

投稿論文
Paper
(In Japanese)

有限フーリエ級数を用いた内挿関数と二次元境界要素への応用

INTERPOLATION FUNCTIONS USING THE FINITE FOURIER SERIES AND THEIR APPLICATIONS TO TWO DIMENSIONAL BOUNDARY ELEMENTS

草間孝志*・大上俊之**・三井康司***

By Takashi KUSAMA, Toshiyuki OHKAMI and Yasushi MITSUI

Interpolation functions using finite Fourier series are formulated and their applications to two dimensional boundary elements are proposed.

Interpolation functions proposed here are derived by calculating the finite Fourier series of relative displacement and traction vectors between adjacent two nodes on the boundary. These interpolation functions may vary in higher order, including linear variation.

Numerical examples are examined to evaluate the efficiency of the proposed method.

Keywords: interpolation functions, finite Fourier series, boundary element method

1. ま え が き

近年、境界要素法が工学上の種々の問題に適用され^{1),2)}、著者らもその有用性について報告している^{3)~7)}。

曲線境界を有する問題を境界要素法を用いて解く場合、物体の形状と未知量の関数形をできるだけ忠実に表現することによって、解の精度の向上を図ることができ、また節点数を少なくすることができる。そのため、従来2次要素、3次要素あるいはスプライン関数⁸⁾等を用いた高次要素が広く用いられている。

本研究は有限フーリエ級数による内挿関数の誘導と、その二次元境界要素法への応用ならびにその有効性について論じたものである。

周知のごとく、フーリエ解析は工学、科学分野において従来より幅広く用いられているが^{9),10)}、有限フーリエ級数を内挿関数に用いた例としては、有限帯板法への適用^{11),12)}には多くみられるものの、他の例としては Chakrabarti の有限要素法の平板の解析¹³⁾や、軸対称問題に

対する応用等^{14),15)}があるにすぎない。

物体の境界形状あるいは未知量を直接有限フーリエ近似した場合、主として2つの問題点が考えられる。第1の問題点は単純かつ基本的な線形変化を表現することができないことであり、第2の問題点は開曲線要素の場合、始点と終点の近傍にリンク効果¹⁶⁾が現われることである。これらの問題点を解決するため、本文では次のようにした。

まず、第1の問題に対しては、採用した内挿関数は節点間ベクトルを有限フーリエ近似することにより誘導したもので、得られた内挿関数は線形変化を包含するものである。したがって、解が線形変化する問題に対しては適用することができる。

次に第2の問題に対しては、実際の計算には関与しないダミー点を要素の終点に数点設け、内挿関数を誘導する。これによって要素の始点と終点の相互関係は断ち切れ、リンク効果を除去することができる。

このようにして誘導された内挿関数を用いれば、連続な閉曲線境界の場合には、要素内の節点数に相当するいわゆる高次の1要素からなる境界として表現することができ、また、部分的に連続な開曲線の集合からなる境界の場合には、リンク効果を除去したいいくつかの要素からなる境界として取り扱うことができる。この場合にも、

* 正会員 工博 信州大学教授 工学部社会開発工学科
(〒380 長野市若里 500)

** 正会員 工修 信州大学助手 工学部社会開発工学科
(同上)

*** 正会員 工博 信州大学教授 工学部社会開発工学科
(同上)

各要素はそれぞれの要素が含む節点数に対応した次数の高次要素となるから、より少ない節点数で精度の良い解が期待できる。

2. 有限フーリエ近似による内挿関数

(1) フーリエ近似

いま、Fig. 1 に示すように境界上に設けた任意の曲線要素について考える。この要素は 0 から n までの $n+1$ 個の節点を含んでいるものとし、要素内の節点 j の x , y 方向の変位をそれぞれ u_j, v_j とする。

節点間の相対変位の成分を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} U_j &= u_{j+1} - u_j, \quad (j=0, 1, \dots, n-1) \\ V_j &= v_{j+1} - v_j, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、相対変位の x 成分 U_j を有限フーリエ級数で表現すると

a) n が偶数の場合

$$U_j = \frac{A_{x0}}{2} + \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[A_{xk} \cos\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) + B_{xk} \sin\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) \right] + \frac{A_{xn/2}}{2} \cos(\pi j) \dots\dots\dots (2\cdot a)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_{xk} &= \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[U_j \cos\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) \right] \quad (k=0, 1, \dots, n/2) \\ B_{xk} &= \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[U_j \sin\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) \right] \quad (k=1, \dots, n/2-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3\cdot a)$$

b) n が奇数の場合

$$U_j = \frac{A_{x0}}{2} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left[A_{xk} \cos\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) + B_{xk} \sin\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) \right] \dots\dots\dots (2\cdot b)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_{xk} &= \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[U_j \cos\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) \right] \quad (k=0, 1, \dots, (n-1)/2) \\ B_{xk} &= \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[U_j \sin\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) \right] \quad (k=0, 1, \dots, (n-1)/2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3\cdot b)$$

である。なお、 A, B の第 1 添字の x は x 成分 U に関

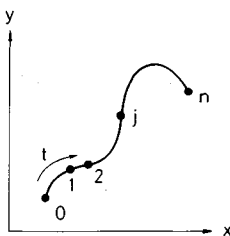


Fig. 1 An arbitrary curved element.

