

## 面内および面外荷重を受ける平板の 三次元弾性論による補正

### THREE-DIMENSIONAL CORRECTIONS FOR PLATES APPLIED IN-PLANE AND OUT-OF-PLANE LOADINGS

平島健一\*・根岸嘉和\*\*

By Ken-ichi HIRASHIMA and Yoshikazu NEGISHI

By using the formulation of the authors' general higher-order theory of plates which satisfy exactly the boundary (loading) conditions of upper and lower surfaces of the plate, we solve the particular problems of a semi-infinite, isotropically elastic plate of uniform thickness with a sinusoidally varying in-plane (stretching) and out-of-plane (bending) edge loads. Two types of approximate three-dimensional corrections to the elementary two-dimensional plane stress solution are obtained as closed form solutions. Numerical results for these solutions of appropriate truncated terms are compared with the plane stress and plane strain solutions which depend on Poisson's ratio.

Keywords : plates, plane stress solution, 3-dimensional corrections

#### 1. 緒 言

Kirchhoff-Loveの仮定に基づき、板厚方向の応力およびひずみの成分を無視した、いわゆる古典平板理論は三次元弾性論の厳密な解析式が簡略化され、その取扱いが容易なため、古くから工学上の重要な諸問題に少なからず活用されてきた。しかし、平板は本質的に三次元物体であり、厚さ方向にわたって応力、ひずみ、変位等の力学量は変化するので、古典理論は必然的にその適用範囲に制限を受けることになる。たとえば、板厚がその幅や奥行きに比べてある程度以上厚くなった場合や、板厚( $h=2b$ )と載荷荷重の波形幅( $l/2=d$ )との比 $h/d$ がある値より大きくなるような問題に対しては、板厚方向の成分は無視できない大きさになり、これを無視した古典理論の与える解にはかなりの誤差が含まれることになる。したがって、それらの量を含めた平板問題の解を求めるには、三次元弾性論を適用した解析を実施することが必要である。しかし、周知のごとく、そのような厳密な取扱いによって解析解を得ることは一般にかなりの数学的困難さを伴うものであり、またこの方法によって厳

密解が得られる条件を備えた問題は非常に限られているといつてよい。そこで、三次元的な力学量のうち平板としての特性に着目し、その特性を解析手段の中に取り込み、解析を単純化し近似理論としての弾性平板の高次理論を定式化しようとする試みが従来までに数多くの研究者によってなされてきた。その代表的な方法は空間変数としての3個の独立変数を2個に減らして表現する、すなわち二次元化して解析を進めようとするものであり、平板の厚さ方向に級数展開(たとえば、ベキ級数、Legendre級数、Fourier級数等の展開)を行い、その低次項のいくつかを採用することによって理論解析を達成しようとするものである。これはKirchhoff-Loveの古典理論において無視されていた板厚方向の応力、ひずみ、およびせん断変形等を考慮するために各種の力学量(たとえば、変位、応力、ひずみ等)を板厚方向座標に関する有限項の級数に展開して解析を進めようとするものである。もちろんこの手法のもので採用項数を減らしてゆけば古典理論の基礎方程式が得られるのはいうまでもない。

その最も基本となるのはReissner<sup>1)</sup>やMindlin<sup>2)</sup>によって定式化された理論であって、はり問題のTimoshenko理論に相当するレベルのものである。これらの理論は上下表面での境界(荷重)条件を完全には満たし得ないものの、一定レベルのせん断変形(あるいは動的な

\* 正会員 工博 山梨大学教授 工学部土木環境工学科  
(〒400 甲府市武田4-3-11)

\*\* 正会員 福島工業高等専門学校助教 土木工学科  
(〒970 いわき市平上荒川字長尾30)

場合にはそれに加えて回転慣性)を考慮したものとなっている。これをさらに改良した理論が最近、数多く提案されているが、著者らもかつて、より一般化した高次理論をいくつか提案してきた<sup>3)-5)</sup>。しかし、それらは平板の上下表面での自由境界条件を完全には満たしておらず、ここで対象とするような平面応力問題にはそのまま適用できない欠陥があった。そのことを改善するために、著者らは上述の理論構成と並行し、平板の上下表面での境界(荷重)条件を完全に満足する応力および変位仮定を基本として、一般化した混合型の高次平板理論を提案した<sup>6),7)</sup>。そこでは応力や変位を初めから有限項で近似することを避け、無限級数に展開した形で表示してあることから採用項数には何らの制限を設けず、したがって必要に応じて次数を増すことによって理論精度を向上させることができるようになっていた。本研究はこの理論を面内および面外方向の荷重を受ける平板問題に適用し、上下表面の境界条件を満たすように三次元弾性論による立場から補正・検討を試みようとしたものである。

すでに述べたように、平板は厳密には三次元物体であり、面内方向にも厚さ方向にも応力状態は変化するので、厳密な意味での平面応力状態は実在し得ない。実際の平板に生ずる応力は当然三次元応力であるから、極端に薄い板の場合を除けば、近似的にも平面応力状態とはなり得ない。したがって、ある厚さをもつ実際の平板にも無理なく適用できるように、三次元弾性論による近似補正を考える必要があるが、ここで取り上げた著者らの理論における補正は Reissner<sup>8),9),12)</sup>や古賀ら<sup>11)</sup>の理論を一般化したもので、平板の上下面での境界条件、応力のつり合い方程式および適合条件式を満足し、かつ理論的に閉じた形式となっている。また形式的には、新しく導入された数個の断面力関数と二次元の Laplace 演算子によって表現でき、最終的にはこれらを含む偏微分方程式を解くことに帰着される。また、本論文の理論は採用項数に何らの制限を受けないので、任意次数の理論式の誘導が可能となるものであるが、ここでは三次の理論式までを採用し、次数上の修正効果も検討する。

