

## 面内波動問題時間領域型境界要素法の実用化に向けての一検討

A STUDY ON PRACTICAL USE OF TIME DOMAIN BOUNDARY ELEMENT  
METHOD FOR IN-PLANE ELASTODYNAMICS

吉田 裕\*・阿部和久\*\*

By Yutaka YOSHIDA and Kazuhisa ABE

Several investigations on practical use of the time domain boundary element method for in-plane elastodynamics are carried out. Treatment of tractions at corner point are examined for both continuous and discontinuous element in view of coupling boundary element method and finite element method. Numerical results for wave diffraction in half-infinite plane are discussed relating with several essential factors, that is, incident wave length, element size, time increment and differences in the form of the truncation of matrix coefficients. Some useful informations are presented to development of efficient strategy on accuracy, CPU time and memory requirements.

*Keywords: time domain boundary element method, treatment of corner points, half-infinite plane*

## 1. はじめに

近年、境界要素法 (BEM) は有限要素法 (FEM) や差分法 (FDM) などと並び多くの工学的問題への応用が盛んに試みられるようになってきた。一般に BEM は係数行列が非対称で密になるという欠点があるが、FEM や FDM などの領域型の解法に比較すると節点自由度が少なくなり、入力などの面で有利であるといえる。特に FEM や FDM では有限領域を離散化せざるを得ないため、無限、または半無限領域を対象とする場合に、領域の打ち切りによる影響が問題になることがある。たとえば、波動問題を扱う場合、人工的に設けられた境界から反射波が生じるため、この影響を取り除く工夫が試みられている<sup>1)~5)</sup>。一方、BEM をはじめとする積分方程式に基づいた解法では、無限または半無限領域の取扱いが比較的容易であり、散乱波の放射条件が自動的に満たされるため、波動問題への適用の有効性が多くの解析例を通して示されてきている<sup>6)~19)</sup>。

BEM により波動問題を扱う場合、大きく分けて周波

数領域 (像空間) での解法と時間領域での解法とがある。前者は定常応答解析に多く用いられており<sup>6)~9)</sup>、高速 Fourier 変換等を併用すれば非定常解析にも適用可能である<sup>20)~22)</sup>。この解法は、後者に比べ計算時間や記憶容量の面で有利であるが、一方、初期の急激な応答を解析する場合は後者の方が精度の良い結果を与えることが Manolis<sup>23)</sup>により示されている。また、非線形挙動を扱う場合には、時間領域型の解法を用いる必要がある。そのため、時間領域型の解法に関する研究も盛んに行われてきている。

時間領域型境界要素法による解析は、二次元面外弾性波動問題に対して Cole ら<sup>24)</sup>が、また面内弾性波動問題に対しては Niwa ら<sup>12)</sup>が具体的な解析例を示した。以来、さまざまな問題に対して本手法を適用した結果が多く報告されてきている。地盤の動的な解析に限ってみても、基礎の動的問題<sup>13), 14)</sup>をはじめ、空洞を有する無限<sup>12)</sup>、および半無限弾性体<sup>15), 16)</sup>、または不整形地盤<sup>17), 18)</sup>などの動的応答解析への応用例が見受けられる。また、本手法と FEM との結合解法に関する研究もいくつか報告されている<sup>19), 25)</sup>。FEM との結合解法は、非線形問題を対象とする場合などに、今後大いに期待される解法である。

時間領域型境界要素法の問題点としては、時間ステップを進めるに従い、係数行列が追加されるため、必要な

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科  
(〒152 目黒区大岡山 2-12-1)

\*\* 正会員 工修 新潟大学助手 工学部建設学科  
(〒950-21 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

記憶容量が膨大になること、係数計算および係数と境界値ベクトルとの積の計算などに時間がかかること、さらに二次元面外波動問題を除いては、半無限体に対する Green 関数を得ることが難しいことなどが挙げられる。

著者らは以前に二次元面外波動問題に対し、前述の諸問題に関するいくつかの考察を行った<sup>26)</sup>。その結果多くの有益な結論を得ることができたが、面外波動問題は面内波動問題に比べると、現象をはじめ解法のアルゴリズムなどが単純であるため共通点が多く認められる一方、相違点も多いものと思われる。したがって面内波動問題に対しても同様の考察を与え、本解法をより詳しく把握することは重要であると思われる。

そこで、本論文では既往の多くの報告を参考に、二次元面内波動問題で生ずるさまざまな問題点に対し具体的な解析を通して考察を与えた。まず、かど点処理の方法の違いによる解の精度への影響について考察を行った。特に、本報告では有限要素法と結合して用いる場合に生ずる問題点のうち、境界要素方程式を有限要素型に変換する段階までについて検討した。次に、半無限領域への適用性を検討する目的で、半円形の谷を有する半無限弾性体を対象に、入射波長、時間ステップ幅および要素長と精度との関係、係数行列成分の切り捨て方法の違いによる解の精度、計算時間、必要な記憶容量への影響などについて考察を与えた。

## 2. 境界積分方程式

本報告では二次元平面ひずみ動弾性問題を対象とする。支配方程式、境界条件および初期条件は式(1)~(3)で与えられる。

支配方程式

$$(\lambda + \mu)u_{j,i} + \mu u_{i,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{in } \Omega) \dots\dots\dots (1)$$

境界条件

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i(x, t) & x \in \Gamma_u \\ [\lambda u_{kk} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})] n_j & \\ \equiv p_i(x, t) &= \bar{p}_i(x, t) & x \in \Gamma_p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

初期条件

$$\left. \begin{aligned} u_i(x, 0) &= u_{0i}(x) \\ \dot{u}_i(x, 0) \equiv v_i(x, 0) &= v_{0i}(x) \end{aligned} \right\} \text{in } \Omega \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot) / \partial x_i$ ,  $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot) / \partial t$ ,  $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタ,  $\lambda, \mu$  は Lamé 定数,  $u_i$  は変位,  $p_i$  は表面力成分,  $\rho$  は密度,  $b_i$  は物体力,  $n_i$  は境界  $\Gamma$  上における外向き単位法線ベクトル成分とし、繰返し指標は総和規約に従うものとする。また、 $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$  であり、 $u_i$  は  $\Gamma_u$  上で与えられた変位,  $p_i$  は  $\Gamma_p$  上で与えられた表面力を意味する。さらに、 $u_{0i}, v_{0i}$  はそれぞれ時刻  $t = 0$  における変位および速度成分の初期値である。なお、Lamé 定数と、縦波、横波の伝播速度  $C_L, C_T$  との関係

は次式で与えられる。

$$C_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad C_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \dots\dots\dots (4)$$

式(1)に対する時間依存の基本解は次式により定義される。

$$(\lambda + \mu)u_{k,j,i}^* + \mu u_{k,i,j}^* - \rho \ddot{u}_{ki}^* = -\delta_{ki} \delta(x-y) \delta(t-\tau) \dots\dots\dots (5)$$