するフーリエ係数であることを示す。

V に対しては式 (2), (3) で U を V に、 x を y に置き換えればよい。

式 (1) より、 u_j, v_j は、

$$\left. \begin{aligned} u_j &= u_0 + \sum_{r=0}^{j-1} U_r \\ v_j &= v_0 + \sum_{r=0}^{j-1} V_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

となるから、式 (2\cdot a) を式 (4) へ代入し整理すると、たとえば u_j は、

$$\begin{aligned} u_j &= u_0 + \frac{A_{x0}}{2} j + \frac{A_{xn/2}}{4} [1 - \cos(\pi j)] \\ &+ \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[\frac{\sin(j\lambda_k)}{\sin \lambda_k} [A_{xk} \cos[(j-1)\lambda_k] \right. \\ &\left. + B_{xk} \sin[(j-1)\lambda_k]] \right] \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

となる。ここに

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{n} \dots\dots\dots (6)$$

である。

式 (5) で離散値 j を実数 t とおいて、離散値 u_j を連続な $u(t)$ にすると、次式を得る。

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + \frac{A_{x0}}{2} t + \frac{A_{xn/2}}{4} [1 - \cos(\pi t)] \\ &+ \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[\frac{\sin(t\lambda_k)}{\sin \lambda_k} [A_{xk} \cos[(t-1)\lambda_k] \right. \\ &\left. + B_{xk} \sin[(t-1)\lambda_k]] \right] \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

一方、 n が偶数のとき、式 (3\cdot a) は式 (1) の第 1 式を用いると、次のようになる。

$$\begin{aligned} A_{xk} &= \frac{2}{n} \left[-u_0 + u_n \cos(2\lambda_k) \right. \\ &\left. + 2 \sin \lambda_k \sum_{j=1}^{n-1} [u_j \sin[(2j-1)\lambda_k]] \right] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{xk} &= \frac{2}{n} \left[-u_n \sin(2\lambda_k) \right. \\ &\left. - 2 \sin \lambda_k \sum_{j=1}^{n-1} [u_j \cos[(2j-1)\lambda_k]] \right] \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

以上の式 (7), (8), (9) をマトリックス表示すると

$$u(t) = u_0 + |\phi|^T |A_x| \dots\dots\dots (10)$$

$$|A_x| = [\alpha] |u| \dots\dots\dots (11)$$

を得る。同様にして

$$v(t) = v_0 + |\phi|^T |A_y| \dots\dots\dots (12)$$

$$|A_y| = [\alpha] |v| \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$|\phi|^T = [\phi_0 \ \phi_0 \ \phi_1 \ \phi_1 \ \dots \ \phi_n \ \phi_n] \dots\dots\dots (14)$$

$$|A_x| = [A_{x0} \ B_{x0} \ A_{x1} \ B_{x1} \ \dots \ A_{xn} \ B_{xn}]^T \dots\dots\dots (15)$$

$$[A_{yj}] = [A_{y0} \ B_{y0} \ A_{y1} \ B_{y1} \ \dots \ A_{yN} \ B_{yN}]^T \dots\dots\dots(16)$$

$$|u| = [u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_n]^T \dots\dots\dots(17)$$

$$|v| = [v_0 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_n]^T \dots\dots\dots(18)$$

$$[a] = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} & \dots & \alpha_{0n} \\ \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} & \beta_{03} & \dots & \beta_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{kj} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_{kj} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \\ \beta_{n0} & \beta_{n1} & \beta_{n2} & \beta_{n3} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(19)$$

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{n}{2}, \quad \phi_0 = \frac{t}{2}, \quad \psi_0 = 0 \\ \phi_k &= \frac{\sin(t\lambda_k) \cos[(t-1)\lambda_k]}{\sin \lambda_k} \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \\ \psi_k &= \frac{\sin(t\lambda_k) \sin[(t-1)\lambda_k]}{\sin \lambda_k} \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \\ \phi_N &= \frac{1 - \cos(t\pi)}{4}, \quad \psi_N = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{k0} &= -\frac{2}{n}, \quad \beta_{k0} = 0 \\ \alpha_{kj} &= \frac{4}{n} \sin[(2j-1)\lambda_k] \sin \lambda_k \\ &\quad (j=1, 2, \dots, n-1) \\ \beta_{kj} &= -\frac{4}{n} \cos[(2j-1)\lambda_k] \sin \lambda_k \\ &\quad (j=1, 2, \dots, n-1) \\ \alpha_{kn} &= \frac{2}{n} \cos(2\lambda_k) \\ \beta_{kn} &= -\frac{2}{n} \sin(2\lambda_k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

である。なお、 λ_k は式 (6) で与えられる。
 n が奇数の場合には、

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{n-1}{2}, \quad \phi_0 = \frac{t}{2}, \quad \psi_0 = 0 \\ \phi_k &= \frac{\sin(t\lambda_k) \cos[(t-1)\lambda_k]}{\sin \lambda_k} \quad (k=1, 2, \dots, N) \\ \psi_k &= \frac{\sin(t\lambda_k) \sin[(t-1)\lambda_k]}{\sin \lambda_k} \quad (k=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20 \cdot b)$$

となり、式 (19), (21) は n が奇数の場合にも成立する。
 $[A_{xj}]$, $[A_{yj}]$ はフーリエ係数ベクトルであり、 $[a]$ は n のみによって定まるから、全要素について n を等しくとれば、 $[a]$ はすべての要素に対して一定なマトリックスとなる。

