e^{-mY} \sin mx_r \dots\dots\dots (13)$$

表-1

着目点(y)	Y_1	Y_2	K	H_1	H_2	H_3^*
$y_r + d_r \leq y$	$y - y_r - d_r$	$y - y_r + d_r$	0	1	-1	1
$y_r - d_r \leq y \leq y_r + d_r$	$y - y_r + d_r$	$y_r + d_r - y$	4	-1	-1	-1
$0 \leq y \leq y_r - d_r$	$y_r - d_r - y$	$y_r + d_r - y$	0	1	-1	1

* 2.(3) 式 (31) 参照

$$\cdot \sin mc_r \sin mx \dots\dots\dots (13)$$

ただし、式 (13) の $E_{\bar{m}}$ は $y_r \leq y$ の領域のもので、 $0 \leq y \leq y_r$ の領域では係数を $-l/\pi^2 D$ に書き換える。さらに、図-1(d) に示すような、部分等分布荷重 q を受ける場合のたわみ w_q は、前述の線荷重 p_r を受ける場合のたわみを x 方向の分布幅に関して積分すれば、

$$w_q = q \cdot E_q \dots\dots\dots (14)$$

$$E_q = \frac{l^4}{\pi^5 D} \sum_n \frac{1}{n^5} \{K + H_1(2+mY_1)e^{-mY_1} + H_2(2+mY_2)e^{-mY_2}\} \sin mx_r \sin mc_r \sin mx \dots\dots\dots (15)$$

以上のように、式 (8), (11), (14) によって与えられる $w_p, w_{\bar{p}}, w_m, w_{\bar{m}}, w_q$ を式 (2), (3), (4) に代入すれば、それぞれ荷重 $p_r, \bar{p}_r, m_r, \bar{m}_r, q$ を受ける場合のたわみ角、断面力に関する必要な諸式が得られる。これらの解は、あとで述べる板要素の剛性方程式を誘導する過程で、材端力と材端変位を結ぶ剛性マトリックス、ならびに荷重項のベクトルを求める影響係数を与える基本的なものである。しかもこれらの解は、解析の全般にわたる精度を考慮して単級数によって計算され、総和公式を併用して十分な収束値が保証される。

(2) 曲げを受ける平板要素の剛性方程式

剛性方程式を誘導する最初の過程として、図-2 に示すような、辺長 l, b の大形の板要素の領域を考える。また、その4辺 (以下、節線 i, j, \bar{i}, \bar{j} とよぶ) に相当する線上に任意の外力の分布を与え、隅角点を含めて任意の変位を生じさせる力系を組み立てる。ここで節線上に分布する任意の線荷重と線モーメントの分布を、先に発表した解法⁷⁾と同様に、節線上の細かく分割された区間で等分布する線荷重と線モーメントの重ね合わせによって与える。すなわち、図-2 に示すように、節線上の選点 (r, \bar{r}) を挟んでとった小区間 ($2d_r, 2c_r$) にそれぞれ図示の強さの線荷重と線モーメントを作用させる。このような板の力系は、図-3(a), (b), (c), (d) に示す4つの力系を重ね合わせて作り出すことができる。すなわち、同図 (a), (b) の板は、図-1(b) の板の辺長 l を2倍にしたもので、図 (a) はその左半分に着目し、

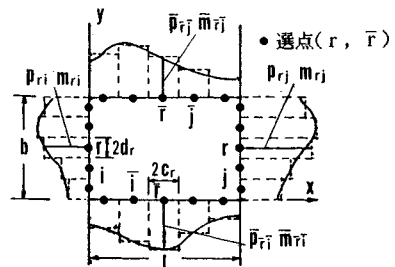


図-2 剛性方程式を求めるための外力の分布の近似

接線 j に相当する中央線上の選点 r を挟んで強さ $2p_{rj}$, $2m_{rj}$ の線荷重と線モーメントを作用させ、接線 j に自由な変位を与える。同様に図 (b) はその右半分に着目し、接線 i に相当する中央線上の選点 r を挟んで強さ $2p_{ri}$, $2m_{ri}$ の線荷重と線モーメントを作用させ、接線 i に自由な変位を与える。また、図 (c), (d) は、図-1(c) の板の接線 \bar{i} , \bar{j} に相当する線上の選点 \bar{r} を挟んで、それぞれ強さ $\bar{p}_{\bar{r}\bar{i}}$, $\bar{m}_{\bar{r}\bar{i}}$, ならびに $\bar{p}_{\bar{r}\bar{j}}$, $\bar{m}_{\bar{r}\bar{j}}$ の線荷重と線モーメントを作用させている。したがって、これらの力系を重ね合わせた図-2の板のたわみ w は、前節 (1) の基本解を用いて次のようになる。

$$w = 2 \sum_r (p_{ri} w_r^* + m_{ri} w_m^* + p_{rj} w_p^* + m_{rj} w_m^*) + \sum_{\bar{r}} (\bar{p}_{\bar{r}\bar{i}} w_{\bar{p}} + \bar{m}_{\bar{r}\bar{i}} w_{\bar{m}} + \bar{p}_{\bar{r}\bar{j}} w_{\bar{p}} + \bar{m}_{\bar{r}\bar{j}} w_{\bar{m}}) \dots (16)$$

ここで、*は、式 (9), (12) の w_p, w_m において、 l を $2l$ に、 x_r を l に書き換えたものを表わし、 r, \bar{r} に関する総和は、前述の分割区間における分布力の重ね合わせを表わす。さらに前節 (1) で説明した、たわみを式 (2), (3), (4) に代入して得られる基本解についても同様の重ね合わせを行えば、図-2の板の接線上の選点 r, \bar{r} の変位、断面力に関する必要な諸式が得られる。

以上の仮定から、図-4に示すような、接線 i, j, \bar{i}, \bar{j} の選点に、任意の材端力と材端変位をもつ大形の長方形板要素に対して、次の関係が得られる。

$$\{f_b\} = [A] \{P_b\} \dots (17)$$

$$\{\delta_b\} = [B] \{P_b\} \dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \{f_b\} &= [V_i \ M_i \ V_j \ M_j \ V_{\bar{i}} \ M_{\bar{i}} \ V_{\bar{j}} \ M_{\bar{j}}]^T \\ \{\delta_b\} &= [w_i \ \theta_i \ w_j \ \theta_j \ w_{\bar{i}} \ \theta_{\bar{i}} \ w_{\bar{j}} \ \theta_{\bar{j}}]^T \\ \{P_b\} &= [p_i \ m_i \ p_j \ m_j \ \bar{p}_{\bar{i}} \ \bar{m}_{\bar{i}} \ \bar{p}_{\bar{j}} \ \bar{m}_{\bar{j}}]^T \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