ここで  $\delta(\cdot)$  は Dirac のデルタ関数である。

式(5)および遅延条件、無限遠での放射条件を満たす無限弾性体に対する基本解は次式のように与えられている<sup>27)</sup>。

$$\begin{aligned} u_{ij}^*(x, t; y, \tau) &= \frac{1}{2\pi\rho C_T} \left[ \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{t'^2 C_T^2 - r^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_{ij}}{r^2} \sqrt{t'^2 C_T^2 - r^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_i r_j}{r^4} \frac{2 t'^2 C_T^2 - r^2}{\sqrt{t'^2 C_T^2 - r^2}} \right] \cdot H(C_T t' - r) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\rho C_L} \left[ \frac{\delta_{ij}}{r^2} \sqrt{t'^2 C_L^2 - r^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_i r_j}{r^4} \frac{2 t'^2 C_L^2 - r^2}{\sqrt{t'^2 C_L^2 - r^2}} \right] \cdot H(C_L t' - r) \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $r = |x - y|$ ,  $t' = t - \tau$ ,  $r_i = x_i - y_i$  であり、 $H(\cdot)$  は Heaviside 関数である。

式(1)~(3)で与えられる解と式(6)に示した基本解とに関して動弾性問題の相反定理<sup>28)</sup>を適用すると次の積分表現式を得る。

$$\begin{aligned} u_i(x, t) &= -\int_{\Gamma} \int_0^{t^+} p_{ij}^*(x, t; y, \tau) u_j(y, \tau) d\tau d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u_{ij}^*(x, t; y, \tau) p_j(y, \tau) d\tau d\Gamma \end{aligned} \dots\dots\dots (7\cdot a)$$

$$p_{ij}^*(x, t; y, \tau) = \rho n_k [(C_L^2 - 2C_T^2) \delta_{kj} u_{i,m}^* + C_T^2 (u_{i,j,k}^* + u_{i,k,j}^*)] \dots\dots\dots (7\cdot b)$$

ここで、 $n_i$  は  $x$  における単位法線ベクトル成分、 $(\cdot)_{,i}$  は  $x_i$  による偏微分である。

なお、簡単のため  $b_i, u_{0i}, v_{0i}$  はゼロとした。

また、波動の入射を受ける半無限領域において、入射場を  $u^s(x, t)$ 、散乱場を  $u^g(x, t)$  とすれば、 $u = u^s + u^g$  となり、 $u^s$  に対して式(7\cdot a)が成り立つ。さらに、内点  $x$  を境界  $\Gamma$  へ近付け、その極限をとることにより、全体場に対して次の境界積分方程式を得ることとなる<sup>18)</sup>。

$$\begin{aligned} c_{ij}(x) u_j(x, t) &= -\int_{\Gamma} \int_0^{t^+} p_{ij}^* \cdot (u_j - u_j^s) d\tau d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u_{ij}^* \cdot (p_j - p_j^s) d\tau d\Gamma \\ &\quad + c_{ij}(x) u_j^s(x, t) \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $c_{ij}(x)$ は点  $x$  における境界の滑らかさによる係数であり、 $x$  で境界が滑らかであれば  $1/2 \delta_{ij}$  となる。

### 3. 積分方程式の離散化

ここでは式 (8) で与えられた積分方程式の離散化について述べる。変位および表面力の境界値は空間、時間方向に離散化する必要がある。そこで Fig. 1 に示すように変位、表面力ともに空間方向は線形に補間し時間方向については変位を線形、表面力を一定に補間した。一般にこのような補間方法の組合せが精度上有利であることが知られている<sup>29)</sup>。なお、以下では簡単のため、波動の入射を受けない場合について述べるが、入射を受ける場合は  $u$  を  $u - u^0 (= u^e)$  とすればよい。

Fig. 1 に示した各補間関数のもとで、境界上に  $N$  個の節点を取り、時刻  $t$  までを時間ステップ幅  $\Delta t$  で  $M$  等分割すると、変位、表面力ベクトル  $u, p$  は次式で与えられることとなる。

$$u(s, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N \phi_1^m(t) \psi_j(s) u_j^m + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{j=1}^N \phi_2^m(t) \psi_j(s) u_j^m \quad (9 \cdot a)$$

$$p(s, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N \eta^m(t) \psi_j(s) p_j^m \quad (9 \cdot b)$$

ここで、 $u_j^m, p_j^m$  はそれぞれ時刻  $m\Delta t$  における節点  $j$  での変位、表面力ベクトルである。

式 (9) を積分方程式 (8) へ代入し、 $t' = t - \tau$  として時間に関する積分を  $t'$  について行えば次式を得る。

$$c_i u_i^M = - \sum_{j=1}^M A_{ij}^1 u_j^M + \sum_{j=1}^N G_{ij}^1 p_j^M + \sum_{m=2}^M \sum_{j=1}^N [G_{ij}^m p_j^{m+1-m} - (A_{ij}^m + B_{ij}^{m-1}) u_j^{m+1-m}] \quad (10)$$

ここで  $c_i = c(x_i)$  であり、 $A_{ij}^m, B_{ij}^m, G_{ij}^m$  は以下で定義された  $2 \times 2$  の行列である。

$$A_{ij}^m = \int_{\Gamma_j} \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} p^* \phi_2^m \psi_j d\Gamma dt' \quad (11 \cdot a)$$

$$B_{ij}^m = \int_{\Gamma_j} \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} p^* \phi_1^m \psi_j d\Gamma dt' \quad (11 \cdot b)$$

$$G_{ij}^m = \int_{\Gamma_j} \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^* \psi_j d\Gamma dt' \quad (11 \cdot c)$$

ここで、 $\Gamma_j$  は補間関数  $\psi_j$  の定義された境界部分である。

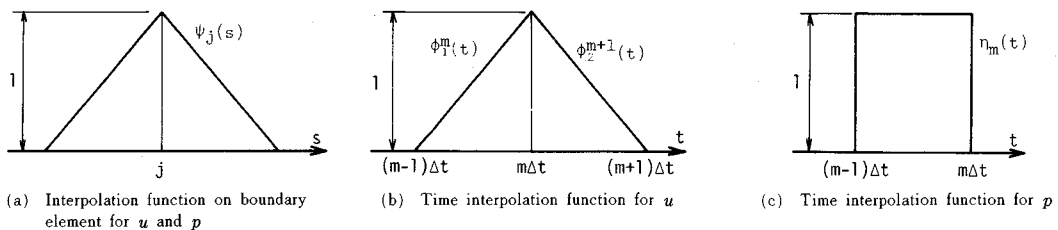


Fig. 1 Interpolation function for  $u$  and  $p$ .