いま、内挿関数を $|\Phi|$ とすると

$$u(t) = [\Phi_0 \ \Phi_1 \ \dots \ \Phi_j \ \dots \ \Phi_n] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = |\Phi|^T |u| \dots\dots\dots(22)$$

同様に
 $v(t) = |\Phi|^T |v| \dots\dots\dots(23)$

一方、式 (10), (11) および式 (12), (13) より
 $|\Phi|^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] + |\phi|^T [a] \dots\dots\dots(24)$

よって
 $\Phi_j = \langle 1 \rangle_{j=0} + \sum_{k=0}^N (\phi_k \alpha_{kj} + \psi_k \beta_{kj}) \dots\dots\dots(25)$

を得る。ここに、 $\langle 1 \rangle_{j=0}$ は Φ_0 にのみ 1 を加えることを意味する。なお、 Φ_j は変数 t に依存し、 t は Fig. 1 に示すように $0 \leq t \leq n$ を満足する実数である。

式 (25) を計算し、整理すると次式を得る。

a) n が偶数の場合

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} - t - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin[(2t-1)\lambda_k]}{\sin \lambda_k} \right] \\ &\quad + \frac{\cos(t\pi)}{2n} \\ \Phi_j(t) &= f_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \\ \Phi_n(t) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} + t + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin[(2t+1)\lambda_k]}{\sin \lambda_k} \right] \\ &\quad + \frac{\cos(t\pi)}{2n} \\ f_j(t) &= \frac{\sin(n\zeta_j)}{n \sin \zeta_j} \cos \zeta_j, \quad N = \frac{n}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26 \cdot a)$$

b) n が奇数の場合

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} - t - \sum_{k=1}^N \frac{\sin[(2t-1)\lambda_k]}{\sin \lambda_k} \right] \\ \Phi_j(t) &= f_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \\ \Phi_n(t) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} + t + \sum_{k=1}^N \frac{\sin[(2t+1)\lambda_k]}{\sin \lambda_k} \right] \\ f_j(t) &= \frac{\sin(n\zeta_j)}{n \sin \zeta_j}, \quad N = \frac{n-1}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26 \cdot b)$$

ここに、
 $\zeta_j = \frac{(t-j)\pi}{n} \dots\dots\dots(27)$

である。なお、式 (26) において

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(t) + \Phi_n(t) &= \Phi_{n-1}(n-t) \\ \Phi_0(t) + \Phi_n(t) &= f_0 = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t) \cos(\pi t/n)}{n \sin(\pi t/n)} \\ \quad (n = \text{even}) \\ \frac{\sin(\pi t)}{n \sin(\pi t/n)} \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \quad \quad \quad (n=\text{odd}) \\ \Phi_n(t) &= -\Phi_0(t+1) \\ \Phi_j(j+t) &= \Phi_j(j-t) \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \\ \Phi_{j+k}(t+k) &= \Phi_j(t) \quad (j \neq 0, j \neq n, j+k \neq 0, j+k \neq n) \\ & \dots\dots\dots(28) \end{aligned} \right\}$$

が成立する。これらの関係は数値積分の際に用いることができる。なお、付録に示すように次式が成立する。

$$\sum_{j=0}^n \Phi_j(t) = 1, \quad \sum_{j=0}^n j \Phi_j(t) = t \dots\dots\dots(29)$$

特別な場合として、 $n=1$ とおくと式 (26・b) より次式を得る。

$$\Phi_0(t) = 1-t, \quad \Phi_1(t) = t \dots\dots\dots(30)$$

上式は線形要素に対する内挿関数にはかならない。

さらに、 $u_j = u_0 + aj$ ($a = \text{const.}$) の場合には次式が成立する。

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{j=0}^n \Phi_j u_j = u_0 \sum_{j=0}^n \Phi_j + a \sum_{j=0}^n j \Phi_j \\ &= u_0 + at \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

式 (30) および式 (31) より、本文で求めた内挿関数は線形関係を包含したものであることがわかる。

(2) 連続な閉曲線境界の場合

$u_n = u_0$ であるから、 $\Phi_0(t) + \Phi_n(t)$ を $\Phi_0(t)$ とおくと

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= [\Phi_0 \ \Phi_1 \ \dots \ \Phi_{n-1}] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \\ \Phi_j(t) = f_j(t) &= \begin{cases} \frac{\sin(n\zeta_j)}{n \sin \zeta_j} \cos \zeta_j & (n=\text{even}) \\ \frac{\sin(n\zeta_j)}{n \sin \zeta_j} & (n=\text{odd}) \end{cases} \\ & \quad (j=0, 1, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

を得る。式 (32) を用いて $n=6$ に対する内挿関数 Φ_0 および Φ_1 の例を Fig. 2 に示す。

得られた内挿関数を検証するため、Cassini 線¹⁷⁾に適

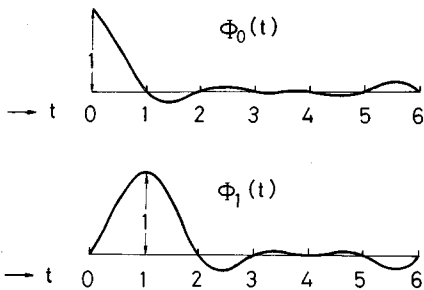


Fig. 2 Interpolation functions Φ_0 and Φ_1 ($n=6$).