まず最初の適用例として、厚さの一樣な半無限板の端部の中央平面に平行に正弦関数状の面内荷重が作用する問題を取り上げる。等方性平板に対するこの種の問題の平面応力解(従来の古典解)は、当然のことながらポアソン比 $\nu$ に無関係で、面外(板厚方向)の直応力、せん断応力はすべて零となる。本論文によれば、上述の平面応力解は載荷波形幅に対する板厚の比  $h/d$  が小さいときには、実用上、有効であることが示される。しかし、載荷波形幅の大きさが板厚程度になると、両理論の間にはかなりの差異が生じ、特に、面外応力成分に関してこの傾向は顕著であることが示される。

また、端部に面外力(曲げ)を受ける半無限板にも面内問題に対応する形の理論式を構成し、その適用を試みる。このときの理論構成も面内のときとはほぼ同様であるが、ただ多少の差異は面内問題における同次形の微分方程式が面外では非同次形になることである。なお、本理論の基本となる考え方と諸式の一部はすでに著者らの先の論文<sup>7)</sup>に概略記述されているので、ここでは重複する部分は避けてそれに付け加わる部分の概要を示すとどめることとする。

## 2. 弾性平板の混合型高次理論

### (1) 応力, 変位, および断面力

右手系の直交デカルト座標系内におかれた平板に対して、以下の諸量を定める。

まず、平板の厚さは一樣とし、 $2b(=h)$  で表わす。板厚中央面内に面内座標  $(x, y)$  を、それらに垂直方向に座標  $z$  を設定する。この  $z$  を次のように無次元化した $z$ で表わす。

$$\zeta = \frac{z}{b}; \quad -1 \leq \zeta \leq 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

各座標方向に対応させて応力成分を  $(\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$  で、また変位成分を  $(u, v, w)$  で表わす。いま、平板の上下表面における境界条件は自由とする。したがって次のようになる。

$$\tau_{xz}^+ = \tau_{xz}^- = \tau_{yz}^+ = \tau_{yz}^- = \tau_{yz}^+ = \tau_{yz}^- = 0. \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、上添字<sup>+</sup>および<sup>-</sup>はそれぞれ平板の上下表面( $\zeta = +1$ および $-1$ )における値を示す。なお、上下表面に荷重が作用する場合には上式を補正して容易に荷重条件に合うように変更できるが、それについてはここでは省略する。

応力、変位の各成分を次のように Legendre 多項式  $P_n(\zeta)$  およびその他の無限級数に展開して表示する。

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_{xx}^{(n)}, \tau_{yy}^{(n)}, \tau_{xy}^{(n)}) \cdot P_n(\zeta), \\ (\tau_{xz}, \tau_{yz}) &= b \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_{xz}^{(n)}, \tau_{yz}^{(n)}) \cdot R_n(\zeta), \\ \tau_{zz} &= b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{zz}^{(n)} \cdot S_n(\zeta), \\ (u, v) &= \sum_{n=0}^{\infty} (u^{(n)}, v^{(n)}) \cdot P_n(\zeta). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

上式中の  $P_n(\zeta), R_n(\zeta)$  および  $S_n(\zeta)$  は、

$$\left. \begin{aligned} P_n(\zeta) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n; \quad P_0(\zeta) = 1, P_1(\zeta) = \zeta, \\ P_2(\zeta) &= \frac{1}{2} (3\zeta^2 - 1), P_3(\zeta) = \frac{1}{2} (5\zeta^3 - 3\zeta), \dots \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} R_n(\xi) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (\xi^2 - 1)^n; R_0(\xi) = \xi, \\ R_1(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi^2 - 1), R_2(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^3 - \xi), \dots \\ S_n(\xi) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n-2}}{d\xi^{n-2}} (\xi^2 - 1)^n; S_0(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1), \\ S_1(\xi) &= \frac{1}{6}(\xi^3 - 3\xi), S_2(\xi) = \frac{1}{8}(\xi^2 - 1)^2, \dots \\ &\dots\dots\dots (4) \end{aligned} \right\}$$

なる関係を有する \$\xi\$ の関数である。

(2) つり合い方程式

物体力を無視した静的なつり合い方程式のうち、面内座標方向のものに \$P\_n(\xi)\$ を、残りの式を \$z\$ に関して偏微分した後に \$P\_n(\xi)\$ をそれぞれ掛け、板厚にわたって積分を実施して式(3)、(4)を考慮すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx,x}^{(n)} + \tau_{xy,y}^{(n)} + \tau_{xz,z}^{(n)} &= 0, \\ \tau_{xy,x}^{(n)} + \tau_{yy,y}^{(n)} + \tau_{yz,z}^{(n)} &= 0, \\ \tau_{xz,x}^{(n)} + \tau_{yz,y}^{(n)} + \tau_{zz,z}^{(n)} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

なお、コマの後の添字はその座標による偏微分を意味する。

上式は式(3)で定義した応力係数 (\$n\$ 次の断面力) \$\tau\_{ij}^{(n)}\$ の満たすべきつり合い式である。

(3) 構成関係式および支配方程式

以上で導入された応力係数 \$\tau\_{ij}^{(n)}\$ と変位係数 \$u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}\$ との関係式、すなわち二次元化した平板としての構成関係式を算出するために、等方性板を対象とした構成関係式(応力-ひずみ関係)を多少変形した次式を考える。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}(u_{,x} + \nu v_{,y}) + \frac{\nu}{1-\nu} \tau_{zz}, \\ \tau_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2}(v_{,y} + \nu u_{,x}) + \frac{\nu}{1-\nu} \tau_{zz}, \\ \tau_{xy} &= G(u_{,y} + v_{,x}), Ew_{,z} = \tau_{zz} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy}), \\ \tau_{xz} &= G(u_{,z} + w_{,x}), \tau_{yz} = G(v_{,z} + w_{,y}). \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