次に  $H_{ij}^m$  なる係数を以下のように定義する。

$$H_{ij}^1 = c_i \delta_{ij} + A_{ij}^1 \quad (i \text{ について和をとらない}) \quad (12 \cdot a)$$

$$H_{ij}^m = A_{ij}^m + B_{ij}^{m-1} \quad (m=2, \dots, M) \quad (12 \cdot b)$$

式 (10), (12) より、第  $M$  ステップにおける離散化方程式は最終的に次式のようなになる。

$$\sum_{j=1}^N H_{ij}^M u_j^M = \sum_{j=1}^N G_{ij}^M p_j^M + \sum_{m=2}^M \sum_{j=1}^N (G_{ij}^m p_j^{m+1-m} - H_{ij}^m u_j^{m+1-m}) \quad (13)$$

なお、式 (11) で定義された各係数で、時間方向の積分については解析的に求め、空間方向の積分については各要素上で基本解が非ゼロとなる範囲に対して Telles により提案された座標変換法<sup>31)</sup>を併用し Gauss の求積法により数値的に求めた。ただし、要素がソース点を含む場合 ( $i \in \Gamma_j$ ) には、空間方向の積分も解析的に行った。

### 4. かど点の処理方法に関する検討

3. で示した時間領域型境界要素法におけるかど点の処理方法について考察する。特に境界要素法を単独で使用するのではなく、有限要素法と結合したかたちで用いる場合に、境界要素方程式を有限要素型に変換して解析を行う際のかど点の処理方法について検討した。

なお、有限要素法との結合を行う場合には検討すべき多くの問題点があるが、ここでは境界要素方程式を有限要素型に変換するまでの段階に議論を絞ることとする。

表面力は一般にかど点で不連続となるため、境界要素法において一次要素を含む高次要素を用いる際にはかど点に対する配慮が必要となる。かど点など表面力が不連続な点に対する処理方法としては、表面力を記述する節点を同一点 (かど点) に設ける二重節点法、節点を要素内側にとり不連続要素を用いる方法、および表面力も変位と同様にかどで連続に扱うものなど、いくつかの方法が挙げられる。また、変位を一次要素で近似し、表面力を一次要素で近似する 0-1 次混合要素法<sup>30)</sup>もかど点処理に関する対策の 1 つといえる。

かど点処理方法として二重節点法を用いる場合、かど点前後の要素境界上での境界条件の組合せにより、それ

それぞれ異なる処理が必要となる。したがって境界要素方程式を有限要素型に変換し有限要素領域との結合を図る場合、その手続きは煩雑になるので二重節点法は得策とはいえない。

そこで、本研究では、表面力をかど点で連続に扱う方法と、表面力に対し不連続要素を用いる方法の2種類を対象に、各方法の適用性について検討した。

一般に境界要素法で不連続要素を用いる場合、表面力のみならず変位に関しても不連続となる。しかし、有限要素法との結合を行う場合、有限要素では変位が連続となるので、かど点等での接続に工夫を要することとなる。そこで、変位に対しては連続な近似を与え、表面力に対してのみ、表面力が不連続となり得る点の前後で不連続要素を用いるような方法をとることとした。その結果、変位の境界値近似関数の補間にかかわる節点の総数  $N_u$  と表面力の補間に関する節点数  $N_p$  とは一般に異なり、 $N_u \leq N_p$  となる。

以上の条件のもとで、方程式を有限要素型に変換する手順を示すと次のとおりである。

まず、式 (13) で選点を表面力に関する  $N_p$  個の節点にとる。

$$[H^M] \{u^M\} = [G^M] \{p^M\} + \{\bar{u}^M\} \dots \dots \dots (14)$$

ここで  $\{\bar{u}^M\}$  は式 (13) の右辺第2項に相当し、 $M-1$  ステップまでの解より計算されるベクトルである。次に式 (14) の両辺に左から  $[G^M]^{-1}$  をかけて次式を得る。

$$[G^M]^{-1} [H^M] \{u^M\} = \{p^M\} + [G^M]^{-1} \{\bar{u}^M\} \dots \dots \dots (15)$$

式 (15) は節点変位と表面力についての式であるが、有限要素型の方程式に変換するためには変位と節点力との関係を導く必要がある。そこで、 ${}^{2M} \{p^M\}$  を節点力  ${}^{2M} \{F^M\}$  に変換する行列  $[M]$  を式 (15) の両辺に左からかける。すると、最終的に次式を得ることとなる。

$$[K] \{u^M\} = \{F^M\} + \{\bar{F}^M\} \dots \dots \dots (16\text{-a})$$

$$[K] = [M] \cdot [G^M]^{-1} \cdot [H^M] \dots \dots \dots (16\text{-b})$$

$$\{F^M\} = [M] \{p^M\}, \quad \{\bar{F}^M\} = [M] \cdot [G^M]^{-1} \{\bar{u}^M\} \dots \dots \dots (16\text{-c})$$

ここで、節点力  $\{F^M\}$  は変位に対する節点上に作用するものである。

以上の変換により、最終的に  $2N_u$  元の有限要素型の方程式を得ることができる。なお、式 (14) の  $[H^M]$  は正方行列ではなく、この方程式を満たす解は一般に存在しない。そこで、方程式 (16-a) より得られる解の妥当性については解析例で示すこととする。

次に、本章で解析の対象とした問題を Fig. 2 に示す。ポアソン比  $\nu$  はゼロとし、外力が領域左端に時刻  $t=0$  以降ステップ状に作用する場合を解析した。解析に際しては Fig. 3 に示すように、各辺とも同様の方法で要素分割を行い、Case I では外力および反力の作用する境界辺上の表面力節点を要素中央にとり、他方の辺に属する

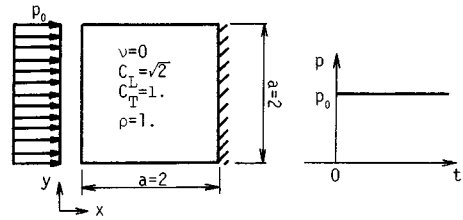


Fig. 2 Boundary conditions and loading condition.

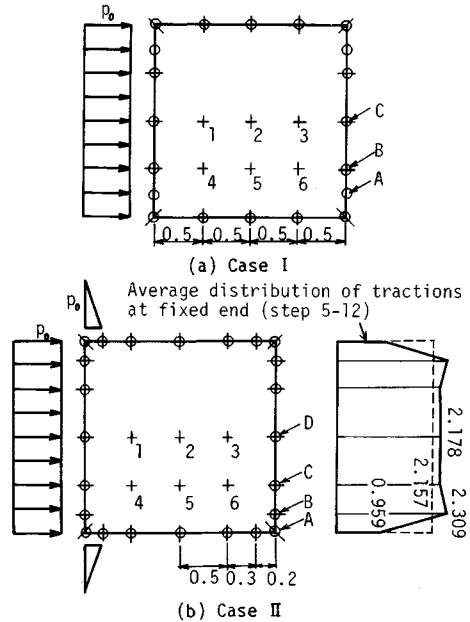


Fig. 3 Boundary discretization and treatment of corners.