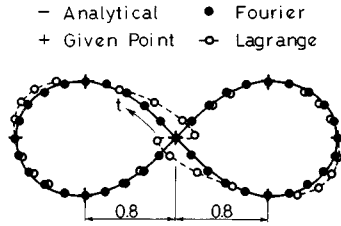


Fig. 3 Lemniscate.

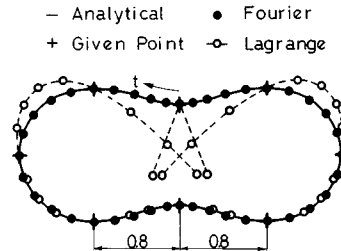


Fig. 4 Cassini's oval.

用した。Cassini 線は $(x^2 + y^2)^2 - 2A^2(x^2 - y^2) = C^4 - A^4$ で与えられる。この式は $C=A$, $A^2 < C^2 < 2A^2$, $C^2 > 2A^2$ によって曲線の形状が異なる。Fig. 3 は $A=C=1$ の場合であり、曲線は Lemniscate になる。Fig. 4 は $A=1$, $C=1.1$ の場合である。

これらの図よりフーリエ級数の内挿関数による値は、ラグランジュ内挿式を用いた値に比べ正解によく一致していることがわかる。

(3) 開曲線境界の場合

有限フーリエ級数は曲線が開曲線の場合、曲線の始点と終点との接続によるリンク効果が現われる。そのため開曲線境界の場合には、始点と終点の近傍で誤差が生ずる。これを除去するには終点に数個のダミー点を設ければよい。

いま、要素の終点と同じ値をもつ n_1 個の点を追加すると、式 (22) は次のようになる。

$$\begin{aligned} u(t) &= [\Phi_0 \ \Phi_1 \ \dots \ (\Phi_n + \dots + \Phi_{n+n_1})] \cdot [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_n]^T \\ &= [\Psi]^T \{u\} \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

ここに、

a) $m (= n + n_1)$ が偶数の場合

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{2} - t - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin[(2t-1)\lambda_k]}{\sin \lambda_k} \right] \\ & \quad + \frac{\cos(t\pi)}{2m} \\ \Psi_j(t) &= f_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \\ \Psi_n(t) &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \Psi_j(t) \\ f_j(t) &= \frac{\sin(m\zeta_j)}{m \sin \zeta_j} \cos \zeta_j, \quad N = \frac{m}{2} \end{aligned} \right\}$$

.....(34·a)

b) $m (=n+n_1)$ が奇数の場合

$$\Psi_0(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{2} - t - \sum_{k=1}^N \frac{\sin[(2t-1)\lambda_k]}{\sin \lambda_k} \right]$$

$$\Psi_j(t) = f_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, n-1)$$

$$\Psi_n(t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \Psi_j(t)$$

$$f_j(t) = \frac{\sin(m\xi_j)}{m \sin \xi_j}, \quad N = \frac{m-1}{2}$$

.....(34·b)

ここに,

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{m}, \quad \xi_j = \frac{(t-j)\pi}{m} \dots\dots\dots(35)$$

である。

式(34)を用いて、 $n_1=4$ としたときの $n=6$ ($m=10$) に対する内挿関数 Ψ_0 および Ψ_1 の例を Fig. 5 に示す。Fig. 2 に比べて両端の微分係数が異なり端点近傍にみられたリンク効果の影響が消去されていることがわかる。

3. 数値計算例

(1) 単一円孔を有する平板

最初の計算例として、Fig. 6 に示すような単一円孔を有する平板に引張力が作用する場合について解析を行う。

内挿関数に有限フーリエ級数を応用した場合、直線部に4個の開曲線要素、円孔部に1個の閉曲線要素を用い

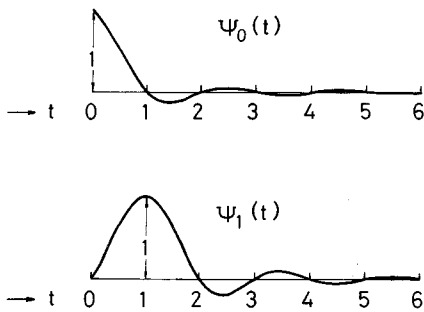


Fig. 5 Interpolation functions Ψ_0 and Ψ_1 ($n_1=4, n=6$).

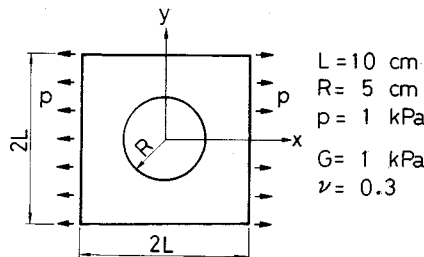


Fig. 6 An elastic plate with a hole.

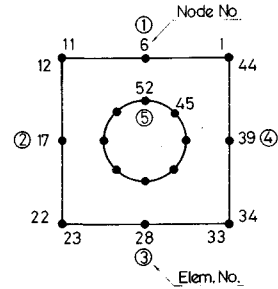


Fig. 7 Boundary element mesh division.

Table 1 Input data.

| Case | Number of Nodes | Number of Elements | Ratio | |
|------|-----------------|--------------------|-------|---------|
| | | | Node | Element |
| 1 | 524 | 524 | 10.1 | 104.8 |
| 2 | 68 | 68 | 1.3 | 13.6 |
| 3 | 136 | 68 | 2.6 | 13.6 |
| 4 | 52 | 5 | 1.0 | 1.0 |

Case 1: Linear (fine), Case 2: Linear (coarse)
Case 3: Quadratic, Case 4: Fourier

ることによって、わずかに5個の要素だけでこのモデルを表現することができる (Fig. 7).