式 (19) 中、 V_i, M_i, V_j, M_j : 節線 i, j の各選点の V_x, M_x のベクトル、 $V_{\bar{i}}, M_{\bar{i}}, V_{\bar{j}}, M_{\bar{j}}$: 節線 \bar{i}, \bar{j} の各選点の

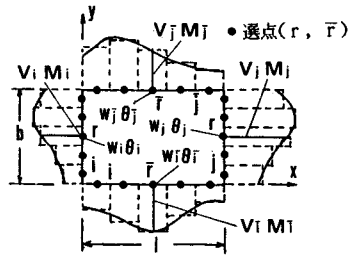


図-4 長方形平板要素と材端力の分布の近似

V_x, M_x のベクトル、 $w_i, \theta_i, w_j, \theta_j$: 節線 i, j の各選点の w, θ_x のベクトル、 $w_{\bar{i}}, \theta_{\bar{i}}, w_{\bar{j}}, \theta_{\bar{j}}$: 節線 \bar{i}, \bar{j} の各選点の w, θ_y のベクトル、 $p_i, m_i, p_j, m_j, \bar{p}_{\bar{i}}, \bar{m}_{\bar{i}}, \bar{p}_{\bar{j}}, \bar{m}_{\bar{j}}$: 図-2に示した各選点における節線荷重のベクトル、 $[A], [B]$: 式 (16), ならびにこれを式 (2), (3), (4) に代入して得られる解の各選点における値、すなわち影響係数のマトリックス。

$$\text{式 (17), (18) より節線荷重のベクトルを消去すると} \\ \{f_b\} = [A][B]^{-1} \{\delta_b\} = [K_b] \{\delta_b\} \dots (20)$$

ここで、 $[K_b]$ は、図-4に示されている曲げを受ける大形長方形板要素の剛性マトリックス。

一方、図-3(e) を参照すれば、板内荷重による節線 i, j, \bar{i}, \bar{j} の選点の変位と断面力は、前述のように式 (14) に基づいて求める。この変位を式 (20) の節線変位で相殺し、断面力を重ね合わせると荷重項のベクトルが得られる。すなわち

$$\{f_r\} = \{f_q\} - [K_b] \{\delta_b\} \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \{f_r\} &= [V_{ri} \ M_{ri} \ V_{rj} \ M_{rj} \ V_{r\bar{i}} \ M_{r\bar{i}} \ V_{r\bar{j}} \ M_{r\bar{j}}]^T \\ \{f_q\} &= [V_{qi} \ M_{qi} \ V_{qj} \ M_{qj} \ V_{q\bar{i}} \ M_{q\bar{i}} \ V_{q\bar{j}} \ M_{q\bar{j}}]^T \\ \{\delta_q\} &= [w_{qi} \ \theta_{qi} \ w_{qj} \ \theta_{qj} \ w_{q\bar{i}} \ \theta_{q\bar{i}} \ w_{q\bar{j}} \ \theta_{q\bar{j}}]^T \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

式 (22) 中、 $\{f_r\}$: 図-4に示されている板要素の節線の各選点における荷重項のベクトル、 $\{f_q\}$: 図-3(e) の板の板内荷重 q による各節線に相当する選点の断面力のベクトル、ただし M_{qi}, M_{qj} は 0、 $\{\delta_q\}$: 同様に変位のベクトル、ただし w_{qi}, w_{qj} は 0。

$$\text{式 (20) と (21) を組み合わせると、剛性方程式は} \\ \{f_r\} = [K_b] \{\delta_b\} + \{f_{ri}\} \dots (23)$$

なお、境界条件に Kirchhoff の仮定を導入しているため、以上の剛性方程式を誘導する過程で、図-4に示されている板要素の隅点に式 (3) で示される拘束力 R が残っている。これらは節線荷重および板内荷重に対して、式 (16), 式 (14) より材端力と同様に求められ、式 (20), (21), さらに (23) を求めるのと同様の操作により次の形の関係式を得る。

$$\{f_{ri}\} = [K_R] \{\delta_b\} + \{f_{ri}\} \dots (24)$$

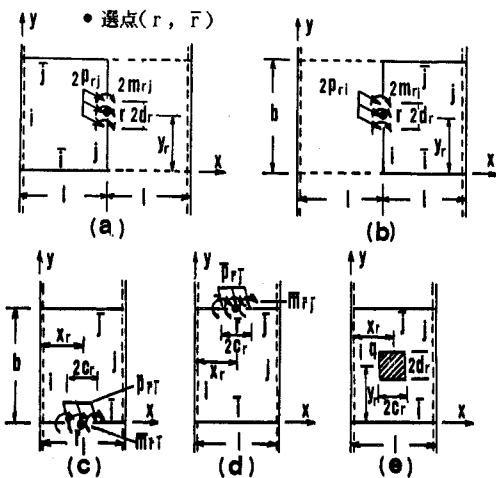


図-3 剛性方程式を求めるための一方無限板

$$\left. \begin{aligned} [f_{ni}] &= [R_i \ R_j]^T \\ [f_{nj}] &= [R_{ji} \ R_{jj}]^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

式 (25) 中, R_i, R_j : 節線 i, j の隅点における拘束力のベクトル, R_{ji}, R_{jj} : 同様に荷重項のベクトル.

(3) 面内力を受ける平板要素の基礎方程式と基本解

要素の弾性変形は等方性薄板理論に従うものとし, 応力関数を導入する. この場合, 面内力を受ける長方形板要素の基礎方程式, ならびに必要な変位と断面力の諸式は次のとおりである.

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots(26)$$

$$\left. \begin{aligned} N_x &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ &\dots\dots\dots(27) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{Eh} \int (N_x - \nu N_y) dx, \quad v = \frac{1}{Eh} \int (N_y - \nu N_x) dy \\ &\dots\dots\dots(28) \end{aligned} \right\}$$

ここで, ϕ : 応力関数, N_x, N_y, N_{xy} : 軸力およびせん断力の成分, u, v : x, y 方向の面内変位.