ここに、\$E, \nu, G\$ はそれぞれ弾性係数、ポアソン比、せん断弾性係数である。式(6)に \$P\_n(\xi)\$ を掛け板厚にわたって積分を実行し、二、三の整理を行うと最終的に次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}^{(n)} &= \frac{E}{1-\nu^2}(u_{,x}^{(n)} + \nu v_{,y}^{(n)}) + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2n+1}{2b} Q_z^{(n)}, \\ \tau_{yy}^{(n)} &= \frac{E}{1-\nu^2}(v_{,y}^{(n)} + \nu u_{,x}^{(n)}) + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2n+1}{2b} Q_z^{(n)}, \\ \tau_{xy}^{(n)} &= G(u_{,y}^{(n)} + v_{,x}^{(n)}), \\ -u^{(n)} + bw_{,x}^{(n)} &= \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b^2}{G} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{xz}^{(m)}, \\ -v^{(n)} + bw_{,y}^{(n)} &= \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b^2}{G} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{yz}^{(m)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_z^{(n)} &= b \int_{-1}^1 \tau_{zz} \cdot P_n(\xi) d\xi = -b^3 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{zz}^{(m)}, \\ \Gamma_m^n &= \int_{-1}^1 R_n(\xi) \cdot R_m(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2n+1} (\hat{\Gamma}_m^{n+1} - \hat{\Gamma}_m^{n-1}), \\ \hat{\Gamma}_m^k &= \int_{-1}^1 P_k(\xi) \cdot R_m(\xi) d\xi \\ &= \frac{2}{(2k+1)(2m+1)} (\delta_{k,m+1} - \delta_{k,m-1}), \\ w_0^{(n)} &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 w \cdot R_n(\xi) d\xi, w_0 = \int_{-1}^1 w d\xi. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

3. 面内力および面外力を受ける弾性平板の理論式

前節で概説した平板の混合型高次理論のための基礎関係式をもとに面内方程式および面外(曲げ)方程式を導く。

ここで、面内方程式(面内問題)とは平板面内での伸縮や面内せん断挙動を支配する式系(問題)のことを、また、面外(曲げ)方程式(面外問題)とはいわゆる平板の曲げ挙動を表わす式系(問題)のことを指すものとする。

(1) 面内方程式

応力成分を Legendre 多項式の無限級数に展開して取り扱う場合、面内方程式に寄与するのは級数展開における偶数次項のみであり、奇数次項のみを採用する面外方程式とは完全に分離でき、それらは互いに対をなす。ここでは以下、面内方程式に関する一、二および三次理論式を示すが、説明の都合上、高次の理論式のものに先に記述する。

a) 三次理論式

ここでは、面内方程式において、0次項、2次項および4次項からなる三次理論式の概要を示す。具体的な表示は次のとおりである。

① 基本採用項

式(3)における応力、変位成分をそれらの右辺のように展開した級数のうち、\$n=0, 2\$ および \$4\$ の偶数次項を採用してやればよい。したがって、式(5)、(7)、(8)においても、それに対応した項採用をする必要がある。このとき、式(2)に示したように平板表面 (\$\xi = \pm 1\$) で無載荷の状態を考えているため、

$$\tau_{zz}^{(0)} = \tau_{zz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(0)} = \tau_{yz}^{(0)} = 0. \dots\dots\dots (9)$$

となる。

② 断面力関数の導入

次に上述した項打ち切りで得られた基礎関係式の取扱いを簡便にするために、まずはじめにつり合い式(5)を満

たすように項打ち切りを実施する以前の、最も一般的な断面力関数  $K^{(j)}$ ,  $\tilde{Q}^{(1)}$ ,  $\Omega^{(j)}$ ,  $\Psi^{(j)}$  を以下のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}^{(n)} &= K_{,yy}^{(n)} + \delta_{n1} \tilde{Q}_{,yy}^{(1)}, & \tau_{xz}^{(n)} &= -\delta_{n1} \tilde{Q}_{,xy}^{(1)} \\ \tau_{yy}^{(n)} &= K_{,xx}^{(n)} + \delta_{n1} \tilde{Q}_{,xx}^{(1)}, & \tau_{yz}^{(n)} &= +\delta_{n1} \tilde{Q}_{,xy}^{(1)}, \\ \tau_{xy}^{(n)} &= -K_{,xy}^{(n)}, & (n=0, 1) \\ \tau_{xx}^{(n)} &= -\Omega_{,y}^{(n)} - \Psi_{,x}^{(n)}, & \tau_{xz}^{(n)} &= \nabla^2 \Psi^{(n)}, \\ \tau_{yz}^{(n)} &= +\Omega_{,x}^{(n)} - \Psi_{,y}^{(n)}, & (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

この節で考えている面内問題の三次理論では  $K^{(0)}$ ,  $\Omega^{(j)}$ ,  $\Psi^{(j)}$  ( $j=2, 4$ ) の5個の断面力関数に関係する。したがって、これらの5個の満足すべき支配方程式を求める必要がある。そのためには、上記までで定義ないし得られた関係式を適切に組み合わせ、 $K^{(0)}$ ,  $\Omega^{(j)}$ ,  $\Psi^{(j)}$  ( $j=2, 4$ ) 以外の  $\tau_{ij}^{(n)}$ ,  $u^{(n)}$ ,  $v^{(n)}$ ,  $w^{(n)}$  ( $n=0, 2, 4$ ) の項を消去することにより、最終的に以下のような基礎式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{2b^2}{21} \nabla^2 \Omega^{(2)} - \frac{b^2}{63} \nabla^2 \Omega^{(4)} - \Omega^{(2)} &= 0, \\ \frac{2b^2}{77} \nabla^2 \Omega^{(4)} - \frac{b^2}{35} \nabla^2 \Omega^{(2)} - \Omega^{(4)} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2b^4}{63} \nabla^4 \Psi^{(2)} - \frac{4b^4}{2079} \nabla^4 \Psi^{(4)} \\ - \frac{4b^2}{21} \nabla^2 \Psi^{(2)} + \frac{2b^2}{63} \nabla^2 \Psi^{(4)} + \Psi^{(2)} &= 0, \\ \frac{43b^4}{38115} \nabla^4 \Psi^{(4)} - \frac{4b^4}{1155} \nabla^4 \Psi^{(2)} \\ - \frac{4b^2}{77} \nabla^2 \Psi^{(4)} + \frac{2b^2}{35} \nabla^2 \Psi^{(2)} + \Psi^{(4)} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$$\nabla^4 (K^{(0)} - \frac{b^2}{15} \nu \Psi^{(2)}) = 0. \dots\dots\dots (13)$$