節点をかど点に設けた。また、Case II では表面力も変位と同様に連続にとり、かど点前後を図のように細分割した。

Case I, II における領域内部の点1~6での  $x$  方向変位、および固定端の各節点での反力の応答を Fig. 4, 5 に示す。なお、Fig. 4, 5 は  $C_L \Delta t = 0.5$  の時間ステップ幅に対する計算結果である。

Case I では、領域内部の変位はどの位置のものも理論解と良く一致している。また、反力がかど点に最近接する節点Aでの応答が他に比較して多少大きく振動しているが、全体に良好な結果が得られている。

一方、Case II のように表面力を連続な分布で表現する場合かど点前後を細分割する必要がある。Case II では外力の合計値が規定値の10%増となるため、領域内の変位も全体に10%程度大きめにしている。また反力の応答はかど点前後で分布に乱れが生じており、かど点ではその前後の境界上の本来の表面力の平均値に相当する1.0程度、その他では真の値より10~15%大きめの

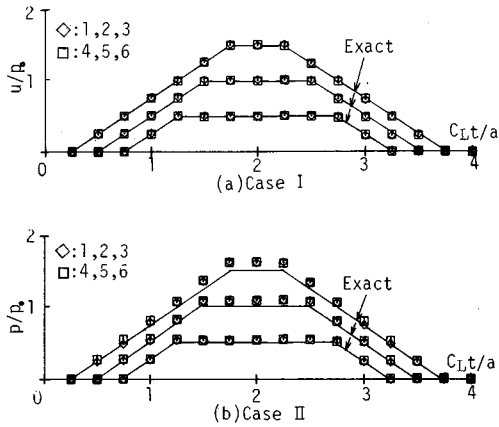


Fig. 4 Displacements at internal points.

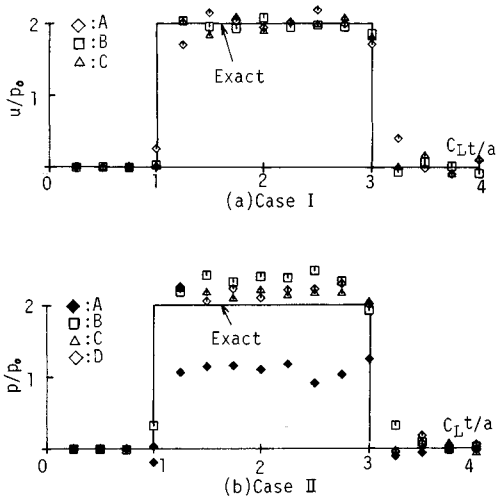


Fig. 5 Traction at fixed end.

値を示している。なお、反力が作用している第5~12ステップにおける反力分布の平均は Fig. 3(b) に示すようであった。かど点前後の要素をさらに分割すればさらに精度のよい結果が得られると思われる。

Case I, II においては、 $\Delta t$  を短くとも解の発散は生じなかった。しかし、たとえば Fig. 6 に示す Case III のように、表面力の節点をかどから一様に要素長の  $\alpha$  倍だけ内側にずらす場合、節点位置をかどから大きく離すと、 $\Delta t$  が短い場合に解の発散を生じることがある。Fig. 6 は  $\alpha=0.75$ ,  $C_L \Delta t=0.3$  ( $=0.6h$ ) における解析結果であるが、反力応答が急激に立ち上がった数ステップ後に解の発散が生じている。

時間ステップ幅と精度との関係に関する検討はいくつかなされており<sup>29)</sup>、福井<sup>19)</sup>は時間ステップ幅が短い場合に、係数行列成分の計算精度の低下が原因で解が発散する可能性があるとして報告している。

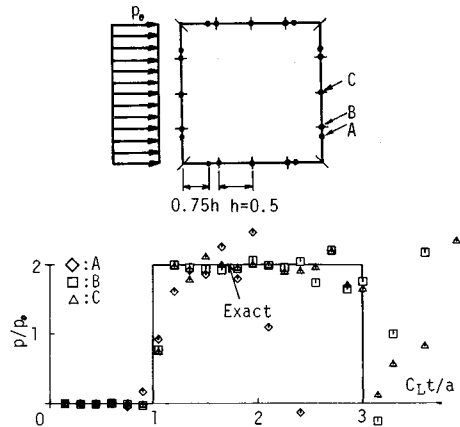


Fig. 6 Boundary discretization and the result for case III.

発散の原因としては、福井が指摘したように数値積分の誤差に起因するものと選点を角から大きく離れたことによるものが考えられる。今回の発散がもし前者によるものとするれば、 $\alpha$  の値が大きい場合ほど係数行列成分の積分精度は劣ることとなる。しかし、 $\alpha=0.25, 0.75$  の両者に対し、Gauss の 8 点積分に対する積分精度を調べたところ、行列成分の誤差の絶対最大値はむしろ後者のほうが小さいことがわかった。よって、発散の原因は選点をかどから大きく離れたことによるものであると推定される。選点をかどから離す場合、かどに隣接する要素の近似境界値の挙動はかど点の挙動を反映しなくなる。特に時間ステップ幅が短い場合、ある時間ステップにおけるかど点近傍の状態は同一ステップにおける選点での積分方程式に影響しなくなり、その結果、かど点前後の精度は低下し解の発散を招くことになったと考えられる。

以上で示したように、Case I の方法によれば境界要素と有限要素との結合の際に、変位について連続なかど点処理が可能であることがわかった。

また、Case II の方法は、かど点の近くで規定の境界条件と異なるが、かど点前後を細分割することでその影響を低減すれば、簡単かつ有効な手段となり得るものと思われる。

### 5. 半無限領域の弾性波動解析への適用

ここでは時間領域型境界要素法を不整形地盤などの半無限領域の波動応答解析に適用する場合を対象に考察を行う。解析例としては Fig. 7 に示した半円形谷を有する半無限弾性領域に角度  $\gamma$  の方向より P, SV 波が入射する場合の応答解析を選んだ。また、解析対象領域のポアソン比  $\nu$  は  $1/3$  ( $C_L/C_T=2$ ) とし、入射波  $u^i$  には次式で与えられる Sine 波を用いた。

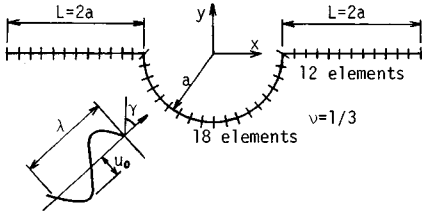


Fig.7 Boundary discretization of semi-cylindrical canyon and free surface.

$$\begin{aligned}
 u'(r, t) &= u_0 a \sin \left[ \frac{\pi}{a} \eta_L (C_L t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - a) \right] \\
 &\quad \cdot H(C_L t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - a) \quad (\text{P波}) \\
 &= u_0 b \sin \left[ \frac{\pi}{a} \eta_T (C_T t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - a) \right] \\
 &\quad \cdot H(C_T t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - a) \quad (\text{SV波})
 \end{aligned} \quad \dots(17)$$