最初に, 図-5(a), (b) に示すような座標 X, Y に支配される Y 方向無限板 (シャイベ) を考え, X 軸上の任意点 X_r に面内の集中荷重 S_r, T_r を受ける場合の応力関数 $\phi_c (Y \geq 0)$ を, 式 (5) と同じ形の次式で与える.

$$\phi_c = \sum_n (A_n e^{-mY} + B_n m Y e^{-mY}) \sin mX \dots\dots\dots(29)$$

上式は, 図 (a) の T_r , ならびに図 (b) のつり合い系の S_r を受ける場合に, 無限板の相対 2 辺に $N_x=0, v=0$ の境界条件を与える. また, 2. (1) で説明した曲げを受ける板の場合と同様に, 式 (29) 中の未定定数 A_n, B_n を X 軸における境界条件によって定め, さらに, 同図の座標軸 x, y を考えて座標変換を行う.

そこで, 図-6(a) に示すような, y 方向の分布幅 $2d_r$ をもつ部分線荷重 (強さ t_r) を受ける場合の応力関数を ϕ_i , 同図 (b) に示すような, x 方向の部分幅 $2c_r$ をもつ部分線荷重 (強さ \bar{t}_r) を受ける場合の応力関数を $\phi_{\bar{i}}$ とする. これらは, 前述の集中荷重 T_r を受ける場合の ϕ_c を分布幅に関して積分すれば,

$$\phi_i = t_r G_i, \quad \phi_{\bar{i}} = \bar{t}_r G_{\bar{i}} \dots\dots\dots(30)$$

$$\left. \begin{aligned} G_i &= \frac{l^2}{2\pi^3} \sum_n \frac{1}{n^3} \left\{ (3+\nu) \left(\frac{K}{2} + H_3 e^{-mY_1} - H_1 e^{-mY_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu)m(H_3 Y_1 e^{-mY_1} - H_1 Y_2 e^{-mY_2}) \right\} \\ &\quad \cdot \sin mX_r \sin mX \dots\dots\dots(31) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} G_{\bar{i}} &= \frac{l^2}{\pi^3} \sum_n \frac{1}{n^3} \{ 2 + (1+\nu)mY \} e^{-mY} \sin mX_r \\ &\quad \cdot \sin mC_r \sin mX \dots\dots\dots(32) \end{aligned} \right\}$$

ただし, 式 (31) 中, K, H_1, H_3, Y_1, Y_2 は表-1 のように与えられる. 式 (34) についても同様である. また,

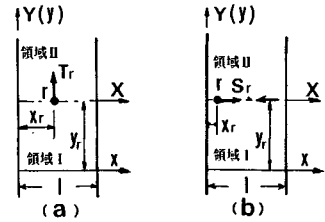


図-5 基本解を求めるための一方向無限板

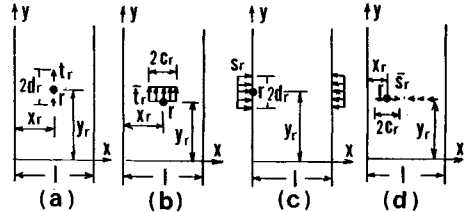


図-6 基本解のための一方向無限板

式 (32) の Y は, $0 \leq y \leq y_r$ の領域では $Y = y_r - y, y_r \leq y$ の領域では $Y = y - y_r$ となる.

次に, 図-6(c) に示すような, y 方向の分布幅 $2d_r$ をもつ部分線荷重 (強さ s_r) を相対 2 辺に受ける場合の応力関数 ϕ_s は, 図-5(b) のつり合い系の集中荷重 S_r を受ける場合の ϕ_c を分布幅に関して積分し $x_r=0$ とおけば,

$$\phi_s = s_r G_s \dots\dots\dots(33)$$

$$\left. \begin{aligned} G_s &= \frac{l^2}{2\pi^3} \sum_n \frac{1}{n^3} \{ \nu K + 2\nu(H_1 e^{-mY_1} - e^{-mY_2}) \\ &\quad + m(1+\nu)(H_1 Y_1 e^{-mY_1} - Y_2 e^{-mY_2}) \} \sin mx \\ &\dots\dots\dots(34) \end{aligned} \right\}$$

さらに, 図-6(d) に示すような, x 方向の分布幅 $2c_r$ をもつ部分線荷重 (強さ \bar{s}_r) を受ける場合の応力関数 $\phi_{\bar{s}}$ は, 図-5(b) の集中荷重 S_r を受ける場合の ϕ_c を分布幅に関して積分すれば,

$$\phi_{\bar{s}} = \bar{s}_r G_{\bar{s}} \dots\dots\dots(35)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{\bar{s}} &= \frac{l^2}{\pi^3} \sum_n \frac{1}{n^3} \{ (1-\nu) - (1+\nu)mY \} e^{-mY} \cos mX_r \\ &\quad \cdot \sin mC_r \sin mX \dots\dots\dots(36) \end{aligned} \right\}$$

以上のように, 式 (30), (33), (35) で与えられる $\phi_i, \phi_{\bar{i}}, \phi_s, \phi_{\bar{s}}$ を式 (27), (28) に代入すれば, それぞれ荷重 $t_r, \bar{t}_r, s_r, \bar{s}_r$ を受ける場合の断面力, 変位に関する基本解が得られる. なおこれらの解も, 曲げを受ける板要素の解と同様に, 十分な収束値が保証される.