なお、上式中の関数  $K^{(0)}$  を次式：

$$K^{(0)} = \phi^{(0)} + \frac{b^2}{15} \nu \Psi^{(2)}. \dots\dots\dots (14)$$

のように表示するものとすれば、 $\phi^{(0)}$  は明らかに次の重調和方程式：

$$\nabla^4 \phi^{(0)} = 0. \dots\dots\dots (15)$$

を満足しなければならない。

上に示した式(11)~(13)を境界条件のもとで解くことができれば、得られたこれらの断面力関数から応力係数  $\tau_{ij}^{(n)}$  および変位係数  $u^{(n)}$ ,  $v^{(n)}$ ,  $w^{(n)}$  が求められ、さらにその結果を式(13)に代入すれば所期の目的の応力、変位が決定できることになる。

b) 一次、二次理論式

上述の a) が面内問題における三次理論式であったが、ここで  $\Omega^{(j)}$ ,  $\Psi^{(j)}$ , ( $j=2, 4$ ) をすべて無視すれば断面力関数  $K^{(0)}$  のみ、応力係数は  $\tau_{xx}^{(0)}$ ,  $\tau_{yy}^{(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)}$  のみとなり、その結果はきわめて簡単になって、次式：

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}^{(0)} &= K_{,yy}^{(0)}, & \tau_{yy}^{(0)} &= K_{,xx}^{(0)}, & \tau_{xy}^{(0)} &= -K_{,xy}^{(0)} \\ \nabla^4 K^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

が得られる。これは一次理論式であって古典理論としての平面応力問題に帰着し、関数  $K^{(0)}$  は Airy の応力関数にほかならない。また三次理論式中において  $\Omega^{(4)}$ ,  $\Psi^{(4)}$  の2つの断面力関数を無視して整理した結果のもの<sup>10)</sup>が二次理論式となるが、これは Clark が求めたものに完全に帰着することが証明できる。

ここに、 $\nabla^2$  は二次元の Laplace 演算子であり、 $\delta_{n1}$  は Kronecker のデルタである。上式のうち、 $K^{(0)}$  は古典的な Airy の応力関数に相当し、 $\Omega^{(1)}$  はねじりの応力関数に対応するものである。

(2) 面外(曲げ)方程式

この場合の支配方程式に寄与するものは式(3)の級数展開における奇数次項のみである。

a) 三次理論式

式(3)の右辺の級数のうち  $n=1, 3$  および5の奇数次項を採用してやれば、面外問題の三次理論式が構成される。このとき式(9)に示したように  $\tau_{xz}^{(1)}=0$  が成立することを考慮して、6個の断面力関数  $K^{(1)}$ ,  $\tilde{Q}_{,xy}^{(1)}$ ,  $\Omega^{(j)}$ ,  $\Psi^{(j)}$  ( $j=3, 5$ ) の満足すべき支配方程式を面内問題の場合と同様にして求めれば、最終的に次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{2b^2}{5} \nabla^2 \tilde{Q}_{,xy}^{(1)} - \frac{b^2}{35} \nabla^2 \Omega^{(3)} - \tilde{Q}_{,xy}^{(1)} &= 0, \\ \frac{2b^2}{45} \nabla^2 \Omega^{(3)} - \frac{b^2}{15} \nabla^2 \tilde{Q}_{,xy}^{(1)} - \frac{b^2}{99} \nabla^2 \Omega^{(5)} - \Omega^{(3)} &= 0, \\ \frac{2b^2}{117} \nabla^2 \Omega^{(5)} - \frac{b^2}{63} \nabla^2 \Omega^{(3)} - \Omega^{(5)} &= 0, \\ \nabla^4 K^{(1)} - \frac{b^2}{35} \nu \nabla^4 \Psi^{(3)} - \tilde{Q}_{,xxxx}^{(1)} + \tilde{Q}_{,yyyy}^{(1)} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2b^4}{495} \nabla^4 \Psi^{(3)} - \frac{4b^4}{6435} \nabla^4 \Psi^{(5)} - \frac{4b^2}{45} \nabla^2 \Psi^{(3)} \\ + \frac{2b^2}{99} \nabla^2 \Psi^{(5)} + \Psi^{(3)} &= 0, \\ \frac{53b^4}{117117} \nabla^4 \Psi^{(5)} - \frac{4b^4}{4095} \nabla^4 \Psi^{(3)} - \frac{4b^2}{117} \nabla^2 \Psi^{(5)} \\ + \frac{2b^2}{63} \nabla^2 \Psi^{(3)} + \Psi^{(5)} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

これ以降の応力、変位を決定するプロセスは面内問題の場合と全く同様であるので説明を省略する。

b) 一次、二次理論式

採用項として級数展開における1次項のみ、または1次、3次項を取り入れたものが、それぞれ一次または二次理論式となる。断面力関数のレベルでいえば一次理論式は  $K^{(1)}$ ,  $\tilde{Q}_{,xy}^{(1)}$  を、また二次理論式は  $K^{(1)}$ ,  $\tilde{Q}_{,xy}^{(1)}$ ,  $\Omega^{(3)}$ ,

$\Psi^{(3)}$ を採用したものとなる。したがって、式(17)、(18)で示した三次理論式の支配方程式で、それぞれ適切に項を削除してやれば、一次、二次理論式としての支配方程式が得られることになる。

なお、一次理論式は通常のせん断変形を考慮した平板曲げの理論式に相当するものである。

#### 4. 数値結果と考察

前節までに示した面内、面外(曲げ)問題に対するそれぞれ一次、二次および三次理論式を、閉じた型の解析解が求められる以下の4つの具体例に適用し、古典的な平面応力の仮定の三次元的弾性論による補正効果を数値的に検討する。