線形要素、2次要素を用いた解との比較によって、提案する要素の精度の検討を行う。なお、本計算例の場合、厳密解が明らかではないので、細分割した線形要素による解を正解値とみなすことにする。境界要素の数値積分は、線形要素および2次要素部分でガウスの4点積分とし、フーリエ要素部分では節点数が少ないゆえ12点積分とする。かど点にはすべて2重節点を用いる。

各要素に対する入力データ量の比較を Table 1 に示すが、これより、有限フーリエ級数を応用することによってきわめて少ない入力データ量ですむことがわかる。

y 軸上の内点の x 方向の応力分布を Fig. 8 に示す。横軸は内点の y 座標を表わし、左端が円孔部の境界、右端が直線部の境界を表わす。線形要素、2次要素を用いた場合には境界近傍において結果が乱れているのに対し、フーリエ要素ではそのようなことはなく、全体にわたって滑らかな解が得られている。

次に、リンク効果を消去したフーリエ要素の有効性について検討する。Fig. 6 に示す外側の直線部境界のように、部分的に連続なくつかの曲線からなる形状に対してフーリエ要素を適用する場合には、複数の開曲線要素によって境界を表現することになる。その場合、普通のフーリエ要素をそのまま適用すると、フーリエ級数の性質上、要素の始点と終点の近傍にリンク効果が現われる。

Fig. 9, 10 は、直線部境界に設けたダミー点の数による計算結果への影響を示したものである。両図とも横軸

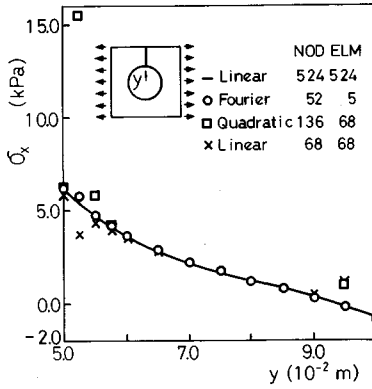


Fig. 8 Internal stresses σ_x along the y axis.

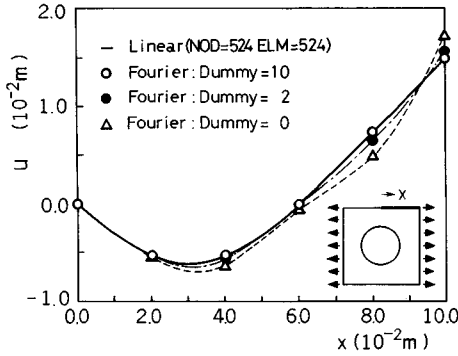


Fig. 9 Horizontal displacements at the surface.

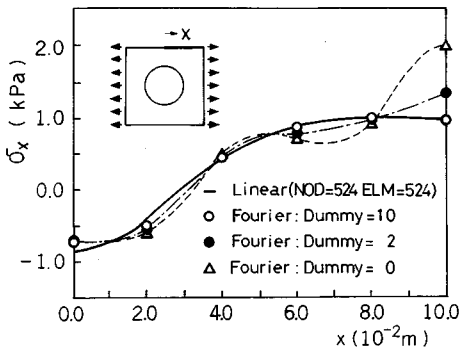


Fig. 10 σ_x values at the surface.

は x 方向の座標値で左端が最小断面部、右端が直線部のかど点であり、Fig. 9の縦軸は直線境界上の x 方向の変位 u を、Fig. 10の縦軸は同じ境界上の応力 σ_x を示す。
 ダミー点を設けない普通のフーリエ要素 (Dummy=0) では、要素の端でリンク効果の影響により値が大きすぎて、ダミー点を設けた要素を用いれば、リンク効果は消去され、解が改善されることがわかる。
 この例の場合、数個のダミー点を設ければ、それ以上ダミー点の数を増やしても計算結果はさほど変化しない。このことから、以後の計算例では、リンク効果を消

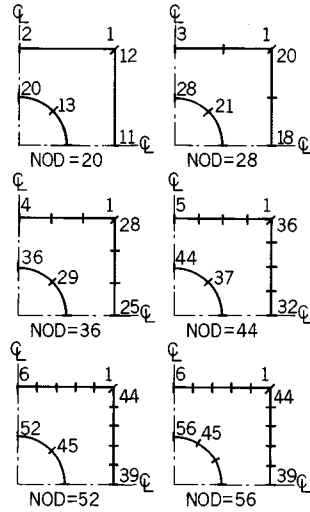


Fig. 11 Mesh division.