(4) 面内力を受ける平板要素の剛性方程式

最初に, 図-7 に示すような, 曲げを受ける板要素 (図-2 参照) と同一の辺長, ならびに接線上の選点と分割区間をもつ大形の板要素 (シャイベ) の領域を考える. ここで, 接線に相当する線上に, 図のような分割された

外力の分布を与え、隅角点を含めて任意の変位を生じさせる力系を組み立てる。そのために、図-8(a), (b), (c), (d) に示すような4つの力系を重ね合わせる。これらの板は、図-6の該当する板の辺長 l を2倍にして重ね合わせたもので、それぞれの左半分、右半分に着目し、節線 i, j, \bar{i}, \bar{j} の各選点に外力の分布と自由な変位を与える。このような重ね合わせの方法は、前節(2)で説明した曲げを受ける板の場合と同様であるので詳細な記述は省略する。

したがって、図-7に示す板の応力関数 ϕ は、式(16)と同様に次のように表わされる。

$$\phi = 2 \sum_r (\bar{l}_{r1} G_r^* + \bar{l}_{rj} G_r^*) + \sum_r (s_{rj} G_r^* + s_{rj} G_r^*) + \sum_r (\bar{l}_{r1} G_r + \bar{s}_{r1} G_r + \bar{l}_{rj} G_r + \bar{s}_{rj} G_r) \dots (37)$$

また、前節(3)で説明した、応力関数を式(27), (28)に代入した基本解についても同様の重ね合わせを行えば、図-7の板の節線上の選点 r, \bar{r} の変位、断面力に関する諸式が得られる。

次に、以上の結果を用い、前節(2)で説明した式(17), (18) および (20) と同様の演算を行うと、図-9に示すような、節線 i, j, \bar{i}, \bar{j} の選点に、任意の材端力と材端変位をもつ面内力を受ける大形の長方形板要素の剛性方程式が次の形に得られる。

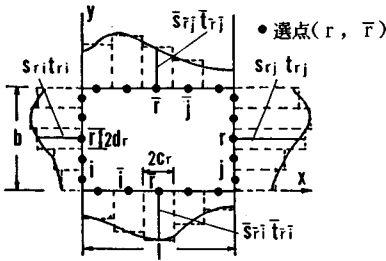


図-7 剛性方程式を求めるための外力の分布の近似

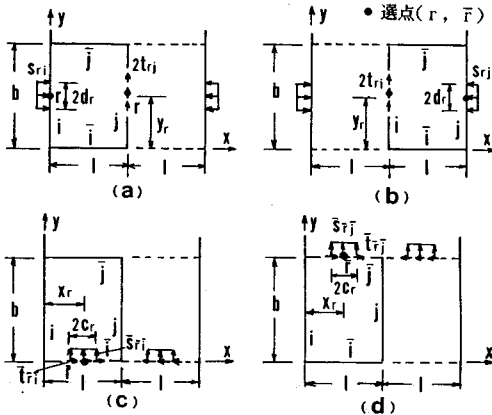


図-8 剛性方程式を求めるための一方無限板

$$\{f_e\} = [K_e] \{\delta_e\} \dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \{f_e\} &= [N_i \ T_i \ N_j \ T_j \ N_{\bar{i}} \ T_{\bar{i}} \ N_{\bar{j}} \ T_{\bar{j}}]^T \\ \{\delta_e\} &= [u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_{\bar{i}} \ v_{\bar{i}} \ u_{\bar{j}} \ v_{\bar{j}}]^T \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

式(39)中、 N_i, T_i, N_j, T_j : 節線 i, j の各選点の N_x, N_{xy} のベクトル, $N_{\bar{i}}, T_{\bar{i}}, N_{\bar{j}}, T_{\bar{j}}$: 節線 \bar{i}, \bar{j} の各選点の N_x, N_{xy} のベクトル, $\{\delta_e\}$: 節線の各選点における x, y 方向の変位のベクトル, $[K_e]$: 剛性マトリックス

(5) 曲げと面内力を受ける平板要素の剛性方程式

この場合の剛性方程式は、式(23)と(38)を重ね合わせ次の形に得られる。

$$\{f\} = [K] \{\delta\} + \{f_A\} \dots (40)$$

$$\left. \begin{aligned} \{f\} &= [f_b \ f_e]^T \\ \{\delta\} &= [\delta_b \ \delta_e]^T \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

また、 $[K]: [K_e]$ と $[K_e]$ を重ね合わせた剛性マトリックス, $\{f_A\}$: 荷重項のベクトルで、ここでは面外荷重 q によるもののみを考慮している。また、曲げによる隅角点の拘束力に関しては、式(24)が同時に考慮される。

3. はり要素の剛性方程式

ここでは、平板要素の節線 i, j, \bar{i}, \bar{j} において偏心結合するはり要素の面内変形を考える¹⁰⁾。一例として、図-10に板要素の x 方向の節線 \bar{i} と偏心距離 e をもち、変位については平面保持を仮定したはり要素 i, j を示す。ここで節線 \bar{i} には、図のように分割された不静定力(強さ p_r, \bar{i}_r) を分布させる。したがって、このようなはり要素の剛性方程式を、通常のはりのものに、上述の不静定力の影響を考慮し、次の形に与える。

$$\{f'\} = [K'] \{\delta'\} \dots (42)$$

$$\left. \begin{aligned} \{f'\} &= [N'_i \ V'_i \ M'_i \ N'_j \ V'_j \ M'_j \ V'_{\bar{i}} \ T'_{\bar{i}}]^T \\ \{\delta'\} &= [u'_i \ w'_i \ \theta'_i \ u'_j \ w'_j \ \theta'_j \ w_{\bar{i}} \ u_{\bar{i}}]^T \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

式(43)中、 $N'_i, V'_i, M'_i, N'_j, V'_j, M'_j$: 要素の軸線の両材端 i, j における軸力、せん断力、モーメント, $u'_i, w'_i, \theta'_i, u'_j, w'_j, \theta'_j$: 同様に材端変位, $V'_{\bar{i}}, T'_{\bar{i}}$: 節線 \bar{i} の位置での各選点の鉛直力、水平力のベクトル,

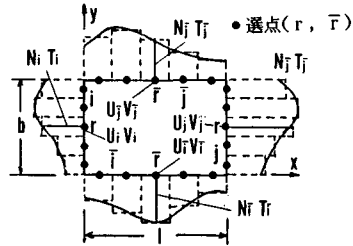


図-9 長方形平板要素と材端力の分布の近似

注1) 面外変形を合理的に評価するには折板構造解析が必要になる¹⁰⁾。

$w_{\bar{r}}, u_{\bar{r}}$: 同様に変位のベクトル, $[K]$: 剛性マトリックスで, この場合, 要素はすべて通常のはりの解析による代数関数で与えられる.

なお, 板要素の y 方向の節線 i, j と結合するはり要素についても同様の剛性方程式が得られる.