##### (1) 端部に面内直応力を受ける半無限板

Fig. 1に示したように半無限板の端面に周期的に変動する面内応力が作用する場合を考える。この場合の境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yy}(x, 0, z) &= \sigma_0 \cos(ax), \\ \tau_{xy}(x, 0, z) &= \tau_{yz}(x, 0, z) = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

上式の境界条件のもとで、式(11)~(13)の連立偏微分方程式を解くことにより平板内の任意点での応力を求めることができる。それらの結果を示せば次のようになる。

まず、Fig. 2はモデルケースとして、板厚 $2b$ と载荷波

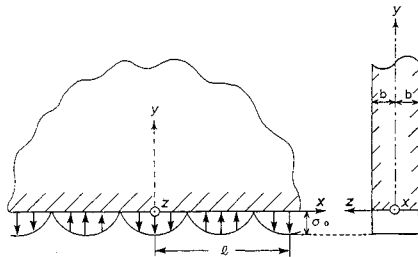


Fig. 1 Semi-Infinite elastic plate with a sinusoidal normal edge load (In-plane problem I).

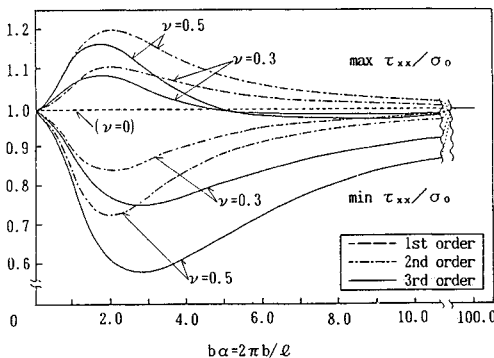


Fig. 2 Maximum and minimum values of  $\tau_{xx}/\sigma_0$  at the edge ( $y=0$ ) for the case of Fig. 1.

形幅比:  $ba=2\pi b/l$  を  $ba=0\sim 100(\approx\infty)$ , ポアソン比  $\nu$  を  $\nu=0, 0.3, 0.5$  と変化させたときの端部  $y=0$  での  $\max \tau_{xx}/\sigma_0$  および  $\min \tau_{xx}/\sigma_0$  を描いたものである。平面応力(一次)理論による端部での  $\tau_{xx}/\sigma_0$  の値は 1.0 であり,  $ba\rightarrow 0$  および  $ba\rightarrow\infty$  となるにつれて二次, 三次理論ともにこの値に近づく。また, 平面応力理論と二次, 三次理論との差が最も大きくなるのは,  $ba\approx 2\sim 3$  (あるいは  $2b/l\approx 2/\pi\sim 3/\pi$ ) のときであり, これは载荷波幅  $l$  と板厚  $2b$  が同程度のときであることを示している。

Fig. 3に平面応力理論では存在しない  $\max \tau_{xz}/\sigma_0$  および  $\min \tau_{xz}/\sigma_0$  を示した。 $\tau_{xz}$ の最大値は  $ba\approx 3$ の付近で生じるが, これより大きな  $ba$  (したがって, 载荷波幅  $l$  は板厚に比べ小さくなる) に関してもこの補正は無視できないものとなっている。平面ひずみ理論での  $\tau_{zz}$  の値は, 直ひずみ  $\epsilon_z$  が常に 0 になることから,  $\nu(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = 2\nu\sigma_0$  で表わせるので,  $\nu=0.3, 0.5$  のときの  $\tau_{zz}/\sigma_0$  値はそれぞれ 0.6, 1.0 となる。これに対して二次, 三次理論では,  $ba\rightarrow\infty$  となるにつれてそれぞれ  $\nu=0.3$  のとき 0.8, 0.5;  $\nu=0.5$  のとき 1.3, 0.8 となっている。このことは, 本理論の  $\tau_{zz}$  は板厚に比べ载荷波幅  $l$  が十分小さくなるに従い, 平面応力状態よりもむしろ平面ひずみ状態に近い分布を示しているとみることができる。換言すれば,  $\tau_{zz}$  についての通常平面応力解はこれほど大きな誤差を含んでいるといえる。

なお, ここでは, 一次理論(平面応力解析)から三次理論(現在の最高次修正理論)までを用い, 平面応力状態( $ba=0$ )から平面ひずみ状態( $ba=\infty$ )へ移行する全範囲にわたる傾向を調べたが, 本理論は, 平面応力解析の三次元補正を, 順次, 高次の成分まで考慮して行ったものであることから,  $ba$  の値が大きくなるに従って, より高次の理論に基づく解析が必要となることがわかる。また,  $ba$  の小さい領域における一次~三次理論の解析結果から推して, そのような理論次数の高次化に伴い, 各次数の理論が同一値を与える  $ba$  の範囲が増大していく

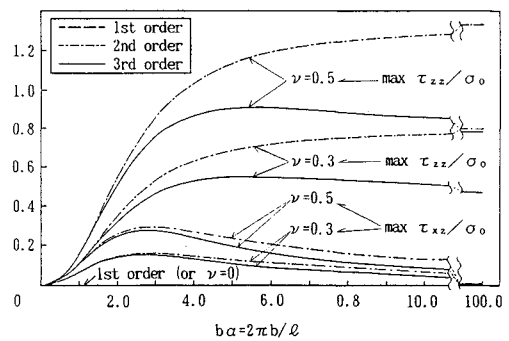


Fig. 3 Maximum and minimum values of  $\tau_{zz}/\sigma_0$  and  $\tau_{xz}/\sigma_0$  at the edge ( $y=0$ ) for the case of Fig. 1.

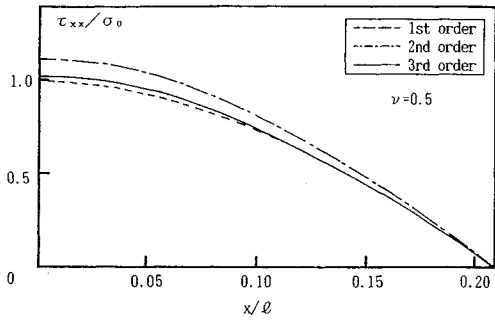


Fig. 4 Distributions of  $\tau_{xx}/\sigma_0$  at the edge ( $y=0$  and  $z=0$ ) with  $ba=2\pi b/l=4.0$  for the case of Fig. 1.