Table 2 Comparison of calculated results.

| Number of Nodes | $x=10, y=10$ | | $x=7.07, y=7.07$ | |
|-----------------|--------------|------------|------------------|------------|
| | σ_x | σ_y | σ_x | σ_y |
| 20 | -0.667 | 4.499 | 0.617 | 0.617 |
| 28 | 1.366 | 2.820 | 0.705 | 0.705 |
| 36 | 1.465 | 2.727 | 0.701 | 0.701 |
| 44 | 1.489 | 2.704 | 0.701 | 0.701 |
| 52 | 1.495 | 2.699 | 0.701 | 0.701 |
| 56 | 1.510 | 2.686 | 0.687 | 0.687 |
| 524 (Linear) | 1.501 | 2.698 | 0.686 | 0.686 |

Fourier : Number of dummy points (n_1) = 10

去するためのダミー一点数を 10 点とした。

内挿関数が適切であれば、節点を増やすことによって、解がある一定値に収束することが保証されなければならない。これを検証するため、Fig. 11 に示すように、外側の直線境界上の節点数を 6 種類変えて計算を行った。

計算結果を Table 2 に示す。この表から節点数の増加に伴って正解に近づくことがわかる。なお、表中の節点数が 56 のものは、円孔部を 12 等分した点に節点を設けたときの計算結果である。

Fig. 12 は直線境界上の節点間隔を不等間隔にしたときの要素分割図で、直線境界を 4 要素、円孔部を 1 要素、計 5 つの要素とし、設けた節点の数は 52 である。

Fig. 13 に y 軸上の内点における y 方向の変位 v を節点間隔が等間隔の場合と対比して示す。この例の場合、節点間隔が等間隔の場合の方が精度はよいが、不等間隔の場合でも、十分妥当な解が得られることがわかる。

(2) 多孔板の引張問題

次に、Fig. 14 に示すような 4 つの円孔を有する平板に引張力が作用する場合について解析する。対称性により 1/4 部分についてだけ考え、境界条件として x 軸上で y 方向に、 y 軸上で x 方向にそれぞれ拘束する。要

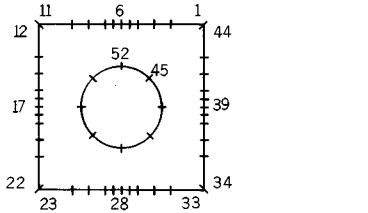


Fig. 12 Mesh division (unequal intervals).

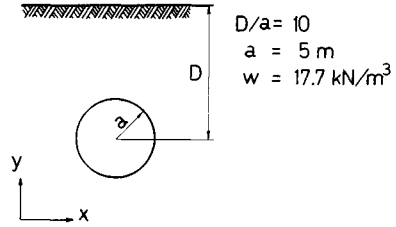


Fig. 16 Model for excavation of a circular hole.

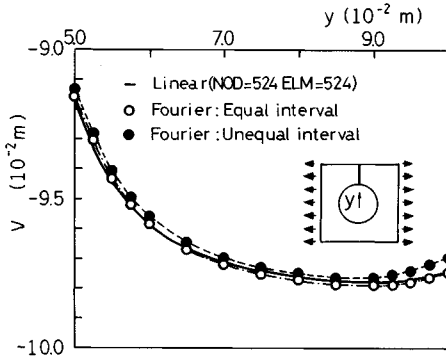


Fig. 13 Internal displacements v along the y axis.

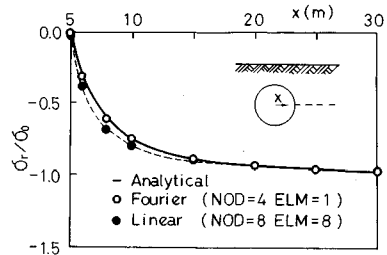


Fig. 17 Distribution of stresses σ_r/σ_0 .

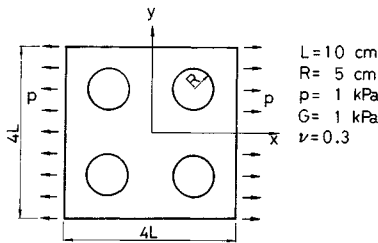


Fig. 14 Multi-perforated plate.

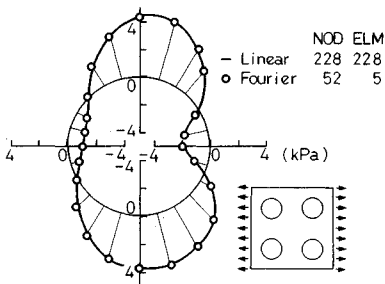


Fig. 15 Circumferential stresses σ_o around a hole.

素分割は円孔部を8節点の閉曲線境界とし、直線境界に対してはリンク効果を消去した11節点の開要素を4個用いている。

Fig. 15 は円孔部の σ_o について 222 節点の線形要素を用いた解との比較を図示したものである。フーリエ要素では節点数が少なくにもかかわらず、かなり細かく離散化した線形要素の解とよく一致している。

なお、当然のことながらフーリエ要素を用いた場合でも、節点における値だけではなく、節点間の任意の境界上における変位、表面力が計算可能なことは他の要素を用いた場合と同様である。

(3) トンネル周辺の応力解析

最後に、掘削によるトンネル周辺部の地山の応力解析を行う。

解析にあたって次のような仮定を用いた。

- 1) 掘削は半無限地盤内での素掘とする。
- 2) トンネルは円形断面とする。
- 3) 掘削前の地山内の初期応力はすべての方向に等しいとする。すなわち、地表面から深さ D の位置における掘削前の地中応力は次のようになる。

$$\sigma_x = \sigma_y = -wD = \sigma_0$$

ここに、 w は土の単位体積重量である。

いま、トンネル半径 a に比べて土被り D が十分大きい深い円形トンネルを仮定すると、弾性理論解は次式で与えられる。

$$\sigma_r = -\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \sigma_0$$

$$\sigma_\theta = -\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \sigma_0$$