4. 幅方向のブロック要素の剛性方程式の作成とブロック要素を長手方向に接続するためのリラクセーション (材端力の分配) の方法

2. (2), (4), (5) で誘導した剛性方程式は1パネルにわたる大形平板要素に対するものであり, 通常の有限要素法などに比べて, 解析上必要な自由度の数を大幅に縮小させている. ここではさらに, 図-11(a) に示すような, 多数の大形平板要素が格子状のはりと偏心結合する長大な多格間平板構造を対象にし, その全体, ならびに局所の挙動を同時に解析できる1つの解法を提案する. この方法は, 選点法を併用する直接剛性法とリラクセーション法を組み合わせたもので, 結果的に解析上必要な自由度の数は, 図 (a) の長手 (x) 方向の1つの節線 k 上の板要素およびはり要素の材端変位のみに選減され, 構造物の長さやブロック要素の格間数に制約されない解析が可能になる.

(1) 幅 (y) 方向のブロック要素の剛性方程式

まず, 式 (40) に示した曲げと面内力を同時に受ける平板要素の剛性方程式を, 部分マトリックスを用いて次のように表わしておく.

$$\begin{Bmatrix} f_r \\ \dots \\ f_{\bar{r}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{r\bar{r}} \\ \dots & \dots \\ K_{\bar{r}r} & K_{\bar{r}\bar{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_r \\ \dots \\ \delta_{\bar{r}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{rr} \\ \dots \\ f_{\bar{r}\bar{r}} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(44)$$

ここで, f_r : 板要素の x 方向の相対する節線 i, j の選点 r に作用する材端力のベクトル, δ_r : 選点 r における材端変位のベクトル, f_{rr} : 面外荷重 q による選点 r における荷重項のベクトル, $f_{\bar{r}}$: 板要素の y 方向の相対する節線 \bar{i}, \bar{j} の選点 \bar{r} に作用する材端力のベクトル, $\delta_{\bar{r}}$: 選点 \bar{r} における材端変位のベクトル, $f_{\bar{r}\bar{r}}$: 面外荷重 q による選点 \bar{r} における荷重項ベクトル.

さらに, 式 (42) に示した偏心曲げと軸力を受ける x 方向のはり要素の剛性方程式を, 部分マトリックスを用いて, 次のように表わしておく.

$$\begin{Bmatrix} f'_r \\ \dots \\ f'_{\bar{r}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{rr} & K'_{r\bar{r}} \\ \dots & \dots \\ K'_{\bar{r}r} & K'_{\bar{r}\bar{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta'_r \\ \dots \\ \delta'_{\bar{r}} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(45)$$

ここで, f'_r : はり要素の x 方向の両材端点 i', j' に作用する材端力のベクトル, δ'_r : 点 i', j' における材端変位のベクトル, $f'_{\bar{r}}$: 板要素の節線 \bar{i} の位置での選点 \bar{r} に作用する不静定力のベクトル.

ここで, 図-11(a) に示す多格間平板構造の長手 (x)

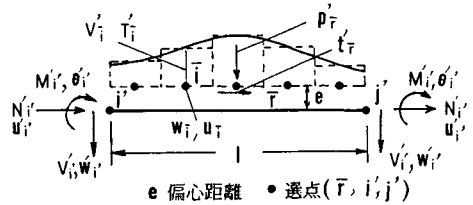


図-10 はり要素の材端力と不静定力の分布の近似

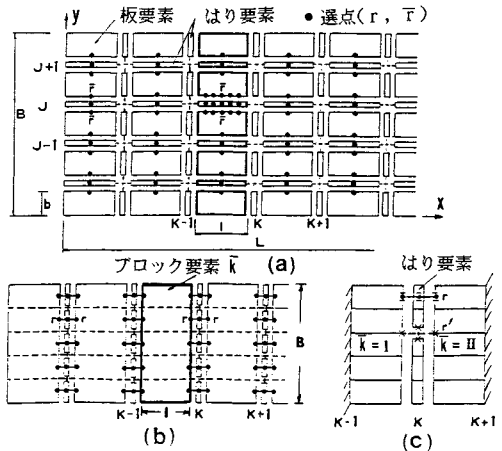


図-11 ブロック要素と選点において力の分配を受けるパネル

方向の節線 $k-1, k$ の間に挟まれ, 幅 (y) 方向に並列する板要素とはり要素のすべての節線 ($J-1, J, J+1$ などの) 選点 \bar{r} を直接剛性法によって接続すれば, 図(b) のような辺長 l, B の1つのブロック要素 \bar{k} が形成される. したがって, ブロック要素 \bar{k} 全体の節点方程式は, 式 (44), (45) より次のように書かれる.

$$\begin{Bmatrix} [K_{\bar{r}\bar{r}}]_{\bar{k}} \delta_{\bar{r}\bar{k}} + [K'_{\bar{r}\bar{r}}]_{\bar{k}} \delta'_{\bar{r}\bar{k}} + [K'_{\bar{r}\bar{r}} + K_{\bar{r}\bar{r}}]_{\bar{k}} \delta_{\bar{r}\bar{k}} \\ = [P_{\bar{r}} - f_{\bar{r}\bar{k}}]_{\bar{k}} \dots\dots\dots(46) \end{Bmatrix}$$

ここで, 添字 \bar{k} は, 式 (44), (45) において説明した板要素, およびはり要素の部分マトリックス, ならびに材端変位, 荷重項のベクトルをブロック要素全体について直接重ね合わせたことを意味する. なお, $P_{\bar{r}}$: はり要素の選点 \bar{r} に作用する外力のベクトル.