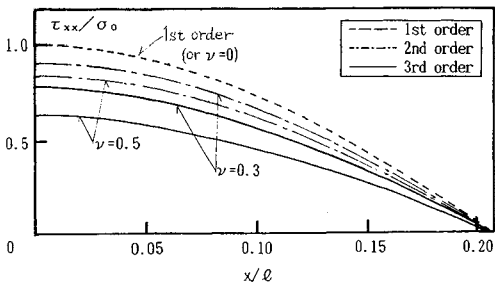


Fig. 5 Distributions of  $\tau_{xx}/\sigma_0$  at the edge ( $y=0$  and  $z=b$ ) with  $ba=2\pi b/l=4.0$  for the case of Fig. 1.

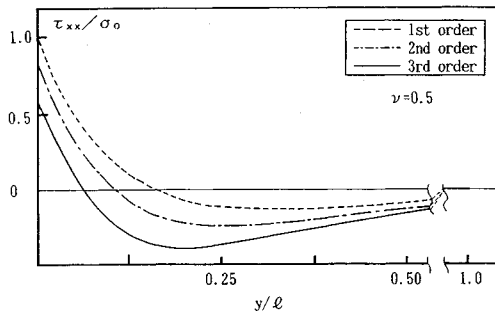


Fig. 6 Distributions of  $\tau_{xx}/\sigma_0$  toward the interior region ( $x=0$  and  $z=b$ ) with  $ba=2\pi b/l=4.0$  for the case of Fig. 1.

傾向を示し、かつ、その収束値が、厳密解を与えるものと考えられる。

次に、Fig. 4 および Fig. 5 は端部  $y=0$  における  $\tau_{xx}/\sigma_0$  を  $x$  方向に沿って描いたものである。これらの図はいずれも  $ba=4.0$  に設定したものを選んでいるが、ここには示していない  $\xi=z/b=0.25$  および  $0.5$  の場合の結果を併せて考慮すると、 $\xi$  の値が同一のときにはポアソン比  $\nu$  の大きい方が、理論次数（オーダー）の違いによる差も大きくなり、また板厚方向の変化についてみれば、中央面 ( $\xi=0$ ) から表面 ( $\xi=1$ ) になるにつれて、理論次数の

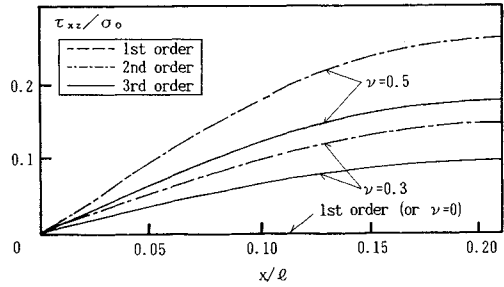


Fig. 7 Distributions of  $\tau_{xx}/\sigma_0$  at the edge ( $y=0$  and  $z=0.50$ ) with  $ba=2\pi b/l=4.0$  for the case of Fig. 1.

違いによる差が増大していくことを示している。Fig. 6 は、 $x=0$  における  $\tau_{xx}/\sigma_0$  を板の奥行 ( $y$ ) 方向に沿って描いたものである。載荷波幅  $l$  のわずか  $0.1l$  程度中に入ると、応力は半減し、負の値になりながら減衰していく。また板の中央面 ( $\xi=0$ ) よりも表面 ( $\xi=1$ ) で、比較的大きな負の応力が生じていくことが、ここには示していない結果から認められている。Fig. 7 には面外せん断応力  $\tau_{xz}$  の分布を示したが、面内応力の変化状態に比べ、理論次数およびポアソン比の違いによる差が（相対的な比としてとった場合）大きく現われていることが明らかである。

なお、この問題は Clark によって取り上げられているが<sup>10)</sup>、その結果はここでの二次理論に相当するものであり、したがって数値結果は Clark のものと著者らの二次理論によるものとは完全に一致しているのはいままでのない。

(2) 端部に面内せん断応力を受ける半無限板

ここでは Fig. 8 に示したような周期的に変動する面内せん断応力（厚さ方向の変化はない）が作用する問題を考える。このときの境界条件は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0, z) &= \sigma_0 \sin(ax), \\ \tau_{yz}(x, 0, z) &= \tau_{yz}(x, 0, z) = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

この場合も (1) の場合と同様にして応力が計算できる。たとえば Fig. 9 は、 $ba$ 、ポアソン比  $\nu$  を変化させたときの端部表面での  $\max \tau_{xx}/\sigma_0$ 、 $\min \tau_{xx}/\sigma_0$  を示したものである。この図は先にみた Fig. 2 とほぼ同様の分布形となっている。すなわち、これらの応力は載荷荷重として直応力を受けても、せん断応力を受けても板に生じる応力分布形はよく似た傾向のものになることが指摘できる。しかしながら、ここには示されていないが、Fig. 8 のようにせん断応力  $\tau_{xy}$  を載荷荷重としている場合は、Fig. 1 のように直応力  $\tau_{yz}$  を載荷荷重としている場合よりも奥行 ( $y$ ) 方向への応力の減衰傾向が大きくなっていく、つまり作用荷重として、同じ大きさの直応力とせん断応力が載荷した場合には、直応力を載荷した場合の方が、板内部の受ける影響は大きい傾向を示す。

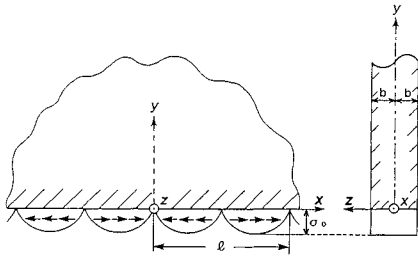


Fig. 8 Semi-Infinite elastic plate with a sinusoidal tangential edge load (In-plane problem II).