ここで、 $a$  は谷の半径、 $u_0$  は入射波振幅、 $\mathbf{a}$  は入射方向  $\gamma$  の単位ベクトル、 $\mathbf{b}$  は  $\mathbf{a}$  に直交する単位ベクトル、 $\eta$  は谷の直径  $2a$  と入射波長  $\lambda$  との比で、 $\eta_L = 2a/\lambda_L$ 、 $\eta_T = 2a/\lambda_T$  である。

なお、本章では変位の定常振幅応答に基づいた考察を行ったが、得られる解析結果は非定常時刻歴応答であり、定常状態に達するまでに相当の時間ステップの経過を要することとなる。そこで、記憶容量の許容範囲内で計算を進め、最終ステップまでの振幅を解析結果に用いることとした。

また、半無限領域の解析で無限領域に対する基本解を用いる場合、自由境界も境界要素で離散化する必要がある。しかし、無限な境界を離散化することは不可能であるから、実際には有限な長さまでで離散化を打ち切ることとなる。

境界打ち切り長  $L$  の解への影響については、いくつか検討されてきている<sup>8)</sup>。

時間領域型境界要素法に対しては近江・登坂<sup>18)</sup>が検討を行っており、面内波において  $L$  を  $6a$  程度にとれば十分な精度が得られると報告している。

なお、境界の打ち切り長を長くすれば当然打ち切りの影響は小さくなるが、時間領域型の解法では、特に記憶容量が大きな制約となるので、境界打ち切り長は可能なかぎり短くとる必要がある。そこで、上述の報告を参考に、本章の解析で境界打ち切り長  $L$  をいくらに設定すればよいかを検討した。その結果、入射波の条件によっては境界長が必ずしも十分とはいえないものも見受けられたが、記憶容量等の制約も考慮し、Fig.7に示すように  $L$  を  $2a$  までとり、境界打ち切り長以外の影響について検討することとした。

また、谷の部分は18要素で分割し(要素長  $0.1743a$ )、左右の自由境界部は、要素長  $h=a/6$  の要素により  $L=$

Table 1 Classification of conditions (P wave,  $\gamma=30^\circ$ ).

$\lambda_L$	$\beta_L$	1.0	2.0	4.0
$\lambda_L=8a$ $\approx 48h$ ( $\eta_T=0.5$ )		Case1 $T/\Delta t=48$	Case2 $T/\Delta t=24$	Case3 $T/\Delta t=12$
$\lambda_L=4a$ $\approx 24h$ ( $\eta_T=1.0$ )		Case4 $T/\Delta t=24$	Case5 $T/\Delta t=12$	Case6 $T/\Delta t=6$

Table 2 Classification of conditions (SV wave,  $\gamma=30^\circ$ ).

$\lambda_T$	$\beta_T$	1.0	2.0	4.0
$\lambda_T=4a$ $\approx 24h$ ( $\eta_T=0.5$ )		Case7 $T/\Delta t=48$	Case8 $T/\Delta t=24$	Case9 $T/\Delta t=12$
$\lambda_T=2a$ $\approx 12h$ ( $\eta_T=1.0$ )		Case10 $T/\Delta t=24$	Case11 $T/\Delta t=12$	Case12 $T/\Delta t=6$

$2a$  までを12分割した。なお、本章での要素長  $h$  とは自由境界部の要素長  $a/6$  のことを指すが、これは谷の部分の要素長ともほぼ等しいものである。

(1) 入射波長  $\lambda$ 、要素長  $h$ 、時間ステップ幅  $\Delta t$  の解への影響について

波動の入射を受ける問題では、入射波長  $\lambda$  が短い場合ほど変位や変位振幅の応答は時間、空間両方向に複雑になる。よって、波長  $\lambda$  が短い場合はそれに合わせ要素長  $h$  および時間ステップ幅  $\Delta t$  も短くとらないと精度の低下を招くこととなる。また、谷などの対象物の規模と波長との比によっても谷のまわりの変位応答の様子は異なったものとなる。

そこで実際には  $\lambda$ 、 $h$  および  $\Delta t$  とが解析精度にどのような影響を与えているのかを、解析結果を通して調べてみた。

入射波長  $\lambda$ 、要素長  $h$ 、時間ステップ幅  $\Delta t$  に関する解析条件の分類はTable 1, 2に示すとおりであり、P, SV波ともに入射角  $\gamma=30^\circ$  の場合を対象とした。また、分割方法(要素長  $h$ )は一定とし、入射波長  $\lambda$  を変えることで相対的に  $\lambda/h$  を変えることとした。P, SV波の入射に対しそれぞれ  $\lambda/h$  を2通り、時間ステップ幅  $\beta_L (=C_L \Delta t/h)$  を3通り、合計6通りの条件の組合せでP波に対してはCase 1~6, SV波に対してはCase 7~12の計算を行い、各解析結果の比較を行った。なお、表中には入射波の周期  $T$  と時間ステップ幅  $\Delta t$  との比を示してある。

Case 1~12 に対して得られた解析結果を Fig.8 に示す。Fig.8(a)にはP波、 $\eta_T=0.5$  の場合を、また Fig.8(b)にはP波、 $\eta_T=1.0$  の場合を示してある。同様に Fig.8(c)にはSV波、 $\eta_T=0.5$ 、Fig.8(d)にはSV波、 $\eta_T=1.0$  の場合を示した。また、図には Wong<sup>10)</sup> および Dravinski and Mossessian<sup>11)</sup> による数値解も併せて示してある。P, SV波とも、波長  $\lambda$  が短い ( $\eta_T$  が大きい) 場合の方が時間ステップ幅  $\Delta t$  の違いによる影響が顕著に現われているようである。これらの違いをもう少し明確にとらえるために、次に示すノルムを導入し、 $\Delta t$  のとり方による差を定量化し、比較を行った。

$$\|u^1 - u^2\| = \left\{ \sum_{i=1}^N [(u_{xi}^1 - u_{xi}^2)^2 + (u_{yi}^1 - u_{yi}^2)^2] \right\}^{1/2}$$