一方, 式 (44), (45) よりブロック要素 \bar{k} の節線 $k-1, k$ における板要素の選点 r の材端力, ならびにはり要素の節点 r' の材端力に関する次式が得られる.

$$[f'_{r\bar{k}}]_{\bar{k}} = [K_{rr}]_{\bar{k}} \delta_{r\bar{k}} + [K'_{rr}]_{\bar{k}} \delta'_{r\bar{k}} + [f_{rr}]_{\bar{k}} \dots\dots\dots(47)$$

$$[f'_{r\bar{k}}]_{\bar{k}} = [K'_{r'r}]_{\bar{k}} \delta'_{r\bar{k}} + [K'_{r'r}]_{\bar{k}} \delta_{r\bar{k}} \dots\dots\dots(48)$$

式 (46), (47), (48) より $\delta_{\bar{r}\bar{k}}$ を消去すれば図-11(b) に示すような長手 (x) 方向のブロック要素 \bar{k} の板要素の選点 r , ならびにはり要素の節点 r' の材端力に関する剛性方程式が次のように得られる.

$$[f'_{r\bar{k}}]_{\bar{k}} = [\bar{K}_{r\bar{k}}]_{\bar{k}} \delta_{r\bar{k}} + [\bar{K}'_{r\bar{k}}]_{\bar{k}} \delta'_{r\bar{k}} + [f'_{rr}]_{\bar{k}} \dots\dots\dots(49)$$

$$[f'_{r\bar{k}}]_{\bar{k}} = [\bar{K}'_{r\bar{k}}]_{\bar{k}} \delta_{r\bar{k}} + [\bar{K}_{r\bar{k}}]_{\bar{k}} \delta'_{r\bar{k}} + [f_{rr}]_{\bar{k}} \dots\dots\dots(50)$$

$$\left. \begin{aligned} [\bar{K}_{rr}]_{\bar{k}} &= [K_{rr} - K_{r\bar{r}} C^{-1} K_{\bar{r}r}]_{\bar{k}} \\ [\bar{K}'_{r\bar{r}}]_{\bar{k}} &= -[K_{r\bar{r}} C^{-1} K_{\bar{r}r}]_{\bar{k}} \\ [\bar{K}_{r\bar{r}}]_{\bar{k}} &= -[K'_{r\bar{r}} C^{-1} K_{\bar{r}r}]_{\bar{k}} \\ [\bar{K}'_{r\bar{r}}]_{\bar{k}} &= [K'_{r\bar{r}} - K'_{r\bar{r}} C^{-1} K_{\bar{r}r}]_{\bar{k}} \\ [\bar{f}_{r\bar{r}}]_{\bar{k}} &= [K_{r\bar{r}} C^{-1}]_{\bar{k}} - [P_{\bar{r}} - f_{r\bar{r}}]_{\bar{k}} + [f_{r\bar{r}}]_{\bar{k}} \\ [f_{r\bar{r}}]_{\bar{k}} &= [K'_{r\bar{r}} C^{-1}]_{\bar{k}} - [P_{\bar{r}} - f_{r\bar{r}}]_{\bar{k}} \\ C &= [K_{\bar{r}\bar{r}} + K'_{\bar{r}\bar{r}}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

(2) ブロック要素を長手(x)方向に接続するためのリラクセーション(材端力の分配)の方法

この方法は、すでに著者が文献7), 8)で提案した方法を格子ばりと偏心結合する長大な多格間平板構造に拡張したもので、紙数の都合でその要点のみを記述する。

最初に、概算値としての初期変位(たとえば、幅方向に平均化された簡単なはりの理論による解など)を導入すると、各ブロック要素の節線の選点には、その状態での材端力の不平衡を生ずる。そこで、着目する節線の横ばりによる支持条件、つり合い条件、変位の適合条件を考慮し、相対する節線を固定した状態で材端力を分配し、不平衡量を修正する。この操作を順次各節線に及ぼし、適当な収束値を得るまで反覆する。

いま、図-11(c)に示す2つのブロック要素 $\bar{k} = I$ (II)の節線 k に着目するとき、反覆回数 t 回の時点での板要素の選点 (r, k) に作用する材端力、はり要素の節点 (r', k) に作用する材端力、ならびに板要素から伝わる隅点の拘束力は、反覆回数 $t-1$ 回の時点でのそれらに修正量 Δ を付加することになる。結局、各ブロック要素の節線の選点における反覆 t 回の時点での材端変位、および材端力の修正量は次式で求まる。

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \delta_{rk} \\ \Delta \delta_{r'k} \end{aligned} \right\}^t = - \left[\begin{aligned} & \bar{K}_{r\bar{k}I} + \bar{K}_{r\bar{k}II} + K'_{Qrr} \\ & \bar{K}_{r'kI} + \bar{K}_{r'kII} + K_{RkI} + K_{RkII} \\ & \bar{K}'_{r\bar{k}I} + \bar{K}'_{r\bar{k}II} + K'_{Qrr} \\ & \bar{K}'_{r'kI} + \bar{K}'_{r'kII} + K_{r'k} \end{aligned} \right]^{t-1} \cdot \left\{ \begin{aligned} & f_{r\bar{k}I} + f_{r\bar{k}II} + f_{Qrk} - P_{rk} \\ & f'_{r'kI} + f'_{r'kII} + f'_{Qr'k} + f'_{Rr'kI} + f'_{Rr'kII} + P'_{r'k} \end{aligned} \right\}^{t-1} \dots\dots\dots (52)$$

$$\left\{ \begin{aligned} |\Delta f_{r\bar{k}I}|_{II} &= [\bar{K}_{r\bar{k}I}]_{II} |\Delta \delta_{rk}|^2 + [\bar{K}'_{r\bar{k}I}]_{II} |\Delta \delta_{r'k}|^2 \\ |\Delta f_{r\bar{k}II}|_{II} &= [\bar{K}_{r\bar{k}II}]_{II} |\Delta \delta_{rk}|^2 + [\bar{K}'_{r\bar{k}II}]_{II} |\Delta \delta_{r'k}|^2 \\ |\Delta f_{r\bar{k}+I}|_{II} &= [\bar{K}_{r\bar{k}+I}]_{II} |\Delta \delta_{rk}|^2 + [\bar{K}'_{r\bar{k}+I}]_{II} |\Delta \delta_{r'k}|^2 \\ |\Delta f'_{r'kI}|_{II} &= [\bar{K}'_{r'kI}]_{II} |\Delta \delta_{rk}|^2 + [\bar{K}_{r'kI}]_{II} |\Delta \delta_{r'k}|^2 \\ |\Delta f'_{r'kII}|_{II} &= [\bar{K}'_{r'kII}]_{II} |\Delta \delta_{rk}|^2 + [\bar{K}_{r'kII}]_{II} |\Delta \delta_{r'k}|^2 \\ |\Delta f'_{r'k+I}|_{II} &= [\bar{K}'_{r'k+I}]_{II} |\Delta \delta_{rk}|^2 + [\bar{K}_{r'k+I}]_{II} |\Delta \delta_{r'k}|^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