ここに、 σ_r 、 σ_θ はそれぞれ掘削後の半径方向、円周方向の地山内応力である。

このような半無限領域の問題に対して境界要素法を用いて解析する場合には、基本解に半無限基本解を用いれば自由表面の境界条件は解析的に満足されるので、その境界上では要素分割を行う必要がなくなる¹⁸⁾。したがって、本計算例の場合、円形トンネル部だけを離散化すれ

ばよく、フーリエ要素で4節点、線形要素で8節点の離散化とする。数値積分はフーリエ要素、線形要素ともに24点ガウス積分を用いる。

Fig. 17はD/a=10における円孔からの水平方向の内点のσ_r/σ₀の分布を示したものである。この図より節点数4、要素数1のフーリエ要素を用いた解が実線で示す理論値とよく一致していることがわかる。

4. 結 論

本研究は節点間ベクトルの有限フーリエ級数による内挿関数の誘導と、その二次元境界要素法への応用ならびにその有効性を検討したものである。本研究により得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 有限フーリエ級数要素を用いることにより、少ない節点数でもよい精度が得られるので、入力データが少なくすむ。半無限領域の問題では、半無限基本解により自由表面上の境界を要素分割する必要がなくなるので、さらに有効である。

(2) 連続な閉曲線境界の場合には、要素の節点数に相当するいわゆる高次の1要素からなる境界として表現することができ、特に有効である。

(3) 開曲線要素の場合、要素の終点にダミー点を設けることによりフーリエ級数のリンク効果を消去することができる。

(4) 不連続部を有する境界の場合には、リンク効果を消去したいいくつかの開曲線要素からなる境界として取り扱えばよい。この場合にも、各要素はそれぞれの要素が含む節点数に対応した次数の高次要素となる。

なお、本計算例では、分布荷重のみが作用する問題の解析を行ったが、集中荷重が作用する問題に対しては、多項式近似による他の高次要素の場合と同様、集中荷重が作用する点の前後に線形要素を挿入するか、あるいは集中荷重を物体力と同様に取り扱いによって処理することが必要である。

本研究では多孔板の計算例として、円孔が4つまでの規則的な並びをしたものについて解析したが、有限フーリエ級数要素を用いれば、円孔が不規則な配列の場合を含めて、円孔の数が多いものほど、さらに有効であると考えられる。これについては別の機会に報告する予定である。

本研究の一部は文部省科学研究補助金の援助を得たこと、また、本研究での計算は信州大学情報処理センターのHITAC M-260Dを利用して行われたことを付記する。

付録 式 (29) の証明

式 (28) の第2式の関係を用いると、

$$\sum_{j=0}^n \Phi_j(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(t) \dots \dots \dots (A.1)$$

ここに、f_j(t)はnが偶数の場合

$$f_j(t) = \frac{\sin[\pi(t-j)] \cos[\pi(t-j)/n]}{n \sin[\pi(t-j)/n]} \dots \dots \dots (A.2)$$

である。jは整数であるから次式が成立する。

$$-\cos[\pi(t-j)] + \cos(\pi t) \cos(\pi j) = 0$$

式 (A.2) に上式を加えて整理すると

$$f_j(t) = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin[(n-1)\pi(t-j)/n]}{\sin[\pi(t-j)/n]} + \cos(\pi t) \cos(\pi j) \right]$$

一方、

$$\frac{\sin[(2N-1)\beta/2]}{\sin(\beta/2)} = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \cos(k\beta) - 1$$

を用いると

$$f_j(t) = \frac{1}{n} \left[\cos(\pi t) \cos(\pi j) - 1 + 2 \sum_{k=0}^{n/2-1} [\cos(2\pi kt/n) \cos(2\pi kj/n) + \sin(2\pi kt/n) \sin(2\pi kj/n)] \right] \dots \dots \dots (A.3)$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \Phi_j(t) &= \frac{1}{n} \left[\cos(\pi t) \sum_{j=0}^{n-1} \cos(\pi j) - n + 2 \sum_{k=0}^{n/2-1} [\cos(2\pi kt/n) \sum_{j=0}^{n-1} \cos(2\pi kj/n) + \sin(2\pi kt/n) \sum_{j=0}^{n-1} \sin(2\pi kj/n)] \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[-n + 2 \sum_{k=0}^{n/2-1} \left[\frac{\cos[(2t-n+1)\pi k/n] \sin(\pi k)}{\sin(\pi k/n)} \right] \right] \end{aligned}$$

しかるに、k=0, 1, 2, ..., n/2-1 に対しては

$$\frac{\cos[(2t-n+1)\pi k/n] \sin(\pi k)}{\sin(\pi k/n)} = \begin{cases} n & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

であるから、

$$\sum_{j=0}^n \Phi_j(t) = 1$$

となり、式 (29) の第1式が成立する。

nが奇数の場合には

$$f_j(t) = \frac{1}{n} \left[-1 + 2 \sum_{k=0}^{(n-1)/2} [\cos(2\pi kt/n) \cos(2\pi kj/n) + \sin(2\pi kt/n) \sin(2\pi kj/n)] \right] \dots \dots \dots (A.4)$$