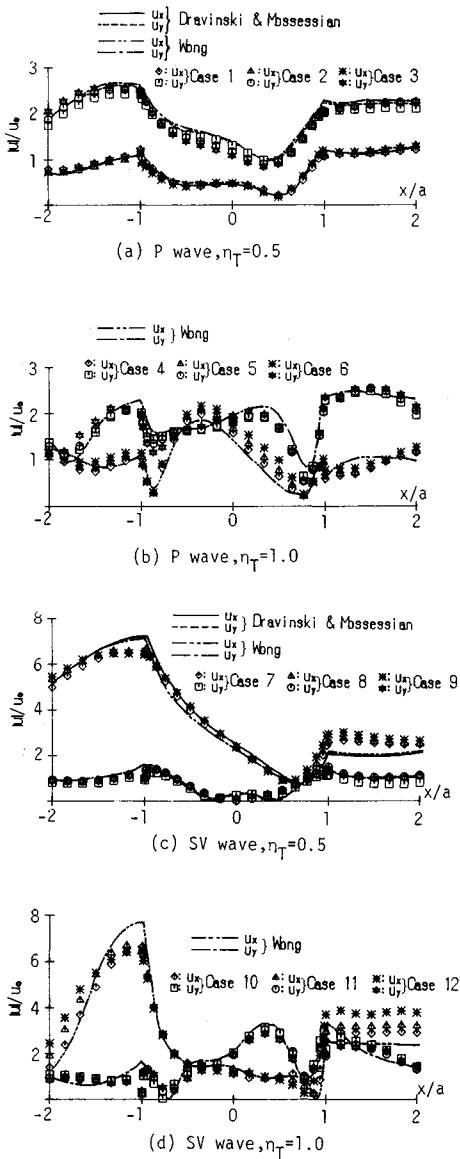


Fig. 8 Influence of time interval on the displacement amplitude.

$$\cdot \sum_{i=1}^N [(u_{xi}^1)^2 + (u_{yi}^1)^2]^{1/2} \dots \dots \dots (18)$$

ここで、 $u^1, u^2$  はそれぞれ異なる時間ステップ幅  $\Delta t$  のもとで得られた節点変位振幅ベクトルであり、 $u_{xi}^1, u_{yi}^1, u_{xi}^2, u_{yi}^2$  は各ベクトルの節点  $i$  における  $x, y$  方向変位振幅成分である。結果は Table 3, 4 のようであった。

Table 3, 4 から P, SV 波の入射いずれに対しても  $\eta_T = 1.0$  の場合の方が  $\Delta t$  の違いによる影響が大きく出ていることがわかる。さらに、 $\beta_L = 1.0$  と  $4.0$  との間でノルムによる差を求めてみると、P波入射では  $\eta_T = 0.5$  で

Table 3 Comparison of influence of time interval on norm (P wave).

$\beta_L \backslash \eta_T$	0.5	1.0
1.0	0.0556	0.0414
2.0	0.0338	0.0685
4.0		

Table 4 Comparison of influence of time interval on norm (SV wave).

$\beta_L \backslash \eta_T$	0.5	1.0
1.0	0.0557	0.0978
2.0	0.0389	0.111
4.0		

0.075,  $\eta_T = 1.0$  で 0.106, SV 波入射では  $\eta_T = 0.5$  で 0.070,  $\eta_T = 1.0$  では 0.186 となり、やはり  $\eta_T = 1.0$  の場合の方が  $\Delta t$  の違いが大きく影響していることがわかる。また、 $\eta_T = 0.5$  の場合は P, SV 波入射の両者に対し、 $\Delta t$  の変化による解への影響はほぼ同程度であるが、 $\eta_T = 1.0$  では SV 波入射の方が  $\Delta t$  の違いに鋭敏である。

$\eta_T = 0.5$  の方が  $\eta_T = 1.0$  の場合に比べ  $\Delta t$  のとり方による違いが小さいということは、今回の比較で設定した時間ステップ幅の範囲において、 $\eta_T = 0.5$  に対する解がある程度収束しておりさらに  $\Delta t$  を短くとも解の精度へはそれほど影響を与えなくなっている、ということの意味していると思われる。逆に、 $\eta_T = 1.0$  では時間方向の分割がまだ比較的大きく、解析で用いた空間方向の分割条件のもとでも  $\Delta t$  を短くすることでさらに解析結果は変化することが推測される。また、 $\eta_T = 1.0$  の SV 波入射で  $\Delta t$  の違いの影響が特に顕著であったのは、 $\lambda_T/h = 12$  と入射波の空間方向の分割数が他の例より少ないことによることほかに、入射波長が谷の直径  $2a$  と等しく、他の例に比べ谷から生じる散乱波の影響が大きく、変位応答がより複雑になったことも原因と考えられる。

以上の解析結果より、本章の解析例では、 $\eta_T = 1.0$  の場合に対しては時間、空間方向にさらに細分割する必要があるが、 $\eta_T = 0.5$  に対しては十分な分割を与えていることがわかった。

(2) 係数行列成分の切り捨てが解の精度等に及ぼす影響について

式 (13) に示したように、たとえば第  $M$  ステップ目における解を求めるためには、 $M-1$  ステップ目までの境界値ベクトル  $\{u^m, ip^m\}$  と係数行列  $[H^m], [G^m]$  との積をとる必要がある。また、係数行列は毎ステップ追加されていくので、全係数を保存しながら計算を進めると、係数行列の記憶容量や計算時間が実用上大きな制約となる。

この問題に対しては、たとえば係数行列成分の中である基準値以下の大きさのものを切り捨てて記憶しない、という策がとられる。著者らは以前、面外波動問題を例に切り捨ての基準値を何種類かに設定して得られる解の

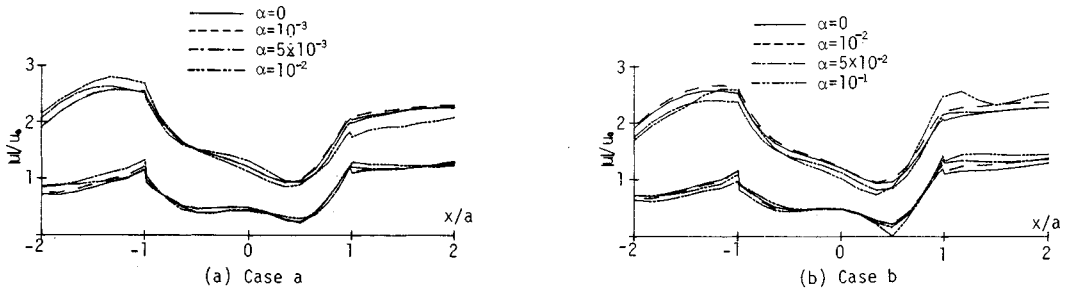


Fig. 9 Influence of truncation of matrix coefficients on the displacement amplitude for incident P waves.