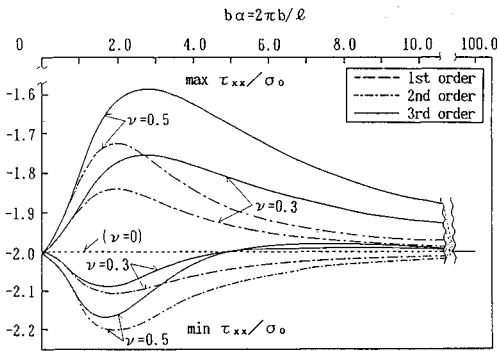


Fig. 9 Maximum and minimum values of  $\tau_{xx}/\sigma_0$  at the edge ( $y=0$ ) for the case of Fig. 8.

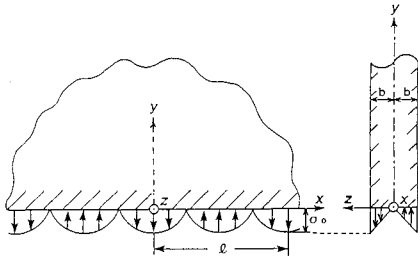


Fig. 10 Semi-Infinite elastic plate with a sinusoidal normal bending edge load (Out-of-plane problem I).

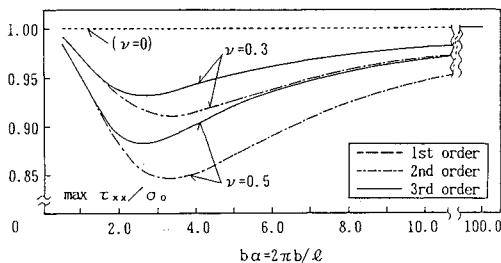


Fig. 11 Maximum and minimum values of  $\tau_{xx}/\sigma_0$  at the edge ( $y=0$ ) for the case of Fig. 10.

(3) 端部に面外力(曲げ)を受ける半無限板(その1)

ここでは Fig. 10 のように、半無限板の端面に板厚方向には中央面に関して直線変化し、 $x$  方向には周期的に変動する面内直応力が作用する問題を取り上げる。この場合の境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yy}(x, 0, z) &= \sigma_0 \zeta \cos(ax), \\ \tau_{xy}(x, 0, z) &= \tau_{yz}(x, 0, z) = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

この問題はいわゆる自己つり合い荷重状態の曲げモーメントが作用する場合のものである。解析手順は(1)および(2)と同様である。結果の一例として、Fig. 11 に板厚・載荷波形比  $ba=2\pi b/l$  とポアソン比  $\nu$  を変化させたときの  $\max \tau_{xx}/\sigma_0$  を端面  $y=0$  について描いた図を示した。これによると、 $ba \rightarrow 0$  または  $ba \rightarrow \infty$  になるにつれて二次、三次理論とも 1 に近づく。一次理論との差が最も大きくなるのは、(1)の場合と同様に  $ba \approx 2.5 \sim 3.5$  (あるいは  $2b/l \approx 2.5/\pi \sim 3.5/\pi$ ) のとき、すなわち、載荷波形幅  $l$  と板厚  $2b$  がほぼ同程度のときであることがわかる。

(4) 端部に面外力(曲げ)を受ける半無限板(その2)

最後の計算例として、Fig. 12 のような問題を取り上げ

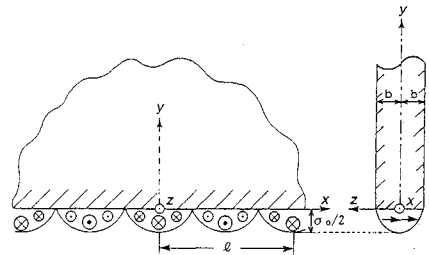


Fig. 12 Semi-Infinite elastic plate with a sinusoidal anti-plane shear edge load (Out-of-plane problem II).

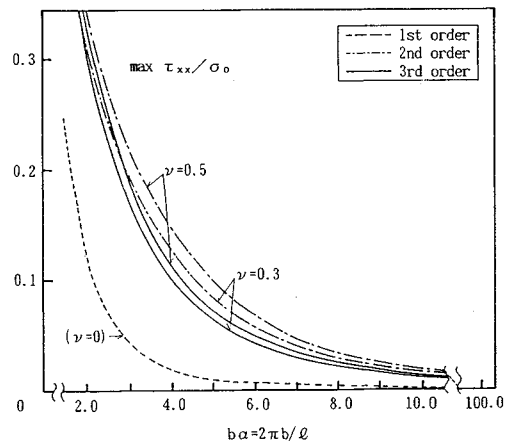


Fig. 13 Maximum and minimum values of  $\tau_{xx}/\sigma_0$  at the edge ( $y=0$ ) for the case of Fig. 12.

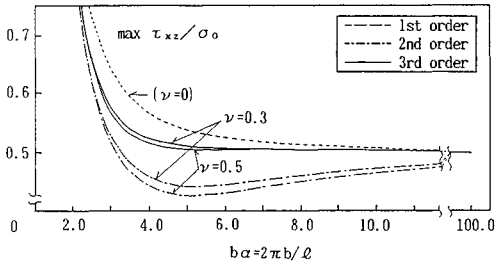


Fig. 14 Maximum and minimum values of  $\tau_{xz}/\sigma_0$  at the edge ( $y=0$ ) for the case of Fig. 12.