となり、さきと同様にして

$$\sum_{j=0}^n \Phi_j(t) = 1$$

が成立する。

次に、式 (29) の第2式については、nが偶数の場合

式 (A・3) を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n j \Phi_j(t) &= \sum_{j=1}^{n-1} j f_j(t) + n \Phi_n(t) \\ &= \frac{1}{n} \left[\cos(\pi t) \sum_{j=1}^{n-1} j \cos(\pi j) - \sum_{j=1}^{n-1} j \right. \\ &\quad + 2 \sum_{k=0}^{n/2-1} \left[\cos(2\pi k t/n) \sum_{j=1}^{n-1} j \cos(2\pi k j/n) \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin(2\pi k t/n) \sum_{j=1}^{n-1} j \sin(2\pi k j/n) \right] \right] \\ &\quad - \frac{n}{2} + \frac{1 + \cos(\pi t)}{2} + t \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n/2-1} \frac{\sin[(2t+1)\pi k/n]}{\sin(\pi k/n)} \end{aligned}$$

上式に次式

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} j \cos(j\beta) &= \frac{N \sin[(2N-1)\beta/2]}{2 \sin(\beta/2)} - \frac{1 - \cos(N\beta)}{4 \sin^2(\beta/2)} \\ \sum_{j=0}^{n-1} j \sin(j\beta) &= -\frac{N \cos[(2N-1)\beta/2]}{2 \sin(\beta/2)} + \frac{\sin(N\beta)}{4 \sin^2(\beta/2)} \end{aligned}$$

を適用して整理すると

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n j \Phi_j(t) &= 1 - n + t + \sum_{k=0}^{n/2-1} S \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n/2-1} \frac{\sin[(2t+1)\pi k/n]}{\sin(\pi k/n)} \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{\sin[(2n-2t-1)\pi k/n]}{\sin(\pi k/n)} \right. \\ &\quad + \frac{\sin(2\pi k t/n) \sin(2\pi k)}{2n \sin^2(\pi k/n)} \\ &\quad \left. - \frac{\cos(2\pi k t/n) [1 - \cos(2\pi k)]}{2n \sin^2(\pi k/n)} \right] \end{aligned}$$

しかるに, $k=0, 1, 2, \dots, n/2-1$ に対しては

$$S = \begin{cases} n-1 & (k=0) \\ -\frac{\sin[(2t+1)\pi k/n]}{\sin(\pi k/n)} & (k \neq 0) \end{cases}$$

となるから

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n j \Phi_j(t) &= 1 - n + t + n - 1 \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n/2-1} \frac{\sin[(2t+1)\pi k/n]}{\sin(\pi k/n)} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n/2-1} \frac{\sin[(2t+1)\pi k/n]}{\sin(\pi k/n)} = t \end{aligned}$$

を得る.

n が奇数の場合には, 式 (A・4) を用いて同様の計算を行えば

$$\sum_{j=0}^n j \Phi_j(t) = t$$

が得られる.

なお, 以上の関係は数値計算によっても検証することができる.

参考文献

- 1) Banerjee, P.K. and Watson, J.O. : Developments in Boundary Element Methods-4, Elsevier Applied Science Publishers, 1988.
- 2) Mackerle, J. and Brebbia, C.A. : The Boundary Element Reference Book, Springer-Verlag, 1988.
- 3) Kusama, T. and Mitsui, Y. : Boundary Element Method Applied to Linear Viscoelastic Analysis, Appl. Math. Modeling, Vol.6, pp.285~290, 1982.
- 4) Mitsui, Y. and Yoshida, S. : Boundary Element Method Applied to Photoelastic Analysis, J. Engrg. Mech. ASCE, Vol.109, pp.619~631, 1983.
- 5) Mitsui, Y., Ichikawa, Y., Obara, Y. and Kawamoto, T. : A Coupling Scheme for Boundary and Finite Elements Using A Joint Element, Int. J. Numer. Analy. Meth. Geomech., Vol.9, pp.161~172, 1985.
- 6) Ohkami, T., Mitsui, Y. and Kusama, T. : Boundary Element/Finite Element Analysis in Geomechanics Including Body Forces, Int. J. Comp. Geotech., Vol.1, pp.263~278, 1985.
- 7) Ohkami, T. and Mitsui, Y. : Thermo-Elastic Analysis by Coupling Procedure Using Boundary and Finite Elements, Proc. Int. Conf. BEM Tokyo, pp.3~15, 1986.
- 8) Liggett, J.A. and Salmon, J.R. : Cubic Spline Boundary Elements, Int. J. Numer. Engrg., Vol.17, pp.543~556, 1981.
- 9) Weaver, H.J. : Applications of Discrete and Continuous Fourier Analysis, John Wiley & Sons, 1983.
- 10) Bringham, E.O. : The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall, 1974.
- 11) Cheung, Y.K. : Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs, ASCE, 94, EM6, pp.1365~1378, 1968.
- 12) Cheung, Y.K. : Folded Plate Structures by Finite Strip Method, Proc. ASCE, 95, ST12, pp.2963~2979, 1969.
- 13) Chakrabarti, S. : Trigonometric Function Representations for Rectangular Plate Bending Elements, Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol.3, No.2, pp.261~273, 1971.
- 14) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method, Third Edition, McGraw-Hill (UK), 1977.
- 15) Krahula, J. and Polhemus, J. : Use of Fourier Series in the Finite Element Method, AIAA, J., Vol.6, No.4, pp.726~728, 1968.
- 16) 大崎順彦 : 地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1983.
- 17) 日本数学会編集 : 数学辞典, 第2版, 岩波書店, pp.437~442, 1978.
- 18) Telles, J.C. and Brebbia, C.A. : Boundary Element Solution for Half-Plane Problems, Int. J. Solids Structures, Vol.17, No.12, pp.1149~1158, 1981.

(1988.7.23・受付)