式(52)中、 f'_{Qrk} , $f_{Qr'k}$ は、横ばり Q の要素の上縁の選点 (r, k) に作用する不静定力、ならびに節点 (r', k) に作用する材端力のベクトル、 $f_{Rr'k}$ は、板要素から伝わる隅点の拘束力のベクトルを示す。また、 P_{rk} : 選点

(r, k) に作用する横ばりの荷重のベクトル、 $P'_{r'k}$: 弾性支点のある選点 (r', k) における反力のベクトル、 $K_{r'k}$: ばね行列

5. 数値解析例

はじめに、2.(2)で提示した曲げを受ける平板要素の適用性を調べる。そこで、図-12(a)のモデルIにみるような相対2辺が自由、他の2辺が単純支持された単一長方形板を、図(b)のように選点を配置した板要素を用いて6分割し、直接剛性法によって接続する。次に板要素の選点における材端変位、ならびに材端力の計算結果を、厳密解(板を分割しないで単一板として求めた有効数字6桁の収束値)と比較した。同様に、2.(4)で提示した面内力を受ける平板要素の剛性方程式の適用性を調べる。そこで、図(a)に示すモデルIIの板を、曲げの場合と同様に、図(b)のように選点を配置した板要素を用いて6分割し、直接剛性法で接続した計算結果を厳密解と比較した。図-13(a), (b)は、それぞれ図-12(a)のモデルI, IIに示した部分等分布荷重を受ける板について、本解析値と厳密解を比較したものであるが、図-12(b)に示した節線上の分割数 ($N=5, 7$)のいずれの場合でも、選点における本解析値と厳密解の誤差は1%以内にとどまっている。これらの結果は、2.(2), および2.(4)で提案した長方形大形平板要素の剛性方程式の有用性を保証するものといえる。

次に、前例において有用性を検証した平板要素を用いた多格間平板構造の解析を行った。ここでは、4.で提示した幅方向に構成されたブロック要素の剛性方程式の適用性、ならびにブロック要素を長手方向に接続するために用いたリラクセーション法による解の精度と収束性を調べる。計算例として、図-14(a)にみるような格子ばりと偏心合成された40パネルの板要素で構成される多格間平板構造を取り上げ、また、相対2辺 ($y=0, B$)の境界条件を単純支持、および自由とした2種類のモデルに等分布荷重を満載した場合について解析を行った。各要素の節線上の分割は前例の結果を参考にして、図(b)のように等5分割 ($N=5$)とした。また、各ブロック要素をリラクセーション法によって接続する際に、要素の節線 $\Delta \sim \Delta$ に導入した初期概算値は、幅方向に平均化したはりの解である。この場合、幅方向に配置されたはりの影響を無視し、単純に長手方向に配置されたTばりの剛度のみを用いている。

上述の2種類のモデルについて、ブロック要素の左端の節線 Δ から右端の Δ への移行を1回とするリラクセーションは、7回の反覆で有効数字3桁の収束をみた。

表-2にそれぞれのモデルの長手方向のA-A断面におけるたわみの計算結果を示している。表中、別解法と

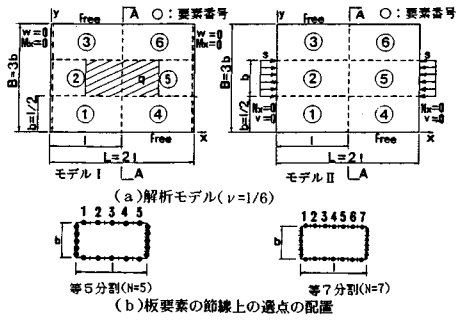


図-12 単一長方形板

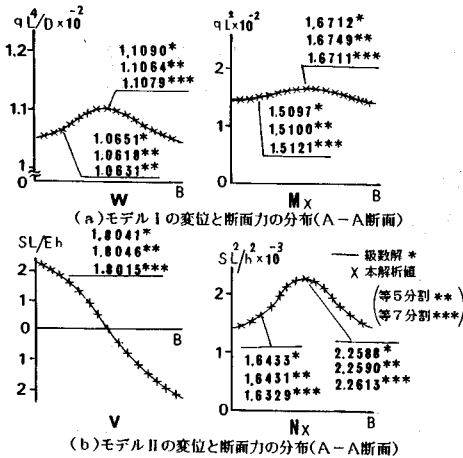


図-13 変位と断面力の分布

は、1つのブロック要素を、一方向直交異方性大形板要素¹¹⁾にモデル化して接続したものである。表にみるように、本解析値は別解法の値に近く、構造全体としての挙動を妥当性をもってとらえているものと判断できる。

一方、図-15(a), (b) には、それぞれ相対2辺 ($y=0, B$) を単純支持とした場合の C-C および A-A 断面におけるフランジプレートの局所的な曲げモーメントの分布を示している。この結果をみれば、はりで区分される板の境界は固定 (パネルにより4辺固定, 3辺固定1辺単純支持) に近い状態になっていることがわかる。同様に、図-16(a), (b) には、それぞれ相対2辺 ($y=0, B$) を自由とした場合の C-C, および A-A 断面のフランジプレートの曲げモーメントの分布を示しているが、この場合も板の境界は、パネルにより、4辺固定, 3辺固定1辺自由, 3辺固定1辺単純支持に近い状態になっていることがわかる。

なお、以上に示した2種類の平板構造の A-A 断面における構造全体としてのたわみ、ならびにフランジプレートの局所的な曲げモーメントの分布の対称性をみると、誤差はいずれも3%以内にとどまっており、リラクゼーションによる誤差の累積は、実用上の範囲では問

表-2

相対2辺 ($y=0, B$) 単純支持の場合									
着目点	1	2	3	4	5	6	7	8	9
本解析値	0.0	0.792	1.24	1.46	1.50	1.46	1.24	0.787	0.0
別解法の値	0.0	0.765	1.22	1.44	1.49	1.44	1.22	0.765	0.0
はりの概算値	0.0	36.1	66.2	86.1	93.0	86.1	66.2	36.1	0.0
相対2辺 ($y=0, B$) 自由の場合									
着目点	1	2	3	4	5	6	7	8	9
本解析値	0.0	3.81	6.87	8.88	9.52	8.92	6.85	3.79	0.0
別解法の値	0.0	3.67	6.75	8.76	9.46	8.76	6.75	3.67	0.0
はりの概算値	0.0	3.61	6.62	8.61	9.30	8.61	6.62	3.61	0.0