ると、この場合の境界条件は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}(x, 0, z) &= \frac{1}{2}\sigma_0(\nu^2 - 1)\cos(ax), \\ \tau_{xy}(x, 0, z) &= \tau_{xy}(x, 0, z) = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

Fig. 13 および Fig. 14 には、 $b\alpha$  およびポアソン比  $\nu$  を変化させたときの端部  $y=0$  における  $\max \tau_{xz}/\sigma_0$  および  $\min \tau_{xz}/\sigma_0$  を示した。これらの図によれば、各応力とも、 $b\alpha \approx 2 \sim 3$  あるいは  $2b/l \approx 2/\pi \sim 3/\pi$  程度から急激に増加しはじめる。つまり、載荷波形幅が板厚と同程度かまたは、それより大きくなると応力が急増することを表わしている。

Fig. 15 および Fig. 16 は、面内応力  $\tau_{xx}$  について、端部表面 ( $x$ ) 方向と奥行 ( $y$ ) 方向に沿って描いたものである。これらの図から、ポアソン比が大きくなるほど理論次数間の差が増大することが指摘できる。

5. 結 言

本論文では、著者らの提案になる応力および変位仮定を基本とした平板の一般化高次理論を、平板応力問題に適用し、三次元弾性論による立場から補正・検討を試みた。この補正に関連した理論式を、解析の見通しを良くするために導入した断面力関数と二次元の Laplace 演算子から成る微分方程式系に帰着させた。また、本理論の拡張として、面外力(曲げ)を受ける板にも、面内問題に対応する理論式を作成し、その適用を試みた。

以上の研究結果をまとめると次のようになる。

- (1) 本理論は採用項数に制限を受けないので、任意次数の理論式を誘導することができる。
- (2) 本論文の三次理論に比較して、平面応力解(本論文の一次理論)は、載荷波形幅に対する板厚の比  $b\alpha = 2\pi b/l$  が小さいときには、十分有効であることが確認された。
- (3) 載荷波形幅  $l$  と板厚  $2b$  が同程度になると、本論文の三次理論は平面応力解に比べ最大応力値で 10~20% 大きくなる。
- (4) 面外直応力  $\tau_{zz}$  については、 $b\alpha \rightarrow \infty$  になるにつ

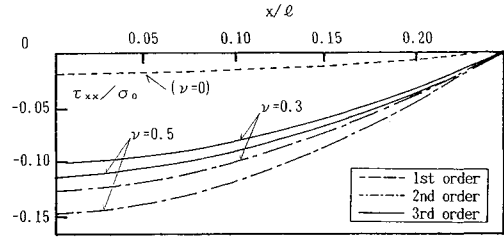


Fig. 15 Distributions of  $\tau_{xx}/\sigma_0$  at the edge ( $y=0$  and  $z=b$ ) with  $b\alpha=2\pi b/l=4.0$  for the case of Fig. 12.

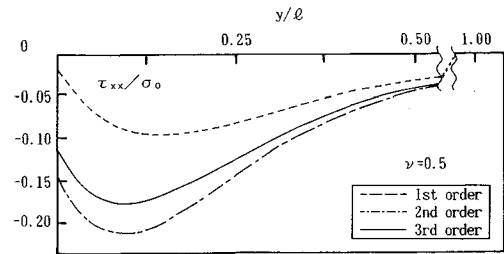


Fig. 16 Distributions of  $\tau_{xx}/\sigma_0$  toward the interior region ( $x=0$  and  $z=b$ ) with  $b\alpha=2\pi b/l=4.0$  for the case of Fig. 12.

れて、本論文の三次理論と一次理論(平面応力解)の差が著しく現われる。

(5) 平面応力解(一次理論)では、応力が板厚( $z$ )方向に一樣に分布するが、本論文の二次、三次理論によれば、それぞれ放物線分布、三次曲線分布まで考慮した高次の分布形が得られる。

(6) ポアソン比の影響については、その値が大きいほど平面応力解との差も大きく現われる。

(7) 板の奥行( $y$ )方向に載荷波形幅  $l$  の  $1/2$  くらいの中に入ると、すべての応力は波形振幅  $\sigma_0$  の 20% 以下になり、Saint-Venant の端部効果が現われている。

また、面外問題から

(8) 荷重状態によっては、載荷波形幅が板厚と同程度か、それより大きくなる(すなわち、 $b\alpha$  は小さくなる)と、応力が急激に増加し始める。

参 考 文 献

- 1) Reissner, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 12, pp. A69~A77, 1945.
- 2) Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31~38, 1951.
- 3) 平島健一・根岸嘉和：板厚方向の成分を考慮した代表的な 2 次元化平板理論の精度に関する考察，土木学会論文集，No. 330, pp. 1~14, 1983.



- 4) 平島健一・根岸嘉和：数種の平板理論の動特性（自由振動と分散特性）に関する研究，土木学会論文集，No. 333，pp. 21～34，1983.
  - 5) 根岸嘉和・平島健一：最近の代表的な線形平板理論の発展とそれらの位置づけ，山梨大学工学部研究報告，No. 36，pp. 119～125，1985.
  - 6) 平島健一・根岸嘉和：混合型仮定による静的・動的平板理論とその精度，山梨大学工学部研究報告，No. 37，pp. 33～44，1986.
  - 7) 平島健一・根岸嘉和：応力および変位仮定に基づく平板の一般化高次理論の定式化，土木学会論文集，No. 350/I-2，pp. 351～354，1984.
  - 8) Reissner, E.: A twelfth order theory of transverse bending of transversely isotropic plates, ZAMM, Vol. 63, pp. 285～289, 1983.
  - 9) Clark, R.A. and Reissner, E.: A tenth-order theory of stretching of transversely isotropic sheets, J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP), Vol. 35, pp. 883～889, 1984.
  - 10) Clark, R.A.: Three-dimensional corrections for a plane stress problem, Int. J. Solids and Structures, Vol. 21, pp. 3～10, 1985.
  - 11) 古賀達蔵：平板曲げに関する高次理論の定式，日本機械学会論文集(A編)，Vol. 48, No. 433, pp. 1151～1159, 1982；古賀・遠藤：弾性平板の高次理論への試み，同，Vol. 48, No. 430, pp. 818～826, 1982.
  - 12) Reissner, E.: On a generalization of some formulas of the theory of “moderately thick” elastic plates, Int. J. Solids and Structures, Vol. 23, pp. 711～717, 1987.  
(1989. 1. 31・受付)
-