精度, CPU 時間, および係数成分の総数の比較を行った<sup>26)</sup>. 本報告では, 係数行列成分の切り捨ての基準値のほかに切り捨て方法の違いによる影響も含めた検討を行う。

切り捨て方法としては以下の2通りのものを対象とした。すなわち, 係数行列成分の中で, その絶対値が基準値以下のものを随時切り捨てていく方法 (Case a) と, 各ステップで新たに作成された係数行列の中で絶対最大成分が基準値以下に達した段階で, それ以降の全係数行列を切り捨てる方法 (Case b) である。また, 切り捨ての基準値は第1ステップの係数行列  $[H^1]$ ,  $[G^1]$  の成分における絶対最大値  $|H^1|_{\max}$ ,  $|G^1|_{\max}$  と, ある特定の正の定数  $\alpha$  を用いて  $\alpha|H^1|_{\max}$ ,  $\alpha|G^1|_{\max}$  と定義する。

Fig. 9(a), (b) に角度  $\gamma=30^\circ$  の方向より波長  $\lambda_L=8a$  のP波を入射した場合に対し,  $L=2a$ ,  $\beta_L=2.0$  の条件のもとで計算を行った結果を示す。Fig. 9(a) の Case a の結果は, 切り捨ての基準として全係数保存 ( $\alpha=0$ ) のほかに  $\alpha=10^{-3}$ ,  $5 \times 10^{-3}$ , および  $10^{-2}$  を採用した場合であり, Fig. 9(b) の Case b は  $\alpha=0$ ,  $10^{-2}$ ,  $5 \times 10^{-2}$ ,  $10^{-1}$  を基準としたものである。

Case a においては  $\alpha=10^{-3}$  と  $5 \times 10^{-3}$  を基準としたものとの間に比較的明確な差が認められており, 特に  $\alpha=10^{-3}$  と全係数保存とに関しては変位振幅がほぼ一致している。一方, Case b では  $\alpha=5 \times 10^{-2}$  を基準としたもの以降に精度の低下が目立ち出しており, 特に谷の部分に注目するとその傾向が顕著に認められる。

各ステップにおける係数行列成分の絶対最大値をプロットすると, たとえば  $H$  行列については Fig. 10 のようになる。なお, Fig. 10 の縦軸は第1ステップの行列  $[H^1]$  の絶対最大な係数で除して規格化してある。図で36ステップ以降の絶対最大値が急減少しているが, これは自由表面の一方の打ち切り端から他端まで横波が伝わるのにかかる時間に相当する。また, 影響係数の分布は着目点から伝播速度  $C_L$  または  $C_T$  で伝わる波の前面付近に最大値をもち, 後方で急減少する形をとる。そのため, 36ステップ以降の係数行列の絶対最大値が急減少

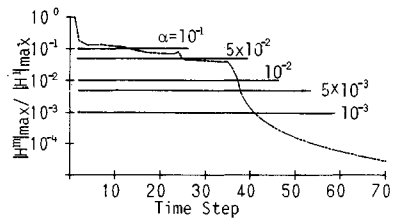
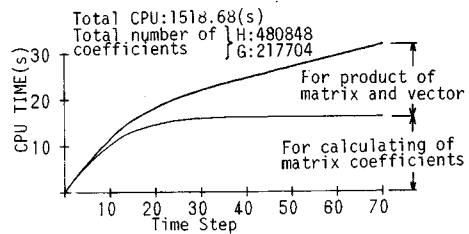
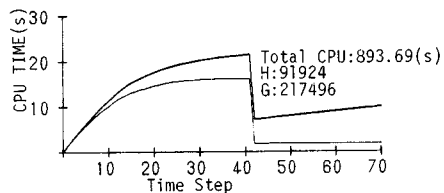


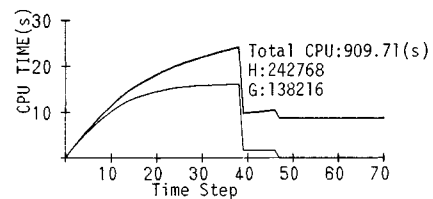
Fig. 10 Absolute maximum value of coefficients in  $H$  matrices for each time step.



(a)  $\alpha=0$



(b) Case a,  $\alpha=10^{-3}$



(c) Case b,  $\alpha=10^{-2}$

Fig. 11 Influence of truncation of matrix coefficients on CPU time.

することとなり, たとえ全係数を保存したとしても境界を有限長で打ち切ったために, 36ステップ目以降の係数に関し  $\alpha=10^{-2}$  前後の係数が実質失われることとなり, Case b の  $\alpha=10^{-2}$  との間に大きな差が生じなかつ



たものと思われる。

また、Case a, b で  $\alpha=10^{-2}$  を基準とした結果を比較すると、Case a の方で精度の低下が著しい。 $\alpha=10^{-2}$  の場合、Case a, b とも 36 ステップ目以降は全係数が切り捨てられることとなるので、両者間の精度の差は 36 ステップ以前の係数に対して Case a で  $\alpha=10^{-2}$  以下のものを切り捨てたことによるものである。Case a で 36 ステップ以前に切り捨てられた係数は 36 ステップ以降で切り捨てた係数と同等のオーダーではあるが、それらと境界値ベクトル成分との積和は無視できない値であることがわかる。

なお、解析結果より Case a において、Case b と同程度の精度の解を得るためには、切り捨ての基準値を Case b の値の約 1/10 にとる必要のあることがわかった。

次に、Case a で  $\alpha=10^{-3}$  を基準とした場合と Case b で  $\alpha=10^{-2}$  を基準とした場合での各ステップで費やした CPU 時間を全係数保存の場合と併せ Fig. 11 に示す。各図中には、それぞれの基準のもとでの 70 ステップまでの合計 CPU 時間、および H, G 行列の保存係数成分総数を示した。なお、図には各ステップでの係数行列と境界値ベクトルとの積、および係数行列成分の計算に要した時間を示してあるが、各ステップで連立一次方程式を解くために費やした時間はそれらに比較して非常に短いので図示しなかった。また、Fig. 11 (b), (c) でみられる CPU 時間の不連続部は H, G 行列成分がすべて切り捨てられた段階に相当しており、それ以降各行列成分の計算は不要となり、計算時間は大幅に短縮されることとなる。

Case a で  $\alpha=10^{-3}$  を基準とした場合は、全係数保存とほぼ同精度の解を与えていたが、70 ステップまでの合計 CPU 時間は全係数保存の約 3/5、また係数行列成分の総数は 1/2 以下であり、係数切り捨ての効果が現われている。一方、Case b で  $\alpha=10^{-2}$  を基準とした場合は、CPU 時間は Case a ( $\alpha=10^{-3}$ ) とほぼ等しいが、係数行列成分の総数は Case a より約 7 万程度多くなっている。

以上のことより、Case a と b で同程度の解を得る場合、係数の総数の面で Case a は Case b より有利であることがわかる。しかし、Case a で任意の境界打ち切り長に対しそれに応じた切り捨て基準を設定する場合にはさらに工夫を要する。一方、Case b の場合、横波が打ち切り端の一方から他方まで伝わるのにかかるステップ数を求め、これ以降の係数を切り捨てるようにすれば、係数の絶対最大値が急減少しだす時点での  $\alpha$  を基準値に選ぶ場合と等しい効果を得ることが可能である。

## 6. 結 論

時間領域型境界要素法を二次元面内波動問題に適用する場合を対象に、かど点処理の問題と半無限領域への適用性について検討を行った。

特に、かど点の処理方法の検討においては、境界要素方程式を有限要素型に変換し、有限要素との結合を図る場合を対象に考察を行った。

その結果、かど点において変位については連続な近似を与え、表面力に対してのみ不連続な分布を与える方法が妥当であることがわかった。

一方、かど点で表面力を変位と同様に連続にとる方法は、かど点前後で十分要素を細分割すれば、有効な手法となり得ることが確かめられた。

また、半円形谷を有する半無限領域の波動解析を例に、入射波長、要素長、時間ステップ幅が解の精度に与える影響、および係数行列成分の切り捨てが解の精度等に及ぼす影響について考察を与えた。