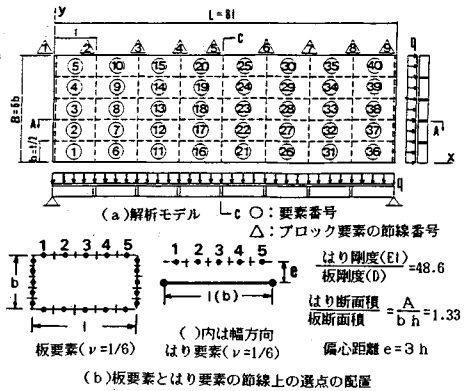


図-14 解析モデルと要素の分割

題にならないと考える。また、相対2辺 ($y=0, B$) の境界条件が顕著に異なる (単純支持と自由) にもかかわらず、初期概算値として導入したはりの解が、構造全体、ならびに局所のいずれについても同様の反復によって修正され、安定した解をもたらす点についても注目してほしいと思う。

6. まとめ

(1) 本解法で提示した1パネルにわたる大形の長方形板要素は、隅角点を含めた4辺に、曲げと面内力に対応する任意の材端力と材端変位を与え得る高精度のものである。これらの要素を2方向に接続し、部分等分布荷重を作用させたモデル [図-12(a)] の解析値と厳密解との差異は1%以内にとどまっている。しかも、これらの要素の剛性方程式は、一方向無限板を基本系とする比較的簡単な単級数の解を重ね合わせ、選点法によって作成されている。

(2) 本解法は、(1) に示した大形板要素を採択するとともに、格子ばりのような骨組と偏心合成する長大な多格間平板構造の解析において、幅方向に区分されたブロック要素の長手方向の接続には、リラクゼーション法に属する1種の分配法を用いる。結果的に本解法は、構造全体の解析に必要な自由度の数を、長手方向にお

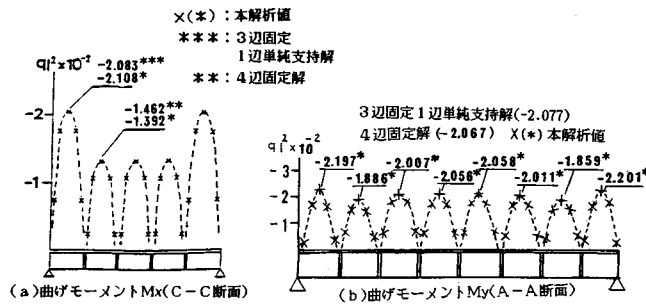


図-15 相対2辺 ($y=0, B$) を単純支持とした場合の断面力分布

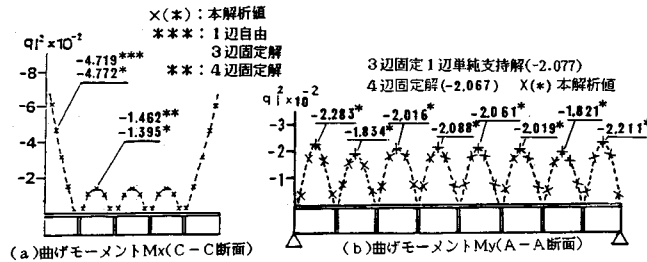


図-16 相対2辺 ($y=0, B$) を自由とした場合の断面力の分布

る1つの節線上の選点の材端変位のものみに遞減させる効果をもたらす。たとえば、本例題で扱った格子ばりと偏心合成する40パネルの2種類の多格間平板構造のモデル [図-14(a)の2辺 ($y=0, B$) が単純支持, 自由の場合] では, 必要な自由度の数は118となる。また, いずれの場合においても, リラクセーションは, 幅方向に平均化した簡単なはりの解を初期値とし, 7回の反復によって有効数字3桁の収束をみた。また, 解析値は構造全体, ならびにフランジプレートの局所的な挙動を同時に妥当性をもってとらえていると判断され, リラクセーションによる誤差の累積は, 実用上認められなかった。

以上のように本解法は, 高精度の大形要素の採択とリラクセーション法の併用により, 多格間平板構造の立体解析を, その規模にとらわれずに行うことを可能にする。また, ブロック要素を折板要素にすれば, 薄肉箱構造などの立体解析も可能であることを付記する¹⁰⁾。

参考文献

- 1) Dean, D.L. and Omidvaran, C. : Analysis of Ribbed plates, Proc. ASCE, Vol.95, No. ST3, pp. 411~440, 1969.
- 2) Gutkowski, R. M. and Wang, C. K. : Continuous Plate Analysis by Finite Panel Method, Proc. ASCE, Vol. 102, No. ST3, pp. 629~643, 1976.
- 3) Golley, B.W., Petrolite, J. and Hamstend, M. A. :

Finite panel for Static Analysis of Plates, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.114, No.10, pp. 2239~2253, 1988.

- 4) Cheung, Y. K. : Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon International Library, Oxford, New York, 1976.
- 5) 笹戸松二・林 正・持田淳一: 薄肉構造解析のための節点帯板法, 日本鋼構造協会第17回大会研究集会, マトリックス解析法研究発表論文集, pp. 203~208, 1983.
- 6) Puckett, J. A. and Gutkowski, R. M. : Compound Strip Method for Analysis of Plate Systems, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 112, No. 1, pp. 121~138, 1986.
- 7) 岡村宏一・石川一美: 小形計算機による多径間平板構造の解析, 土木学会論文集, 第344号/I-1, pp. 313~322, 1984.
- 8) 岡村宏一・石川一美: 多径間曲線平板構造の一解法, 土木学会論文集, 第374号/I-6, pp. 379~388, 1986.
- 9) 岡村宏一・石川一美・古市 亨: 多格間平板構造の立体解析におけるリラクセーション法の応用, 土木学会第41回年次学術講演会講演概要集, 1986.
- 10) 岡村宏一・石川一美・古市 亨: 大形平板要素による薄肉箱構造の立体解析, 土木学会第43回年次学術講演会講演概要集, 1988.
- 11) 石川一美・岡村宏一: 多径間折板構造の一致値解析法, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第10巻, pp. 152~157, 1986.

(1989. 5. 15・受付)