その結果、波長が比較的長い  $\eta_r=0.5$  の場合に対しては、本解析で用いた分割で十分な結果が得られるが、 $\eta_r=1.0$  に対してはさらに時間、空間方向に細かな分割を与える必要のあることがわかった。

また、係数行列の切り捨て方法として、係数成分の中で絶対値が基準値以下のものを随時切り捨てる方法と、各ステップの係数行列の中で絶対最大な成分が基準値以下に達した段階で、それ以降の全係数行列を切り捨てる方法の 2 通りについて検討した。それにより、前者は後者に比べ、より少ない係数成分で同程度の解を与え得ることがわかった。しかし、境界の打ち切り長と対応した切り捨て基準値の設定に関しては後者の方が多少合理的であるといえる。

## 参 考 文 献

- 1) Smith, W. D. : A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems, J. Comp. Phys., Vol. 15, pp. 492 ~ 503, 1974.
- 2) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R. : Finite dynamic model for infinite media, ASCE, Vol. 95, EM4., pp. 859 ~ 877, Aug. 1969.
- 3) Lysmer, J. and Waas, G. : Shear waves in plane infinite structures, ASCE, Vol. 98, EM1., pp. 85 ~ 105, Feb. 1972.
- 4) 赤尾嘉彦・伯野元彦：動的解析における半無限境界での波動的処理, 土木学会論文報告集, 第 336 号, pp. 21 ~ 29, 1983. 8.
- 5) Suzuki, T. and Hakuno, M. : 3-D dynamic analysis of ground motion by FEM with non-reflecting boundary, Proc. of JSCE, No. 356, pp. 185 ~ 193, Apr. 1985.
- 6) 丹羽義次・小林昭一・横田和男：積分方程式による任意形状、多数空洞周辺応力の解析, 土木学会論文報告集,

- 第195号, pp.27~35, 1971.11.
- 7) 丹羽義次・小林昭一・福井卓雄・東 憲昭：積分方程式による埋設物周辺の過渡応力の解析, 土木学会論文報告集, 第248号, pp.41~53, 1976.4.
  - 8) 上杉真平・大津政康：境界要素法による半無限弾性体における二次元波動場の解析, 土木学会論文集, 第374号, pp.457~465, 1986.10.
  - 9) Banerjee, P. K., Ahmad, S. and Chen, K. : Advanced application of BEM to wave barriers in multi-layered three-dimensional soil media, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.16, pp.1041~1060, 1988.
  - 10) Wong, H.L. : Effect of surface topography on the diffraction of P, SV, and Rayleigh waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.72, No.4, pp.1167~1187, Aug. 1982.
  - 11) Dravinski, M. and Mossessian, T.K. : Scattering of plane harmonic P, SV, and Rayleigh waves by dipping layers of arbitrary shape, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.77, No.1, pp.212~235, Feb. 1987.
  - 12) Niwa, Y., Fukui, T., Kato, S. and Fujiki, K. : An application of the integral equation method to two-dimensional elastodynamics, *Theor. Appl. Mech.*, Vol.28, pp.281~290, 1980.
  - 13) Karabalis, D.L. and Beskos, D.E. : Dynamic response of 3-D rigid surface foundations by time domain boundary element method, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.12, pp.73~93, 1984.
  - 14) Spyarakos, C.C. and Beskos, D.E. : Dynamic response of rigid strip-foundations by a time-domain boundary element method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.23, pp.1547~1565, 1986.
  - 15) Rice, J.M. and Sadd, M.H. : Propagation and scattering of SH-waves in semi-infinite domains using a time-dependent boundary element method, *J. Appl. Mech.*, Vol.51, pp.641~645, Sept. 1984.
  - 16) 福井卓雄：弾性半平面内空洞の過渡的応答の境界積分方程式による時間Step解析, 第1回境界要素法シンポジウム論文集(境界要素法研究会), pp.175~180, 1980.
  - 17) 平井弘義：不整形地盤におけるSH波動の時間領域BEMによる過渡応答解析, 境界要素法論文集, 第4巻(境界要素法研究会), pp.287~292, 1987.
  - 18) 近江正徳・登坂宣好：二次元時間領域境界要素法による不整形地盤の動的応答解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第12巻, pp.389~394, 1988.
  - 19) 福井卓雄：二次元動弾性問題の時間積分境界要素法による解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第12巻, pp.197~202, 1988.
  - 20) Kobayashi, S. and Nishimura, N. : Transient stress of tunnels and caverns of arbitrary shape due to travelling waves, Chapter 7 in : *Developments in Boundary Element Methods-2*, Eds. P. K. Banerjee and R. P. Shaw, Applied Science Publishers, 1982.
  - 21) Manolis, G.D. and Beskos, D.E. : Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and laplace transform, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.17, pp.573~599, 1981.
  - 22) Kontoni, D.P.N., Beskos, D.E. and Manilis, G.D. : Uniform half-plane elastodynamic problems by an approximate boundary element method, *Soil. Dyn. Earthquake Eng.*, Vol.6, No.4, pp.227~238, 1987.
  - 23) Manolis, G.D. : A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.19, pp.73~91, 1983.
  - 24) Cole, D.M., Kosloff, D.D. and Minster, B. : A numerical boundary integral equation method for elastodynamics. I, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.68, No.5, pp.1331~1357, Oct. 1978.
  - 25) Karabalis, D.L. and Beskos, D.E. : Dynamic response of 3-D flexible foundations by time domain BEM and FEM, *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, Vol.4, pp.91~101, 1985.
  - 26) 吉田 裕・阿部和久：時間領域型境界要素法による弾性波動解析に関する一考察, 構造工学論文集, Vol.35A, pp.231~239, 1989.
  - 27) Mansur, W.J. and Brebbia, C.A. : Transient elastodynamics, Chapter 5 in : *Topics in Boundary Element Research*, Vol.2, Ed. C.A. Brebbia, Springer-Verlag, 1985.
  - 28) Eringen, A.C. and Suhubi, E.S. : *Elastodynamics*, Vol. II, Academic Press, Chapter V, 1975.
  - 29) Mansur, W.J. and Brebbia, C.A. : Further Developments on the Solution of the Transient Scalar Wave Equation, Chapter 4 in : *Topics in Boundary Element Research*, Vol.2, Ed. C.A. Brebbia, Springer-Verlag, 1985.
  - 30) 小貫 天・石山敦士・小川真一郎：境界要素法における0-1次混合離散化法について, 電気学会論文誌A, 102巻10号, pp.541~548, 1982.
  - 31) Telles, J.C.F. : A Self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.24, pp.959~973, 1987.

(1989.5.10・受付)